

## PHẦN I. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

### A. Kiến thức cần nhớ

**1. Nội dung:** Dirichlet (Điriklê) là tên của một nhà toán học người Đức (Pôngutáp Lêgien Điriklê) ông sinh năm 1805 và mất năm 1859. Trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán ở các trường phổ thông ông đã đưa ra được một nguyên tắc giải toán rất hữu hiệu và được sử dụng nhiều trong lĩnh vực số học, hình học và đại số. Ngày nay người ta thường gọi nguyên tắc này là nguyên tắc Dirichlet hay nguyên lý Dirichlet (hay còn gọi là nguyên tắc “nhốt thỏ vào lồng”)

\* Cụ thể: *Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên. (Hay: Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng lại không có cái lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ).*

\* Tổng quát:

a. *Nếu ta nhốt  $n$  chú thỏ vào  $n-1$  cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai chú thỏ trở lên.*

b. *Khi nhốt  $n$  con thỏ vào  $k$  cái lồng:*

+ *Nếu  $n = kp + r$  ( $0 < r \leq k-1$ ) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn  $p+1$  con thỏ.*

+ *Nếu  $n = kp$  thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn  $p$  con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn  $p$  con thỏ.*

### 2. Chú ý:

+ Nguyên lý Dirichlet thường được sử dụng để giải các bài toán chứng minh sự tồn tại của sự vật, sự việc mà không cần chỉ ra một cách tường minh sự vật, sự việc đó.

+ Khi giải bài toán vận dụng nguyên lý Dirichlet, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) các yếu tố “thỏ”; “lồng”; “nhốt thỏ vào lồng”. Khi giải diễn đạt theo ngôn ngữ toán học.

+ Nhiều bài toán sau một số bước trung gian mới sử dụng được nguyên lý Dirichlet.

+ Thường kết hợp với phương pháp chứng minh phản chứng.

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1:** Chứng minh nguyên lý Dirichlet.

✓ *Tìm cách giải:* Chứng minh trực tiếp hoặc sử dụng phản chứng.

**Giải**

\* Chứng minh: Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên.  
(Hay: Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà lại không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ). Thật vậy, nếu mỗi lồng chứa không quá 2 con thỏ thì 3 lồng chứa không quá  $2.3=6$  con thỏ, vô lý. Vậy không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ.

\* Chứng minh tổng quát:

a. Nếu ta nhốt  $n$  con thỏ vào  $n-1$  cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.

Thật vậy giả sử không có lồng nào chứa từ hai con thỏ trở lên thì nhiều nhất mỗi lồng chỉ chứa một con thỏ.  $(n-1)$  cái lồng chứa nhiều nhất  $(n-1)$  con thỏ. Vô lý.

Vậy nếu ta nhốt  $n$  con thỏ vào  $n-1$  cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.

b. Khi nhốt  $n$  con thỏ vào  $k$  cái lồng:

+ Nếu  $n = kp + r$  ( $0 < r \leq k-1$ ) thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn  $p+1$  con thỏ.

Thật vậy: Giả sử lồng nào cũng có không quá  $p$  con thỏ thì  $k$  lồng không có  $kp$  con thỏ, ít hơn số  $n$  con thỏ, vô lý.

+ Nếu  $n = kp$  thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn  $p$  con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn  $p$  con thỏ.

Thật vậy giả sử lồng nào cũng chứa ít hơn  $p$  con thỏ thì  $k$  lồng không có quá  $k(p-1)$  thỏ, vô lý. Giả sử lồng nào cũng chứa nhiều hơn  $p$  con thỏ thì  $k$  lồng có ít nhất là  $k(p+1)$  thỏ, vô lý.

**Ví dụ 2:** Thả 257 viên bi nhỏ vào bàn cờ Quốc tế 64 ô vuông. Chứng minh tồn tại một ô chứa ít nhất 5 viên bi (kể cả trường hợp viên bi nằm trên cạnh ô vuông).

✓ *Tìm cách giải:* Coi 64 ô vuông như 64 cái lồng. 257 viên bi là 257 con thỏ. Ta thấy  $257 = 64.4 + 1$ . Thả 257 con thỏ vào 64 cái lồng, theo nguyên lý Đê-rich-lê tồn tại một lồng chứa ít nhất 5 con thỏ.

**Giải**

Giải trực tiếp như trên. Tuy nhiên có thể dùng phản chứng:

Giả sử không tồn tại một ô nào chứa ít nhất 5 viên bi, thì nhiều nhất mỗi ô chỉ chứa 4 viên. 64 ô chứa nhiều nhất  $64.4 = 256$  viên bi. Vô lý.

**Ví dụ 3:** Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không có ai bị điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán này số “thỏ” là  $41 - 4 = 37$  điểm từ 3 đến 9. “Lồng” là 7 loại điểm nói trên. Phép chia 37 cho 7 được 5 còn dư. Tồn tại  $5 + 1 = 6$  học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

### **Giải**

Có  $41 - 4 = 37$  học sinh phân chia vào 7 loại điểm từ 3 đến 9. Giả sử không tồn tại một loại điểm nào có ít nhất 6 bạn đạt, thì nhiều nhất mỗi loại điểm chỉ có 5 bạn đạt; 7 loại điểm có nhiều nhất  $7 \cdot 5 = 35$  bạn đạt. Lớp học ít hơn 41 học sinh. Vô lý. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

**Ví dụ 4:** Người ta chia một hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ bằng cách chia mỗi cạnh thành 4 phần bằng nhau. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số  $-a; 0; a$  sau đó tính tổng các số theo từng cột, từng hàng và từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

✓ *Tìm cách giải:* Có bao nhiêu tổng theo cột, theo hàng, theo đường chéo đó chính là “số thỏ”. Mỗi tổng có thể có giá trị bao nhiêu. Số giá trị của tổng sẽ là số “lồng”.

### **Giải**

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Số hàng: 4; Số cột: 4; Số đường chéo: 2. Như vậy sẽ có 10 tổng.

Các giá trị có thể có khi cộng các số trong mỗi hàng, cột hoặc đường chéo là  $-4a; -3a; -2a; -a; 0; a; 2a; 3a; 4a$ .

Có 10 tổng, mỗi tổng nhận 1 trong 9 giá trị mà  $10 = 9 \cdot 1 + 1$ . Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

**Ví dụ 5:** Chứng minh rằng: Trong  $n+1$  số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_n; a_{n+1}$  luôn tìm được hai số sao cho hiệu của chúng chia hết cho  $n$ .

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán “thỏ” là các số tự nhiên bất kỳ, “lồng” là số số dư trong phép chia một số cho  $n$ . Chia một số bất kỳ cho  $n$  có thể nhận được một trong  $n$  số dư  $0; 1; 2; \dots; n-2; n-1$ . Có  $n+1$  con thỏ, có  $n$  cái lồng

### Giải

Chia một số bất kỳ cho  $n$  có thể nhận được một trong  $n$  số dư  $0; 1; 2; \dots; n-2; n-1$ . Có  $n+1$  số, có  $n$  số dư. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho  $n$ . Không mất tổng quát giả sử hai số đó là  $a_p$  và  $a_q$  ( $p; q \in \{1; 2; \dots; n; n+1\}$ ) và  $a_p > a_q$ . Ta có:

$$a_p = n.k_p + r \quad (r \in N; 0 \leq r \leq n-1)$$

$$a_q = n.k_q + r$$

$$\text{Khi đó } a_p - a_q = n.(k_p - k_q); n.$$

Đây chính là hai số có hiệu của chúng chia hết cho  $n$ . Bài toán được chứng minh.

**Ví dụ 6:** Trong 2016 số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_{2016}$  luôn tìm được một số chia hết cho 2016 hoặc hai số có hiệu chia hết cho 2016.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số “thỏ” là số 2016 số tự nhiên bất kỳ, “Lồng” là số số dư trong phép chia một số cho 2016. Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số chia hết cho 2016, hoặc tất cả các số đều không chia hết cho 2016.

### Giải

Nếu một trong  $n$  số chia hết cho 2016, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 2016 số không có số nào chia hết cho 2016 thì mỗi số khi chia cho 2016 sẽ nhận một trong 2015 số dư  $1; 2; 3; \dots; 2014; 2015$ .

Có 2016 số mà có 2015 số dư nên tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2016  $\Rightarrow$  hiệu của hai số chia hết cho 2016. (đpcm).

### Ví dụ 7:

a) Cho một dãy số gồm 100 số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_{100}$ . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 100 hoặc tổng một số số chia hết cho 100.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số “thỏ” là số 100 số tự nhiên bất kỳ, “Lông” là số số dư trong phép chia một số cho 100.

Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số bằng 0, hoặc tất cả các số đều khác không.

### Giải

a) Trường hợp có số bằng 0 ta chọn số này thỏa mãn đầu bài.

Trường hợp tất cả các số đều khác 0 ta lập 100 tổng sau:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

Nếu một trong 100 tổng này chia hết cho 100, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 100 tổng này không chia hết cho 100, thì khi chia cho 100 chúng nhận 99 số dư 1; 2; 3; ...; 99.

Có 100 tổng và có 99 số dư khi chia cho 100, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có số dư bằng nhau khi chia cho 100. Giả sử là hai tổng là

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \text{ và } S_h = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_h \quad (100 \geq k > h \geq 1)$$

$$\text{Thì } S_k - S_h = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_h) =$$

$$= (a_{h+1} + a_{h+2} + a_{h+3} + \dots + a_k) : 100.$$

b) Tổng quát hóa:

Cho một dãy số gồm  $n$  số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_n$ . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho  $n$  hoặc tổng một số số chia hết cho  $n$ .

**Ví dụ 8:** Chứng minh tồn tại lũy thừa của 79 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

✓ *Tìm cách giải:* Nhận xét  $79^n$ . Nếu  $n$  chẵn thì chữ số tận cùng là 1. Nếu  $n$  lẻ thì chữ số tận cùng là 9.

Do đó ta xét  $10^5$  lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau.

➤ Cách 1.

- Xét  $10^5$  lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau. Nếu một trong các lũy thừa đó có tận cùng là 00001 thì bài toán được chứng minh.

- Nếu không có lũy thừa nào có tận cùng là 00001 thì số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau kể từ số 00002; 00003; ...; đến 99998; 99999 nhỏ hơn  $10^5$ . Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận cùng giống nhau. Nếu  $n$  chẵn thì số  $79^{2k}$  chữ số tận cùng là 1. Giả sử đó là hai số:

$$A_1 = 79^{2k_1} = B_1 \cdot 10^5 + \overline{abcd1}.$$

$$A_2 = 79^{2k_2} = B_2 \cdot 10^5 + \overline{abcd1} \text{ với } A_1 > A_2.$$

$$A_1 - A_2 = 79^{2k_1} - 79^{2k_2} = 79^{2k_2} \left[ 79^{2(k_1 - k_2)} - 1 \right] = 10^5 (B_1 - B_2).$$

Do  $79^{2k_2}$  có tận cùng là 1 và  $10^5 (B_1 - B_2)$  có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên  $\left[ 79^{2(k_1 - k_2)} - 1 \right]$  có tận cùng không ít hơn 5 số 0 suy ra  $79^{2(k_1 - k_2)}$  có tận cùng là 00001. Vậy tìm được số  $k = 2(k_1 - k_2)$  thỏa mãn yêu cầu của bài.

➤ Cách 2. Ta cần chứng minh tồn tại  $k \in \mathbb{N}$  sao cho  $79^k - 1$  chia hết cho  $10^5$ .

Xét  $10^5 + 1$  số:  $79; 79^2; 79^3; 79^4; \dots; 79^{10^5 + 1}$ . Tất cả các số này đều không chia hết cho  $10^5$  nên nếu lấy  $10^5 + 1$  số này chia cho số  $10^5$  thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho  $10^5$ . Khi đó hiệu của chúng chia hết cho  $10^5$ . Giả sử hai số đó là  $79^m$  và  $79^n$  ( $m, n \in \mathbb{N}; 1 \leq n < m \leq 10^5 - 1$ ).

Ta có  $79^m - 79^n : 10^5$  hay  $79^n (79^{m-n} - 1) : 10^5$ .

Vì  $(79^n; 10^5) = 1$  nên  $(79^{m-n} - 1) : 10^5$

Ta chọn  $m - n = k$  lúc đó  $79^k$  chia cho  $10^5$  dư 1 tức là  $79^k$  có chữ số tận cùng là 00001 (đpcm).

**Ví dụ 9:** Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt câu lạc bộ toán của khối 7 của một trường THCS, 6 bạn học sinh giỏi toán của 6 lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E, 7G viết thư trao đổi với nhau về hai nội dung: (I): “Thống kê” và

(II): “Biểu thức đại số”. Biết rằng mỗi bạn đều viết thư cho 5 bạn còn lại (trong các bạn nói trên) về một trong hai nội dung trên.

Chứng minh rằng có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

✓ *Tìm cách giải:* Ta gọi 6 học sinh giỏi toán (ta coi là 6 “thỏ”) của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về mỗi bạn một trong hai nội dung “Thống kê” và “Biểu thức đại số”.

Ta thành lập các “lồng” bằng cách sau đây:

- “Lồng I” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (I).
- “Lồng II” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (II).

Như vậy sẽ có 5 thỏ nhốt vào “2 lồng”. Theo nguyên lí Dirichlet phải có một lồng nhốt không ít hơn 3 “thỏ”, nghĩa là phải có ít nhất 3 bạn nào đó trong số 5 bạn (không kể A) cùng trao đổi với A về một trong hai nội dung trên. Không mất tổng quát ta có thể giả sử 3 bạn cùng trao đổi với A về nội dung (I).

+ Trong ba bạn đó nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) thì hai bạn đó với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II). Bài toán cũng được chứng minh.

Ta trình bày lời giải như sau:

### **Giải**

Ta gọi 6 học sinh giỏi toán của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về hai nội dung (I) và (II). Ta có  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ . Theo nguyên lí Dirichlet A phải viết cho ít nhất 3 bạn về một nội dung, không mất tổng quát ta giả sử 3 bạn đó là B, C, D và nội dung trao đổi là (I).

+ Trong ba bạn B, C, D nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) chẳng hạn B và C thì hai bạn B và C với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn B, C, D đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II) tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

Bài toán cũng được chứng minh.

Tóm lại dù khả năng nào xảy ra ta luôn có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

### C. Bài tập vận dụng

1. Một tổ có 12 học sinh, trong một giờ kiểm tra Toán ngoài 2 bạn An và Bình đạt điểm 10 còn lại các bạn khác đạt số điểm thấp hơn nhưng không bạn nào bị điểm 0; 1; 2 (điểm số của các bạn đều là số tự nhiên). Chứng minh ngoài hai bạn đạt điểm 10 còn ít nhất có hai bạn có điểm số như nhau.

2. Một lớp học có 37 học sinh cùng tuổi. Chứng minh rằng trong năm có một tháng ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật.

3. Một vòng chung kết bóng bàn có 8 đấu thủ tham gia thi đấu vòng tròn nghĩa là mỗi đấu thủ đều phải gặp 7 đấu thủ còn lại. Chứng minh trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

4. Chứng minh rằng trong 5 người bất kỳ ít ra cũng có 2 người có cùng số người quen như nhau trong 5 người đó. Hãy tổng quát hóa bài toán!

5.

a) Trên một bảng ô vuông kích thước  $6 \times 6$  ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số  $-1; 0; 1$  sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

b) Trên bảng ô vuông kích thước  $6 \times 6$  ấy ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 36, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

6. Chứng minh rằng trong 2016 số tự nhiên bất kỳ tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 2015.

7. Chứng minh rằng trong  $n$  số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho  $n$ .

8. Trong  $n$  số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_n$  luôn tìm được một số chia hết cho  $n$  hoặc hai số có hiệu chia hết cho  $n$ .

9. Chứng minh rằng trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

10. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng

---

19741974...19740000...0000 chia hết cho 1975.

**11.** Tồn tại hay không một số có dạng  $20162016\dots20162016$  chia hết cho 2017.

**12.** Chứng minh rằng trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ ta luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 10.

**13.**

a) Cho 1001 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2000. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán và chứng minh.

**14.** Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

**15.** Có 17 nhà khoa học viết thư cho nhau trao đổi về ba đề tài: “*Biến đổi khí hậu*”; “*Môi trường*”; “*Dân số*”. Mỗi người viết thư cho một người về một đề tài. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

(**Chú ý:** Bài toán trên có thể diễn đạt cách khác theo ngôn ngữ hình học như sau: “*Cho 17 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn.. Hai điểm bất kì trong 17 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh, màu đỏ hoặc màu vàng. Chứng minh luôn tồn tại ít nhất một tam giác có ba cạnh cùng màu*”).

**16.** Cho dãy số  $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; \dots; 10^{20}$ . Chứng minh rằng có một số trong dãy số ấy chia cho 19 thì dư 1.

**17.** Cho  $X$  là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp  $X$  luôn tìm được hai phần tử  $x, y$  sao cho  $x - y$  thuộc tập hợp  $E = \{3; 6; 9\}$ .

**18.** Cho lưới ô vuông  $5 \times 5$ . Người ta điền vào mỗi ô một trong các số  $-1; 0; 1$ . Xét tổng các số được tính theo hàng, theo cột và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

**19.** Trên một đường tròn cho 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

**20.** Mỗi ô vuông của bảng kích thước  $10 \times 10$  (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

### **HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ**

**1.** Trừ hai bạn đạt điểm 10 còn lại 10 bạn đạt 7 loại điểm 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Giả sử trong số đó không có ít nhất hai bạn nào có số điểm giống nhau thì mỗi loại điểm chỉ nhiều nhất có một bạn đạt nên tổng còn lại nhiều nhất 7 bạn. Vô lý.

**2.** Một năm có 12 tháng. Giả sử trong năm không có một tháng nào có ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật, thì một tháng nhiều nhất có 3 học sinh tổ chức sinh nhật. Số học sinh của lớp nhiều nhất là  $21.3 = 36 < 37$ . Vô lý.

**3.** Số trận đấu của mỗi đấu thủ với các đấu thủ khác gồm 8 loại là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Các số 0 và 7 không đồng thời tồn tại vì nếu có 1 ai chưa đấu trận nào thì không ai đấu đủ 7 trận. Nếu đã có một người đấu đủ 7 trận thì không ai chưa đấu trận nào. Có 8 đấu thủ, có 7 loại số trận đấu do đó phải tồn tại ít nhất hai đấu thủ có số trận đấu như nhau ở mọi thời điểm giữa các cuộc đấu.

**4.** Giả sử trong số 5 người có một người không quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại không ai có thể có số người quen quá 3 người. Số người quen chỉ có thể có các loại 0; 1; 2; 3. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Giả sử trong số 5 người có một người quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại có số người quen chỉ có thể là 1; 2; 3; 4. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Tổng quát: Một phòng họp có  $n$  người, bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen như nhau trong số  $n$  người đó.

**5.**

a) Bảng ô vuông kích thước  $6 \times 6$  có 6 dòng, 6 cột và 2 đường chéo nên sẽ có 14 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột và đường chéo đều ghi 6 số thuộc tập  $\{-1; 0; 1\}$ . Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp  $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  có 13 phần tử. Có

14 tổng nhận trong tập 13 giá trị khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có cùng một giá trị.

b) Xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 36. Hiệu giữa hai số này là 35 (coi như là 35 thỏ). Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 36 nhiều nhất là 10 (gồm 5 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 5 cặp ô chung cạnh tính theo cột) (coi như có 10 lồng). Ta có:  $35 = 10 \cdot 3 + 5$ .

Vậy theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

**6.** Chia một số cho 2015 ta nhận được một trong 2015 số dư: 0; 1; 2; ...; 2013; 2014. Có 2016 số tự nhiên bất kỳ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2015  $\Rightarrow$  hiệu của hai số chia hết cho 2015.

**7.** Giả sử không tìm được số nào trong  $n$  số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho  $n$ . Khi đó  $n$  số này chia cho  $n$  chỉ nhận được nhiều nhất là  $n-1$  số dư khác nhau (1; 2; 3; 4; ...;  $n-1$ ), theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho  $n$  có cùng số dư, chẳng hạn là  $a$  và  $b$  với  $a > b$ , khi đó số  $a-b$  chia hết cho  $n$ . Điều này mâu thuẫn với  $0 < a-b < n$ . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**8.** Nếu một trong  $n$  số chia hết cho  $n$ , bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả  $n$  số không có số nào chia hết cho  $n$  thì khi chia cho  $n$  chúng nhận  $n-1$  số dư 1; 2; 3; ...;  $n-2$ ;  $n-1$ . Có  $n$  số, có  $n-1$  số dư nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho  $n \Rightarrow$  hiệu của hai số chia hết cho  $n$ .

**9.** Một số lẻ khi chia cho 8 sẽ có số dư là 1; 3; 5 hoặc 7. Ta chia các số dư này thành hai nhóm: Nhóm 1 là (1; 7) nhóm 2 là (3; 5). Có ba số lẻ chia cho 8 mà có hai nhóm số dư, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có số dư khi chia cho 8 vào cùng một nhóm.

Nếu hai số dư giống nhau thì hiệu của hai số chia hết cho 8.

Nếu hai số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 8.

Vậy trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

**10.** Xét 1975 số có dạng sau:

$$A_1 = 1974$$

$$A_2 = 19741974$$

$$A_3 = 197419741974$$

.....

$$A_{1974} = \overbrace{19741974...1974}^{1974 \text{ số } 1974}$$

$$A_{1975} = \overbrace{19741974...19741974}^{1975 \text{ số } 1974}$$

Tất cả 1975 số này đều không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 1975. Do đó mỗi số khi chia cho 1975 nhận một trong 1974 số dư 1; 2; 3;...; 1974. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1975 nghĩa là hiệu của chúng chia hết cho 1975.

$$\text{Giả sử đó là } A_i = \overbrace{19741974...19741974}^{i \text{ số } 1974} \text{ và } A_k = \overbrace{19741974...19741974}^{k \text{ số } 1974}$$

$(i > k; i, k \in \{1; 2; \dots; 1975\})$  hiệu của chúng sẽ là:

$$\begin{aligned} A_i - A_k &= \overbrace{19741974...19741974}^{i \text{ số } 1974} - \overbrace{19741974...19741974}^{k \text{ số } 1974} \\ &= \overbrace{19741974...19740000...0000}^{i-k \text{ số } 1974; 4k \text{ số } 0} : 1975. \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

## 11. Xét 2017 số có dạng

$$B_1 = 2016$$

$$B_2 = 20162016$$

$$B_3 = 20162016$$

.....

$$B_{2017} = \overbrace{20162016...20162016}^{2017 \text{ số } 2016}$$

Nếu một trong số 2017 số này chia hết cho 2017 ta có số cần tìm.

Nếu 2017 số này đều không chia hết cho 2017 thì tương tự bài trên ta có số

$$B_i - B_k = \overbrace{20162016...20160000...0000}^{i-k \text{ số } 2016; 4k \text{ số } 0} \quad (i > k; i, k \in \{1; 2; \dots; 2017\})$$

$$= \underbrace{20162016\dots2016}_{i-k \text{ số } 2016} : 10^{4k} : 2017. \text{ Do } 10^{4k} \nmid 2017$$

$$\text{Nên } \underbrace{20162016\dots2016}_{i-k \text{ số } 2016} : 2017.$$

Vậy tồn tại một số có dạng  $\overline{20162016\dots20162016}$  chia hết cho 2017.

**12.** Trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ bao giờ cũng tìm được 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau còn chữ số hàng đơn vị là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Viết các số đó dưới dạng:  $\overline{ab\dots c0}$ ;  $\overline{ab\dots c1}$ ;  $\overline{ab\dots c2}$ ; ...,  $\overline{ab\dots c9}$ . Gọi tổng các chữ số là  $S = a + b + \dots + c$  thì các số vừa viết có tổng các chữ số  $S; S+1; S+2; \dots; S+9$  là 10 số tự nhiên liên tiếp do đó có 1 số chia hết cho 10.

**13.**

a) Gọi 1001 số nguyên dương khác nhau đã cho là  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{1001}$  với  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < 2000$ .

Đặt  $A = \{a_2; a_3; \dots; a_{1001}\}$  gồm 1000 phần tử có dạng  $a_m$  với  $m \in \{2; 3; \dots; 1001\}$  và

$B = \{a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_{1001} - a_1\}$  gồm 1000 phần tử có dạng  $a_n - a_1$  với  $n \in \{2; 3; \dots; 1001\}$ .

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 1999 phần tử  $\{1; 2; 3; \dots; 1998; 1999\}$  trong khi tổng số các phần tử của tập A và B là  $1000 + 1000 = 2000$  phần tử. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A, một số thuộc tập hợp B tức là  $a_m = a_n - a_1$  do đó  $a_n = a_m + a_1$ . Ba số  $a_m; a_n; a_1$  đôi một khác nhau. Thật vậy  $a_m \neq a_1; a_n \neq a_1$  theo cách đặt các tập hợp A và B, còn  $a_m \neq a_n$  vì nếu  $a_m = a_n$  thì  $a_1 = 0$ , trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số  $a_n; a_m; a_1$  trong các số đã cho mà  $a_n = a_m + a_1$ .

b) Tổng quát hóa: Cho  $n+1$  số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn  $2n$ . Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại. (Chứng minh tương tự như câu a). (Bạn đọc tự chứng minh).

**14.** Một số tự nhiên chia cho 100 có 1 trong các số dư 0; 1; 2; ..., 98; 99. Tất cả các số dư trong phép chia cho 100 được chia thành 51 nhóm sau: (0); (1; 99); (2; 98); (3; 97); ..., (49; 51); (50)

Đem 52 số tự nhiên chia cho 100 nhận được 52 số dư; 52 số dư này thuộc 51 nhóm trên. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số dư thuộc vào một nhóm, tức là tồn tại hai số có tổng số dư trong phép chia cho 100 bằng 100 hoặc hiệu số dư trong phép chia cho 100 bằng 0. Hai số này có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

**15.** Giả sử A là 1 trong 17 nhà khoa học. A phải trao đổi với 16 nhà khoa học còn lại về 3 đề tài. Theo nguyên lý Dirichlet thì A phải trao đổi với ít nhất 6 nhà khoa học khác về cùng một đề tài chẳng hạn “Dân số”.

Gọi 6 nhà khoa học khác cùng một đề tài chẳng hạn “Dân số” với A là B; C; D; E; F; G.

+ Nếu 2 trong 6 nhà khoa học trao đổi với nhau về đề tài “Dân số” thì bài toán được chứng minh vì khi ấy 2 trong 6 nhà khoa học cùng với A trao đổi với nhau về cùng một đề tài “Dân số”.

+ Nếu tất cả 6 nhà khoa học B; C; D; E; F; G. không ai trao đổi với nhau về đề tài “Dân số” thì họ chỉ còn trao đổi với nhau về hai đề tài “Biến đổi khí hậu”; “Môi trường”. Xét nhà khoa học B trong 6 nhà khoa học trên. B phải trao đổi với 5 người còn lại về hai đề tài “Biến đổi khí hậu”; “Môi trường”. Theo nguyên lý Dirichlet B phải trao đổi với ít nhất 3 nhà khoa học khác chẳng hạn C; D; E về cùng một đề tài chẳng hạn “Môi trường”.

Nếu C; D; E có hai người chẳng hạn D và E trao đổi với nhau về cùng đề tài “Môi trường” thì B; E; D chính là ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Nếu C; D; E không có ai trao đổi với nhau về cùng đề tài “Môi trường” thì C; D; E chỉ còn một đề tài duy nhất là “Biến đổi khí hậu”; để trao đổi. Vậy ta có ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có ít nhất 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

**16.** Xét dãy số  $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; \dots; 10^{20}$  có 20 số nên khi chia mỗi số trong dãy cho 19 ta nhận được 1 trong 19 số dư  $r \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 17; 18\}$ .

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 19. Không mất tổng quát giả sử hai số đó là  $10^a$  và  $10^b$  ( $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $b < a \leq 20$ ) khi đó  $10^a - 10^b = 10^b \cdot (10^{a-b} - 1) : 19$ . Mà  $(10^b; 19) = 1$  nên  $(10^{a-b} - 1) : 19$  hay  $10^{a-b} : 19$  dư 1 và  $1 \leq a - b \leq 19$ . Ta có điều phải chứng minh.

17. Gọi 700 số nguyên dương đôi một khác nhau đã cho là  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}$ . Như vậy

$$X = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}\}. \text{ Xét } 700 \cdot 4 = 2800 \text{ số sau đây: } a_1; a_2; a_3; \dots; a_{700}; a_1 + 3; a_2 + 3; a_3 + 3; \dots; a_{700} + 3; a_1 + 6; a_2 + 6; a_3 + 6; \dots; a_{700} + 6; a_1 + 9; a_2 + 9; a_3 + 9; \dots; a_{700} + 9;$$

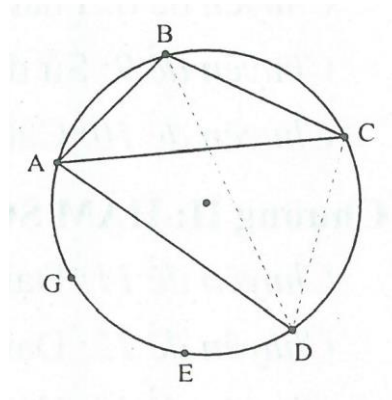
Do mỗi số không lớn hơn 2006 nên mỗi số trên đều không lớn hơn:  $2006 + 9 = 2015$ . Có 2800 số mà mỗi số nhận giá trị từ 1 đến không quá 2015. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số bằng nhau. Giả sử đó là 2 số  $a_i + 9 = a_k + 3$  với  $(i; k \in \{1; 2; 3; \dots; 700\})$ .

Khi ấy  $a_k - a_i = x - y = 9 - 3 = 6$ .

(Tương tự nếu có số  $a_i + 6 = a_k + 3$  ta có  $x - y = 3$ ;  $a_i + 9 = a_k$  ta có  $x - y = 9 \dots$ ). Suy ra tồn tại hai phần tử  $x, y \in X$  sao cho  $x - y$  thuộc tập hợp  $E = \{3; 6; 9\}$ .

18. Tổng số có 12 tổng đó là: 5 tổng theo hàng; 5 tổng theo cột và 2 tổng theo đường chéo. Vì mỗi tổng có 5 số hạng chỉ gồm 3 số là  $-1; 0; 1$  nên mỗi tổng chỉ nhận không quá 11 giá trị  $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

19. Giả sử 6 điểm phân biệt trên đường tròn là A, B, C, D, E, G. Từ 1 điểm nối với 5 điểm còn lại được 5 đoạn thẳng với 2 màu xanh hoặc đỏ. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất ba đoạn thẳng cùng màu. Không mất tổng quát, giả sử ba đoạn thẳng  $AB, AC, AD$  cùng màu đỏ (nếu màu xanh lập luận tương tự).



Xét  $\triangle BCD$  nếu có một cạnh chẳng hạn  $BC$  màu đỏ thì  $\triangle ABC$  có ba cạnh màu đỏ. Trái lại thì  $\triangle BCD$  sẽ có ba cạnh màu xanh. Vậy luôn tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

20. Trên mỗi hình vuông con kích thước  $2 \times 2$  có không quá 1 số chia hết cho 2, không quá 1 số chia hết cho 3.

Lát kín bảng bởi 25 hình vuông, kích thước  $2 \times 2$ , có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3. Vì vậy chúng phải là một trong ba số 1; 5; 7. Ta có  $50 = 3 \cdot 16 + 2$ . Từ đó theo nguyên lý Dirichlet có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

## **PHẦN II. SUY LẬN LOGIC**

### **Chủ đề 1. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN SUY LUẬN LOGIC**

#### **A. Kiến thức cần nhớ**

Bài toán suy luận logic thường phát biểu dưới dạng toán đố (có lời văn). Để làm được dạng toán này không nhất thiết cần nhiều kiến thức phức tạp mà thường đòi hỏi suy tư sáng tạo, nhận xét tinh tế.

Ta thường gặp bài toán cho trạng thái ban đầu cùng các thao tác thay đổi liên tục trạng thái đó và yêu cầu cần phải chỉ ra một điều gì đó về trạng thái cuối cùng của nó. Việc khảo sát toàn bộ sau tất cả các lần thay đổi như vậy rất phức tạp. Khi đó ta có thể trả lời câu hỏi mà bài toán yêu cầu nhờ tính toán một đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái của bài và được đảm bảo qua tất cả các lần thay đổi. Đại lượng không đổi đó được gọi là bất biến của bài toán đã cho. Như vậy trong trạng thái cuối cùng của bài toán, giá trị của bất biến vẫn giữ nguyên như trạng thái ban đầu, tức là hệ thống không thể ở trong trạng thái với một giá trị khác với bất biến. Để tìm lời giải cho bài toán:

- Ta xác định đại lượng ở hai trạng thái: trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng.
- Khảo sát sự thay đổi của nó qua một số lần thay đổi liên tiếp để phát hiện sự bất biến.

Các tính chất bất biến thường gặp là: xét tính chẵn lẻ, xét tính chia hết của một số nguyên, xét màu sắc của vật cần xét.

#### **B. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1:** Trên bảng, người ta viết 2020 dấu (+) và 2021 dấu (-). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện nhiều lần đến khi trên bảng còn lại một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu (+) hay dấu (-)?

#### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Lúc đầu có tất cả 4041 dấu cả dấu (+) và dấu (-).
- Mỗi lần thực hiện thao tác, xóa hai dấu và viết lại một dấu nên sau mỗi thao tác số dấu trên bảng giảm đi 1.
- Do vậy sau 4040 lần thực hiện thao tác, trên bảng chỉ còn 1 dấu.
- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:  
+ **Trường hợp 1.** Nếu xóa hai dấu (+) thì viết lại một dấu (+).

+ **Trường hợp 2.** Nếu xóa hai dấu (-) thì viết lại một dấu (+).

+ **Trường hợp 3.** Nếu xóa một dấu (+) và một dấu (-) thì viết lại một dấu (-).

- Ta nhận thấy trong ba trường hợp thì số dấu (+) có thể giữ nguyên, có thể tăng 1, có thể giảm 1. Còn số dấu (-) chỉ giữ nguyên hoặc giảm 2. Như vậy số dấu (-) trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ.

✓ *Trình bày lời giải*

Mỗi lần thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nên chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau thì số dấu (-) giữ nguyên hoặc giảm đi hai. Vì vậy tính chẵn lẻ của dấu (-) không thay đổi qua các thao tác. Ban đầu có 2021 dấu (-), tức là số dấu trừ là một số lẻ. Vì vậy ở cuối cùng còn lại một dấu (số lẻ dấu) thì phải là dấu (-).

✓ **Nhận xét:** Ở ví dụ 1, tính bất biến là số các dấu (-) còn lại sau mỗi lần xóa luôn là một số lẻ.

**Ví dụ 2:** Cho dãy số 2, 4, 6, 8,...,200 (gồm 100 số nguyên dương chẵn đầu tiên). Sau khi thêm các dấu (+) hoặc dấu (-) vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép toán. Bạn Toán tính được kết quả là 34, bạn Học tính được là - 10. Hỏi bạn nào tính sai?

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy dãy số gồm toàn số chẵn nên kết quả cũng là số chẵn, mà 34 và - 10 cũng là số chẵn nên không thể vận dụng tính chẵn lẻ được.

Chúng ta thử cách khác, viết toàn bộ dấu (+) thì kết quả là 10100. Để kết quả nhỏ hơn (34 hoặc - 10) thì chúng ta đổi dấu một vài dấu (+) thành dấu (-). Chúng ta thử đổi dấu (+) trước số 6 thì thấy kết quả giảm đi 12, tức là giảm đi 2.6. Quan sát tiếp một vài số nữa chúng ta thấy giảm đi 2 lần số bị đổi dấu. Tức là kết quả còn lại luôn luôn chia hết cho 4. Còn số 34 và - 10 đều không chia hết cho 4.

✓ *Trình bày lời giải*

Tổng  $S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200 = 10100$ .

Khi thay số a bởi số - a thì tổng S giảm đi 2a, mà a là số chẵn nên S giảm đi bội của 4. Tổng S ban đầu là số chia hết cho 4, nên kết quả cuối cùng sau khi thay dấu (+) hoặc dấu (-) thì phải là một bội số của 4.

Hai số 34 và - 10 đều không phải là bội số của 4, nên cả hai bạn đều tính sai.

✓ **Nhận xét.** Ở ví dụ 2, tính bất biến là kết quả của tổng các số luôn là bội số của 4.

**Ví dụ 3:** Trong dãy số 13576193923... bắt đầu từ chữ số thứ năm, mỗi chữ số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa cụm chữ số 1234 và 6789 không?

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Các chữ số trong dãy chỉ tồn tại hai trạng thái chẵn hoặc lẻ. Quan sát những lần xuất hiện chữ số chẵn hoặc chữ số lẻ trong dãy, chúng ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Nhận thấy tổng của 4 chữ số lẻ là một số chẵn, tổng của 3 chữ số lẻ và một chữ số chẵn là một số lẻ.

Ta cần tìm quy luật chẵn lẻ (bất biến) của các chữ số trong dãy đã cho bằng cách:

Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là một số lẻ. Khi đó ta nhận được dãy số 111101111011110..., trong dãy này cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau

## GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ – TRƯỜNG THCS TÂY HỒ

một chữ số 0 là bốn chữ số 1 (tính bất biến). Nhận thấy các dãy 1234 và 6789 ứng với các dãy bốn chữ số 1010 và 0101 nên không thể có mặt trong dãy số trên.

**Ví dụ 4:** Cho bàn cờ kích thước  $10 \times 10$  ô vuông. Hỏi có thể dùng 49 hình chữ nhật kích thước  $1 \times 2$  để ghép sao cho chỉ còn 2 ô ở hai góc đối diện của bảng được hay không?

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Nhận xét, mỗi mảnh hình chữ nhật chỉ ghép được 2 ô liền nhau, nên chúng ta nghĩ tới việc tô màu hoặc đánh số chẵn lẻ.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta ghi các số 1 và 2 vào bảng sao cho hai ô liền nhau được ghi hai số khác nhau (chẳng hạn như hình vẽ), sẽ có 50 ô số 1 và 50 ô số 2, hai số ghi ở hai góc đối diện sẽ cùng là số 1 hoặc cùng là số 2.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì chiếm hai ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau, tức là tô màu một ô ghi số 1; một ô ghi số 2. Như vậy sau mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì số ô ghép t hình chữ nhật ghi số 1 bằng số ô chưa tô màu ghi số 2. Sau 49 lần ghép hình chữ nhật sẽ còn 2 ô: 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 1. Hai ô này không thể ở hai góc đối của bảng được.

**Ví dụ 5:** Cho bảng ô vuông kích thước  $2009 \times 2010$ , trong mỗi ô lúc đầu đặt một viên sỏi. Gọi T là thao tác lấy 2 ô bất kì có sỏi và chuyển từ mỗi ô đó một viên sỏi đưa sang ô bên cạnh (là ô có chung cạnh với ô có chứa sỏi). Hỏi sau một số hữu hạn phép thực hiện các thao tác trên ta có thể đưa hết sỏi ở trên bảng về cùng một ô không?

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên TP Hải Phòng, năm học 2009 – 2010)

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ trên, chúng ta nhận thấy mỗi thao tác chỉ dịch chuyển hai viên sỏi ở hai ô sang ô bên cạnh. Do vậy chúng ta nghĩ tới việc tô màu như bàn cờ vua. Mỗi thao tác, một viên sỏi chuyển từ ô đen sang ô trắng hoặc ngược lại. Nếu tất cả các viên sỏi vào một ô đen (hoặc ô trắng) thì số sỏi ở ô đen là số chẵn và số sỏi ở ô trắng cũng là số chẵn. Vậy ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta tô màu các ô vuông của bảng bằng hai màu đen trắng như bàn cờ vua. Lúc đầu tổng số sô ở các ô đen bằng  $1005 \times 2009$  là một số lẻ.

Sau mỗi phép thực hiện thao tác T, xảy ra những trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Nếu lấy hai viên sô ở hai ô đen thì chuyển sang hai ô trắng  $\Rightarrow$  số sô ở ô đen giảm 2.
- **Trường hợp 2.** Nếu lấy hai viên sô ở hai ô trắng thì chuyển sang hai ô đen  $\Rightarrow$  số sô ở ô đen tăng 2.
- **Trường hợp 3.** Nếu lấy một viên sô ở ô đen và một viên sô ở ô trắng thì chuyển sang một ô trắng và một ô đen  $\Rightarrow$  số sô ở ô đen không đổi.

Như vậy mọi trường hợp số sô ở ô đen chỉ tăng (hoặc giảm) 2 viên hoặc không đổi suy ra tổng số sô ở các ô đen luôn là số lẻ. Vậy không thể chuyển tất cả các viên sô trên bảng ô vuông về cùng một ô sau một số hữu hạn các phép thực hiện thao tác T.

**Ví dụ 6:** Một bảng ô vuông gồm 2019 hàng và 2020 cột. Ký hiệu ô ở hàng thứ  $m$  và cột thứ  $n$  là  $(m, n)$ . Người ta tô màu các ô của bảng theo cách sau: Lần thứ nhất tô màu 3 ô  $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$  với  $1 \leq r \leq 2017; 1 \leq s \leq 2019$ . Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa được tô màu liền nhau cùng hàng hoặc cùng cột. Hỏi bằng cách này có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho không?

### **Giải**

Ta ghi vào bảng các số tự nhiên theo cách sau: Từ trái sang phải, mỗi hàng ghi lần lượt các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Như vậy, 3 ô liền nhau trong cùng một hàng ghi 3 số tự nhiên liên tiếp, 3 ô liền nhau trong cùng một cột sẽ ghi 3 số tự nhiên giống nhau.

Ở lần tô màu thứ nhất, tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là  $s + s + 1 + s + 1 = 3s + 2$  ( $1 \leq s \leq 2019$ ) là một số chia cho 3 dư 2.

Từ lần tô màu thứ hai trở đi, mỗi lần tô tổng 3 ô ghi ở 3 ô được tô màu là một số chia hết cho 3 (vì 3 số tự nhiên liên tiếp hoặc 3 số tự nhiên giống nhau).

Do đó, sau mỗi lần tô màu theo quy luật trên thì các ô đã được tô có tổng các số ghi trên đó là số chia cho 3 dư 2.

Tổng số các số ghi trên bảng ban đầu là  $2019.(1 + 2 + 3 + \dots + 2020) = 2019.2021.1010$  chia hết cho 3. Vì vậy sau mỗi lần tô màu thì các ô còn lại (chưa tô) có tổng các số ghi trên đó là một số chia cho 3 dư 1 (tính bất biến). Vì vậy bằng mọi cách đều không thể tô màu được tất cả các ô vuông của hàng.

**Ví dụ 7:** Trên mặt bàn có 2005 đồng xu kích thước như nhau, mỗi đồng xu có hai mặt: một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, tất cả các đồng xu đều ngửa mặt xanh lên trên. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi phải đổi mặt 4 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2006 lượt chơi, có thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên được không? Vì sao?

*(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội, năm học 2005 – 2006)*

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

- **Trường hợp 1.** Nếu đổi 4 đồng xu mặt xanh thành 4 đồng xu mặt đỏ ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 4.
- **Trường hợp 2.** Nếu đổi 3 đồng xu mặt xanh, 1 đồng xu mặt đỏ thành 3 đồng xu mặt đỏ, 1 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 2.
- **Trường hợp 3.** Nếu đổi 2 đồng xu mặt xanh, 2 đồng xu mặt đỏ thành 2 đồng xu mặt đỏ, 2 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên không đổi.
- **Trường hợp 4.** Nếu đổi 1 đồng xu mặt xanh, 3 đồng xu mặt đỏ thành 1 đồng xu mặt đỏ, 3 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 2.
- **Trường hợp 5.** Nếu đổi 4 đồng xu mặt đỏ thành 4 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 4.

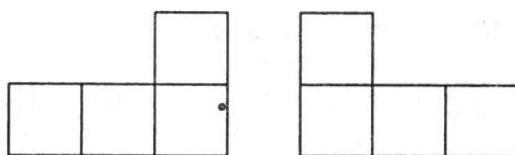
- Ta nhận thấy trong năm trường hợp thì đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng hoặc giảm đi số chẵn lần. Như vậy số đồng xu mặt xanh ngửa lên trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ và số đồng xu mặt đỏ ngửa lên luôn là số chẵn.

✓ *Trình bày lời giải.*

Không thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên trên. Vì thế mỗi lần thay đổi 4 đồng xu: có  $x$  đồng xu ngửa mặt xanh lên trên và có  $4 - x$  đồng xu ngửa mặt đỏ lên. Do đó số đồng xu ngửa mặt đỏ lên đã thay đổi là  $|4x - 2|$ , một số chẵn đồng xu. Nghĩa là số các đồng xu ngửa mặt xanh thành mặt đỏ không thay đổi tính chẵn lẻ. Ban đầu có 0 đồng xu ngửa mặt đỏ lên là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ là 2005 đồng xu ngửa mặt đỏ lên.

✓ **Nhận xét.** Vì tính chất bất biến là tính chẵn lẻ nên ta thay số 2005 thành một số lẻ bất kỳ và số 4 thành một số chẵn bất kỳ thì bài toán không thay đổi kết quả.

**Ví dụ 8:** Có thể phủ kín bảng  $20 \times 13$  ô vuông bằng các miếng lát có một trong hai dạng dưới (có thể xoay và sử dụng đồng thời cả hai dạng miếng lát) sao cho các miếng lát không chòem lên nhau không?



(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên TP Hải Phòng, năm học 2013 – 2014)

### **Giải**

Tô màu các dòng của bảng ô vuông bằng hai màu đen trắng xen kẽ: dòng 1 đen, dòng 2 trắng, dòng 3 đen, dòng 4 trắng,...

Khi đó mỗi miếng lát sẽ luôn phủ đúng 3 ô đen 1 ô trắng hoặc 3 ô trắng 1 ô đen.

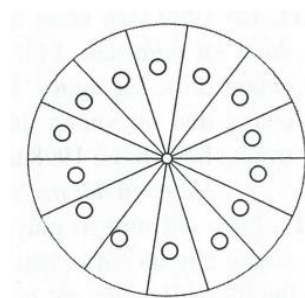
Trong bảng, số ô đen bằng số ô trắng nên số miếng lát phủ 3 ô đen 1 ô trắng bằng số miếng lát phủ 3 ô trắng 1 ô đen, do đó phải có chẵn miếng lát.

Tuy nhiên trong bảng có 65 miếng lát, mâu thuẫn. Vậy không thể được phủ được bằng thỏa mãn.

### **C. Bài tập vận dụng**

1. Trên bảng ghi một dãy số gồm 2019 số 1 và 2020 số 2. Ta thực hiện xóa hai số bất kỳ và thay bằng hiệu của chúng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi trên bảng có khi nào gồm toàn số 0 hay không?
2. Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong số tờ giấy nhỏ này lại được xé nhỏ thành 4 mảnh nhỏ nữa, ..., tiếp tục như vậy có khi nào được 2019 mảnh giấy hay không? Vì sao?
3. Có 2019 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 210 tách trong chúng được lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?

4. Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào cùng một hình quạt được không?



5. Ở sáu đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: mỗi lần chọn một cạnh bất kỳ rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh cạnh đó với cùng một số nguyên. Hỏi sau các lần thay đổi như thế thì sáu số mới ở đỉnh lục giác có bằng nhau không? Vì sao?
6. Trên hòn đảo có một loài thần lằn sinh sống, chúng có ba màu: xanh, đỏ, tím. Để lẫn trốn và săn mồi thì loài thần lằn này biến đổi màu như sau: nếu hai con thần lằn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Nếu hai con thần lằn cùng màu gặp nhau thì giữ nguyên màu. Có khi nào tất cả các con thần lằn trở thành cùng màu không? Vì sao?
7. Trên bảng ghi các số từ 1 đến 2020. Thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thay đồng thời tất cả các số có ở trên bảng bởi tổng các chữ số của nó. Hỏi nếu sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ gồm một chữ số thì có bao nhiêu số 1.
8. Có một bao đựng 150 hòn bi đen và 75 hòn bi trắng. Một người bốc từ bao ra mỗi lần hai hòn bi một cách ngẫu nhiên. Nếu anh ta bốc được một hòn đen và một hòn trắng, anh ta lại bỏ viên trắng vào bao, cất đi viên đen. Nếu anh ta bốc được 2 viên cùng màu, anh ta cất đi cả hai rồi bỏ lại vào bao một hòn đen (giả sử anh ta có nhiều hòn đen ở ngoài đủ để làm chuyện đó nếu cần). Quá trình lặp lại. Sau cùng còn đúng một viên bi trong bao, lý do tại sao? Viên bi đó màu gì?
9. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm được hay không?

*(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013-2014)*

10. Trong bảng ô vuông  $10 \times 10$ . Có thể sắp đặt 25 miếng bìa hình chữ nhật kích thước  $1 \times 4$  phủ kín toàn bộ bảng ô vuông hay không?

**11.** Có 1999 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong chúng được lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả chúng đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

*(Thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham gia IMO, năm học 2019, vòng 1)*

**12.** Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn nhỏ hay không? Vì sao?

*(Thi tuyển sinh lớn 10, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016-2017)*

1 Ban đầu có 2019 số 1 (số 1 là số lẻ)

- Nếu xóa hai số giống nhau, thay bằng hiệu của chúng thì số 1 giữ nguyên hoặc giảm đi 2 số nên số số 1 sau lần xóa vẫn là số lẻ.

- Nếu xóa hai số khác nhau (1 và 0) thay bằng hiệu của 2 số thì số 1 không đổi.

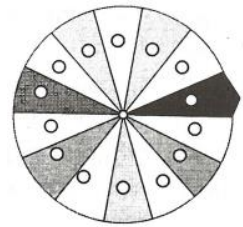
Như vậy sau mỗi lần xóa hai số bất kì thay bằng hiệu của chúng thì số số 1 vẫn là số lẻ nên không thể trên bảng còn toàn số 0 được.

2. Số mảnh giấy sau mỗi lần xé tăng thêm 3. Vậy ở lần xé thứ  $n$  thì số mảnh giấy là  $3n + 1$ . Mà  $2019 : 3$  dư 0. Suy ra không được.

3. Mỗi lần lật ngửa 210 tách: giả sử  $x$  tách ngửa và  $210 - x$  tách úp. Do đó mỗi lần thực hiện lật ngửa thì số tách ngửa thay đổi đi  $|210 - 2x|$ , một số chẵn. Ban đầu có 0 tách úp xuống là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ 2019 tách úp xuống được.

4 Ta tô màu như hình vẽ. Có 7 viên bi ở hình quạt đen và 7 viên bi ở hình quạt trắng.

Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kế với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau:



- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt khác màu, thì vẫn chuyển vào hai hình quạt khác màu. Do vậy số viên bi ở mỗi màu hình quạt là không đổi.

- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt màu trắng thì chuyển sang 2 hình quạt màu đen, suy ra số bi ở hình quạt màu đen tăng 2.

- Nếu lấy hai viên ở hình quạt màu đen thì chuyển sang 2 hình quạt màu trắng, suy ra số bi ở hình quạt màu đen giảm 2.

Do vậy sau mỗi lần thực hiện thì tổng số bi ở hình quạt màu đen vẫn là số lẻ nên không thể thực hiện được.

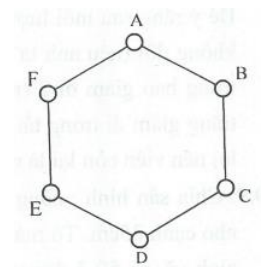
5. Kí hiệu các đỉnh theo chiều kim đồng hồ bởi các chữ cái A, B, C, D, E, F (như hình vẽ). Giả sử các số chẵn liên tiếp được ghi tương ứng với đỉnh này là  $a, b, c, d, e, f$ .

$$\text{Đặt } S = (b + d + f) - (a + c + e)$$

Nhận thấy hai số ghi hai đỉnh thuộc cùng một cạnh gồm một số trong các số  $b, d, f$  và một số trong các số  $a, c, e$ . Do đó khi cộng hai số này với cùng một số nguyên thì  $S$  không thay đổi.

Ban đầu  $a, b, c, d, e, f$  là các số chẵn liên tiếp nên  $S = 6$ . Vì vậy dù

có thực hiện bao nhiêu lần công việc cộng với cùng một số nguyên thì  $S$  vẫn bằng 6, tức là  $S$  khác 0, chứng tỏ không thể làm cho 6 số ở 6 đỉnh bằng nhau được.



6. Ta chứng minh rằng sau mỗi lần gặp nhau thì số dư cho 3 có đầy đủ 3 số dư là 0, 1, 2.

Nếu hai con khác màu gặp nhau thì đổi sang màu thứ 3 nên số dư chia cho 3 của các màu giảm 1, giảm 2 và tăng 2 nên có ba số dư là 1, 2, 0 vẫn đầy đủ.

Mặt khác, nếu tất cả đều về 1 màu thì số dư sẽ là 0, 0, 0. Điều này vô lý nên không thể có trường hợp tất cả các tắc kè có cùng màu.

**7. Định hướng:** Xét số dư chia cho 9 dư 1.

Ta biết rằng một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9. Do đó nếu thay đồng thời các số có ở trên bảng bởi các chữ số của nó thì số các số chia cho 9 dư 1 vẫn không đổi.

Muốn biết sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ có một chữ số có bao nhiêu số 1, chúng ta chỉ cần tìm xem từ 1 đến 2020 có bao nhiêu số chia cho 9 dư 1.

Các số chia cho 9 dư 1 là: 1; 10; 19; 28; 37; ...; 2017.

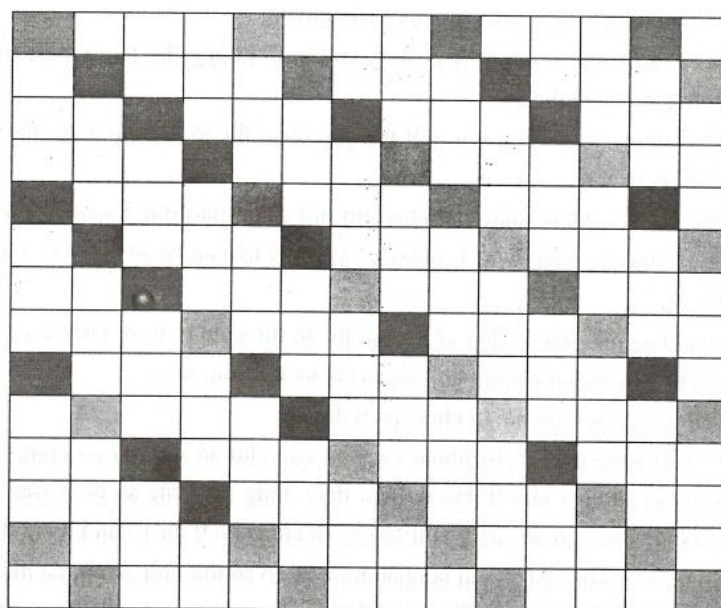
Số các số là:  $(2017 - 1) : 9 + 1 = 225$  (số)

Vậy trên bảng có 225 số 1.

**8.** Cứ mỗi lần rút ra hai viên là một lần bỏ lại một viên, do đó sau mỗi lần rút thì số bi trong bao giảm đi 1. Lúc đầu có 225 hòn bi, nên sau 224 lần bốc sẽ giảm đi 224 hòn bi và cuối cùng phải còn lại một viên trong bao.

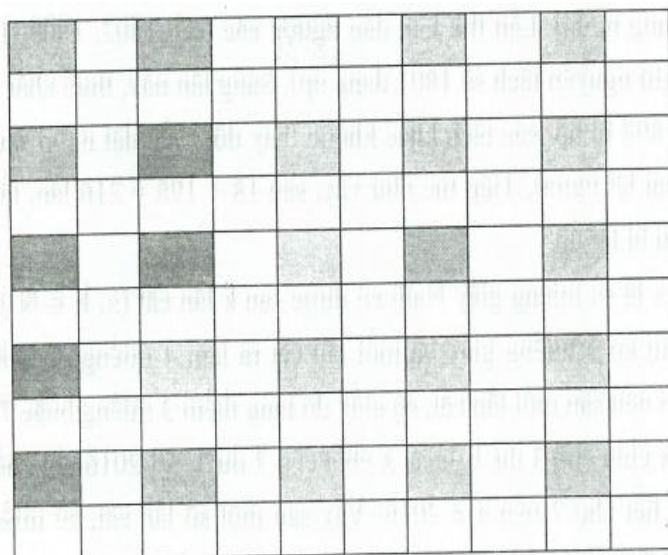
Để ý rằng sau mỗi lượt bốc ra rồi bỏ lại, thì hoặc là số bi trắng trong bao không đổi (nếu anh ta bốc được ít nhất một hòn đen) hoặc là số bi trắng trong bao giảm đi trong tất cả các lần là một số chẵn. Vì có 75 viên trắng (số lẻ) nên viên còn lại là màu trắng.

**9.** Chia sân hình vuông cạnh 3,5m thành  $14 \times 14 = 196$  hình vuông nhỏ cạnh 25cm. Tô màu đen vào các hình vuông nhỏ của hình vuông như hình vẽ, có 50 ô đen và 146 ô trắng. Mỗi viên gạch 25cm x 100cm được lát lên 1 ô đen và 3 ô trắng.



Giả sử lát kín được sân thì số ô trắng phải gấp 3 lần số ô đen. Nhưng  $146 \neq 50 \times 3$  nên không thể lát kín được.

**10.** Ta tô bảng vuông bằng màu đen và trắng sau cho như hình vẽ. Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng.



Ta chú ý đặt những hình chữ nhật trùng với các ô vuông thì mỗi hình chữ nhật sẽ phủ lên 2 ô vuông đen hoặc 0 ô vuông đen nào. Từ đó suy ra 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín số chẵn ô vuông đen. Mà trên bảng có 25 ô đen không phải là số chẵn, nên không phủ kín được.

**11.** Nếu có 1999 chiếc tách (số tách là số lẻ), tất cả đều được đặt ngửa (trạng thái ngửa) thì ta không thể quay úp xuống tất cả (trạng thái úp) được.

Thật vậy, theo quy tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có  $k$  tách đặt ngửa được làm úp xuống thì có  $100-k$  chiếc, vậy số tách úp bị thay đổi đi một số chẵn  $(100-k) - k = 100 - 2k$  (nếu  $k > 50$  thì số tách úp giảm đi, nếu  $k < 50$  thì số tách úp tăng lên, nếu  $k = 50$  thì số tách úp không thay đổi). Nghĩa là tính chẵn lẻ của số tách úp không thay đổi (bất biến!). Nhưng lúc đầu số tách úp ở trạng thái chẵn (bằng 0). Vì vậy không thể làm cho số tách úp bằng 1999 (trở về trạng thái lẻ) được.

Nếu số tách là 1998 thì có thể úp tất cả các tách. Một thuật toán như sau: Đánh số các tách theo thứ tự: 1, 2, 3, ..., 1998. Lần lượt úp 100 tách đầu tiên, sau 18 lần úp được 1800 tách chuyển từ trạng thái ngửa sang úp. Tiếp theo úp 100 tách số 1801, 1803, 1804, ..., 1901 (để nguyên tách số 1802 đang ngửa). Lần thứ hai, đảo ngược tách 1802, 1803, 1804, ..., 1901 (giữ nguyên tách số 1801 đang úp). Sang lần này, thực chất chỉ tách 1801, 1802 bị úp, các tách khác không thay đổi (vẫn đặt ngửa sau khi lật úp rồi lại lật ngửa). Tiếp tục như vậy, sau  $18 + 198 = 216$  lần, tất cả các tách đều bị lật úp.

**12.** Gọi  $x$  là số miếng giấy Nam có được sau  $k$  lần cắt ( $x, k \in \mathbb{N}^*$ ). Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn nên sau mỗi lần cắt, số giấy đó tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng. Do đó  $x$  chia cho 3 dư 1, hoặc  $x$  chia cho 7 dư 1. Vì 2016 chia hết cho 3 và chia hết cho 7 nên  $x \neq 2016$ . Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.

## Chủ đề 2. CÂU ĐÓ VÀ TRÒ CHƠI

### A. Một số ví dụ

**Ví dụ 1:** Trong một giải bóng đá, có 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (trong một trận đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, và đội thua được 0 điểm). Khi kết thúc giải, người ta thấy có 3 đội đạt được

## GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ – TRƯỜNG THCS TÂY HỒ

tổng số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm và 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại của giải có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao?

*(Tuyển sinh lớp 10, trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2016-2017)*

### **Giải**

Do có 4 đội tham dự nên mỗi đội đấu 3 trận. Theo đề bài đội 6 điểm thắng 2 trận và thua 1 trận, đội 5 điểm thắng 1 trận và hòa 2 trận, đội 1 điểm hòa 1 trận và thua 2 trận. Do đó đội còn lại phải có 1 trận hòa. Vì tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua nên đội còn lại phải thua 1 trận và thắng 1 trận. Tổng số điểm của đội còn lại là:  $1 + 0 + 3 = 4$  (điểm)

Có thể diễn giải như sau: Giả sử 4 đội bóng đá là A, B, C, D

+ A thắng C và D, thua B nên được 6 điểm.

+ B thắng A, hòa C và D nên được 5 điểm.

+ C thắng D, hòa B thua A nên được 4 điểm.

+ D hòa B, thua A và C nên được 1 điểm.

**Ví dụ 2:** Một tháng đặc biệt có tới năm ngày thứ 3, trong đó ngày đầu tiên và ngày cuối cùng của tháng không phải là thứ 3. Hỏi ngày cuối cùng của tháng đó là ngày nào?

### **Giải**

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy một tháng nhiều nhất có 31 ngày, nên nhiều nhất chỉ có 5 ngày thứ ba, khoảng cách giữa hai thứ ba liên tiếp là 7 ngày. Do đó chúng ta có thể tìm được ngày thứ ba đầu tiên trong tháng đó.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ngày 2 của tháng là thứ 3, suy ra năm ngày thứ ba là 2, 9, 16, 23, 30. Mà ngày cuối cùng của tháng không phải ngày thứ ba nên suy ra ngày cuối cùng của tháng là 31 ngày và là thứ tư.

**Ví dụ 3:** Có 2020 đồng xu được đánh số thứ tự từ 1 đến 2020, tất cả đều ngửa.

*Lần 1:* Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 1.

*Lần 2:* Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2.

*Lần 3:* Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 3.

.....

*Lần 2020:* Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2020.

Hỏi có bao nhiêu đồng xu ngửa sau lần lật thứ 2020?

### **Giải**

Tại lần lật thứ  $k$ , những đồng xu có số thứ tự là bội của  $k$  sẽ được lật. Để một đồng xu lúc đầu là ngửa, sau 2020 vòng lật nó vẫn ngửa thì số lần đồng xu đó được lật phải là một số chẵn, tức là số thứ tự của nó phải có số các ước số là chẵn.

Ta biết rằng những số chính phương mới có số các ước số là lẻ. Từ 1 đến 2020 có 44 số chính phương là: 1, 4, 9, ..., 1936.

Do đó cuối cùng sau 2020 vòng lật, số đồng xu ngửa là:  $2020 - 44 = 1976$  (đồng xu).

**Ví dụ 4:** Thiện và Ác chia nhau một đồng gồm 2000 đô-la bằng bạc (mỗi đồng trị giá một đô-la), dưới sự giám sát của lão Tà. Đầu tiên, lão Tà bảo Thiện chia thành hai đồng, mỗi đồng có ít nhất hai đồng. Sau đó Ác chia mỗi đồng thành hai đồng (mỗi đồng có ít nhất 1 đồng), rồi lão ta chọn đồng ít nhất và đồng nhiều nhất trong bốn đồng tạo thành, hai đồng còn lại phần của Thiện. Vậy thì, bất chấp lão Ác khôn khéo và tham lam như thế nào, số tiền ớn nhất mà lão Thiện có thể kiếm được là bao nhiêu?

**Giải**

Nếu đồng X gồm 2000 đồng đô-la được chia thành hai đồng M đồng và N đồng ( $X = M + N = 2000$ ) sao cho  $M > N$  rồi tiếp tục chia mỗi đồng thành hai đồng:  $M = a + b$  sao cho  $a > b$  và  $N = c + d$  sao cho  $c > d$  thì trong mọi trường hợp, tổng của đồng lớn nhất và đồng nhỏ nhất trong bốn đồng a, b, c, d (Kí hiệu là T) cũng không vượt quá M.

Nếu b nhỏ nhất thì hiển nhiên a lớn nhất.  $T = a + b = M$

Nếu d nhỏ nhất thì: hoặc c lớn nhất  $T = c + d = N < M$  hoặc a lớn nhất:  $T = a + d < M$ .

Vậy để nhận được số tiền lớn nhất thì đầu tiên lão Thiện phải chia 2000 đồng đô-la thành hai đồng bằng nhau ( $M = N$ ). Khi đó dù lão Ác chia thế nào thì cũng luôn nhận được 1000 đô-la, khi đó lão Thiện cũng nhận được 1000 đô-la.

**Ví dụ 5:** Trong một giải đấu vật có 100 người tham dự, tất cả có sức mạnh khác nhau. Người nào khỏe hơn luôn chiến thắng đối thủ yếu hơn. Mỗi đo vật đấu hai lần và người thắng cả hai trận sẽ được tặng thưởng. Hỏi số người ít nhất được tặng thưởng là bao nhiêu?

*(Kỳ thi Toán quốc tế giữa các thành phố ITOT, Mùa thu 2013, THCS mở rộng)*

**Giải**

Sắp xếp 100 đo vật theo sức mạnh tăng dần với  $a_1$  (người yếu nhất),  $a_2, a_3, \dots, a_{100}$  (người khỏe nhất) hiển nhiên  $a_{100}$  luôn là người chiến thắng.

Ở lượt thứ nhất ta xếp các đo vật thi đấu theo cặp như sau:  $a_{100}$  với  $a_{99}$ ,  $a_{98}$  với  $a_{97}; \dots; a_2$  với  $a_1$ . Khi đó  $a_1; a_3; \dots; a_{99}$  là những người thua cuộc.

Ở lượt thứ hai, ta xếp các cặp  $a_{100}$  với  $a_1$ ;  $a_{99}$  với  $a_{98}; \dots; a_3$  với  $a_2$ . Khi đó  $a_1; a_2; a_4; a_6; \dots; a_{98}$  là những người thua cuộc. Do đó chỉ có duy nhất  $a_{100}$  là người thắng cả hai vòng đấu.

**Ví dụ 6:** Nhà trường tổ chức một ngày hội chợ cho học sinh. Trong đó, có trò chơi đoán xem có bao nhiêu viên cẩm thạch đựng trong một lọ kín. Giải thưởng sẽ trao cho ai đoán gần chính xác nhất vào cuối ngày hội chợ. Kết quả là:

- Giải nhất: Đức Trọng, dự đoán 125 viên.
- Giải nhì: Minh Hạnh, dự đoán 140 viên.
- Giải ba: Trọng Nhân, dự đoán 142 viên.
- Giải tư: Đức Minh, dự đoán 121 viên.

Hỏi chính xác trong lọ có bao nhiêu viên cẩm thạch.

**Giải**

Nếu gọi số viên cảm thạch trong lọ là  $x$  thì  $125 \leq x \leq 140$ .

Vì người dự đoán số 125 đạt giải nhất và người dự đoán 140 đạt giải nhì nên suy ra

$$x - 125 < 140 - x \Rightarrow 125 \leq x \leq 132.$$

Vì người dự đoán số 142 đạt giải ba và người dự đoán số 121 đạt giải tư nên

$$142 - x < x - 121 \Rightarrow 132 \leq x \leq 132 \Rightarrow x = 132.$$

Vậy trong lọ có chính xác 132 viên cảm thạch.

## **B. Bài tập vận dụng**

**1** Bốn đội bóng A, B, C, D được xếp cùng một hàng. Mỗi đội chơi 1 trận, lần lượt với các đội còn lại. Mỗi trận thắng được 3 điểm, hòa được 1 điểm, thua 0 điểm. Sau tất cả các trận đấu, kết quả như sau:

(1). Tổng số điểm 3 trận của mỗi đội là các số lẻ liên tiếp.

(2). Đội D cao điểm nhất.

(3). Đội A hòa đúng 2 trận, trong đó hòa một trận với C. Tính điểm của mỗi đội.

**2** Cho hình vuông  $5 \times 5$  gồm 25 ô vuông nhỏ. Hỏi phải tô ít nhất bao nhiêu ô sao cho trong mỗi hình vuông  $3 \times 3$  bất kì có đúng 4 ô được tô.

**3** Sửu chỉ nói thật vào thứ 2, thứ 4, thứ 6 và chủ nhật. Dần chỉ nói thật vào ngày thứ 2, thứ 3, thứ 4 và thứ 5. Hãy tìm ngày mà cả hai đều nói: “Hôm qua, Tôi đã nói dối”.

**4** Trên một bàn cờ  $15 \times 15$  ô vuông gồm các ô trắng đen xen kẽ như cờ vua, có 15 quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau (không ăn được nhau). Giả sử sau đó, mỗi quân xe này bị xô dịch theo một bước đi của quân mã. Chứng minh rằng khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối đầu nhau.

## **5. Ai đã lấy thanh kẹo?**

Ở trường nội trú, trong giờ ăn trưa, từ phòng cô Hằng ra, năm cậu bé ghé đến một quầy ăn trưa bên cạnh đó. Một trong năm cậu đã lấy một thanh kẹo mà không trả tiền. Khi bị thấy hiệu trưởng chất vấn, năm cậu bé trả lời như sau:

1) An : “Không phải Cường lấy, cũng không phải em”

2) Bình : “Theo em, An hoặc Chi đã lấy”

3) Chi : “Cả An và Bình đều nói dối”

4) Dũng : “Chi nói không đúng, một trong hai người kia nói dối, người còn lại nói sự thật”

5) Cường: “Tất cả những gì Dũng nói đều sai cả”

Khi thấy hiệu trưởng hỏi ý kiến cô Hằng, cô trả lời: “Trong năm cậu ấy, có 3 cậu luôn luôn trung thực, hai cậu còn lại thì luôn dối trá”.

Giả sử có Hằng nói đúng, bạn hãy xác định xem ai là người đã lấy thanh kẹo?

**6.** Trong một giải bóng đá có  $N$  đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được 1 điểm. Các đội được xếp hạng dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ.

Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng  $N \geq 7$

b) Tìm  $N$  và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

7. Trong một giải cờ vua có 8 kì thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được  $\frac{1}{2}$  điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kì thủ nhận được các số

điểm khác nhau và kì thủ xếp thứ hai có số điểm bằng tổng điểm của 4 kì thủ xếp hạng cuối cùng. Hỏi ván đấu giữa kì thủ xếp thứ tư và kì thủ xếp thứ năm đã kết thúc với kết quả như thế nào?

8. Một đảo nằm xa tít ngoài biển khơi có tên là đảo “Thiên mã”. Trên hòn đảo này có hai bộ tộc đang sinh sống. Một bộ tộc có tên là Kị sĩ và bộ tộc kia làm nghề Ăn trộm. Tất nhiên bộ tộc Kị sĩ thì luôn nói thật và bộ tộc Ăn trộm thì luôn nói dối.

Dưới bóng cây có hai thổ dân đang ngồi nghỉ. Một du khách đi đến và hỏi một trong hai người

a) Ngài là Kị sĩ hay Ăn trộm ngựa?

A:.....

Không thể hiểu người đó nói gì, vì thế du khách quay sang hỏi người kia, xem người lúc trước nói gì?

B: Ông ta nói rằng ông ta là người Ăn trộm ngựa.

Vậy A và B là gì nhỉ?

9. Có 10 đồng tiền xu thật có khối lượng giống nhau, cùng một đồng tiền xu giả có khối lượng nặng hơn khối lượng đồng tiền xu thật và một đồng xu giả khác có khối lượng bé hơn khối lượng đồng xu thật. Hãy giải thích tại sao chỉ bốn lần cân đĩa bằng cân thăng bằng bạn có thể xác định được tổng khối lượng của hai đồng tiền xu giả lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn tổng khối lượng của hai đồng xu thật.

*(Thi Toán quốc tế IMC 2014. THCS Đồng Đội Canada đề nghị)*

10. Cho bảng vuông với các số như sau: Có thể điền các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 vào các ô còn trống để tạo thành một hình vuông kì diệu hay không? (Hình vuông kì diệu có tổng các số trên mỗi hàng, cột, đường chéo bằng nhau).

*(Cuộc thi của Hội toán học Xcot-len, năm 2017-2018)*

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 4 | 2 | 4 |
| 1 |   |   |   | 2 |
| 4 |   |   |   | 2 |
| 4 |   |   |   | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 5 | 2 |

11. Cho ba đồng đá gồm 51, 49 và 5 hòn. Có hai thao tác được thực hiện là: dồn hai đồng tùy ý thành một đồng; chọn đồng tùy ý có số chẵn hòn đá để phân làm hai đồng có số lượng hòn đá bằng nhau. Có thể nào cuối cùng sẽ nhận được 105 đồng mà mỗi đồng chỉ có một hòn, sau một dãy các thao tác luân phiên nhau?

*(Cuộc thi Toán học Quốc tế của các tỉnh thành, THCS, mùa xuân 2010)*

**HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ**

1. Điểm của 4 đội có thể là (1, 3, 5, 7) hoặc (3, 5, 7, 9). Do không thể có hai đội có 7 điểm và 9 điểm nên bộ điểm là (1, 3, 5, 7). Đội D có điểm cao nhất nên điểm của D là 7 nên đội D thắng 2 trận, hòa 1 trận. Đội A không thua trận 3, bởi nếu thua thì số điểm là số chẵn, suy ra D hòa với A và thắng đội B và đội C. Đội A có 2 trận hòa với D và C, thắng B nên điểm của A là 5 điểm.

Đội B thắng C thua A và D nên được 3 điểm.

Đội C hòa với A, thua B và D được 1 điểm.

Vậy Đội A: 5 điểm; Đội B: 3 điểm; Đội C: 1 điểm; Đội D: 7 điểm.

2. Giả sử hình vuông  $6 \times 6$  được tô màu một số ô sao cho trong mỗi hình vuông  $3 \times 3$  bất kì có đúng 4 ô được tô.

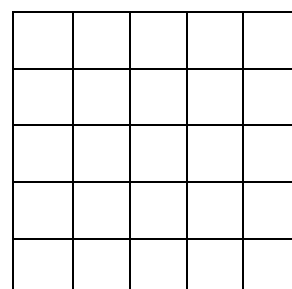
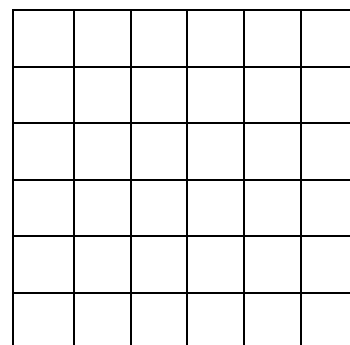
Hình vuông  $6 \times 6$  được chia thành 4 hình vuông  $3 \times 3$  nên trong 36 ô vuông nhỏ có đúng 16 ô được tô.

Để số ô được tô màu trong hình vuông  $5 \times 4$  là ít nhất thì phải nhiều ô nhất có thể ở 11 ô vuông nhỏ phía ngoài.

Để ý rằng cột 3 và cột 6 sẽ tô màu giống nhau, hàng 3 và hàng 6 tô màu giống nhau và ô trung tâm sẽ giống ô ở góc dưới, do đó ta có thể tô màu cho nhiều nhất 9 ô trong 11 ô phía ngoài (ví dụ như hình trên).

Vậy cần tô ít nhất  $16 - 9 = 7$  ô.

Ví dụ 1 cách tô màu;



3. Nếu hôm nay Dần nói thật thì hôm qua Dần nói dối, vậy hôm nay là thứ Hai. Sửu nói thật vào thứ Hai và cả Chủ nhật do đó vào thứ Hai, Sửu sẽ phải nói “Hôm qua tôi đã nói thật”. Như vậy hôm nay Dần nói dối, và hôm qua Dần nói thật. Suy ra hôm nay là thứ Sáu. Thứ Sáu là ngày Sửu nói thật và thứ Năm là ngày Sửu nói dối, vậy vào thứ Sáu, Sửu cũng sẽ nói “Hôm qua tôi đã nói dối”.

4. Đánh số các hàng và cột của bàn cờ từ 1 đến 15, khi đó, mỗi quân xe được xác định ở vị trí hàng  $i$ , cột  $j$  bởi cặp  $(i, j)$  với  $1 \leq i, j \leq 15$ . Vì ban đầu các quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau nên không thể có hai quân xe nằm cùng một hàng hoặc một cột. Nói cách khác, chỉ số hàng (cột) của các quân xe phải khác nhau. Từ 1 đến 15 có 8 số lẻ và 7 số chẵn. Mỗi khi một quân xe di chuyển theo một bước đi của quân mã, nó làm tăng (hoặc giảm) chỉ số hàng là một đơn vị và chỉ số cột là hai đơn vị (hoặc ngược lại). Như thế, 15 số trong 30 số đó bảo toàn tính chẵn lẻ. Từ đó, sau khi mỗi quân xe đều di chuyển theo một bước đi của quân mã thì không thể có 16 số lẻ và 14 số chẵn nữa. Điều này có nghĩa rằng, khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối nhau.

5. Vì có 3 câu luôn luôn trung thực nên câu trả lời của 3 câu đó sẽ không mâu thuẫn với nhau, nói cách khác, với người nói thật thì câu trả lời sẽ không mâu thuẫn với ít nhất hai câu trả lời của người khác. Từ

nhận xét trên, chúng ta suy luận ngay được An, Bình và Cường là những người luôn nói thật còn Chi và Dũng là những người luôn nói dối.

Dựa vào các câu trả lời của An và Bình, suy ra Chi là người lấy kẹo.

**6.**

a) Đội xếp nhất 15 điểm nên thi đấu ít nhất với 5 đội khác nhau  $\Rightarrow N \geq 5+1$

Nếu  $N = 6$  thì đội xếp thứ nhất thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội xếp nhất.

Đội xếp ba thua đội xếp nhất và nhì nên số điểm tối đa là  $3.3 = 9$ .

Theo đầu bài đội ba 12 điểm: vô lí

Do vậy  $N \geq 7$ .

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12. Vì không có hòa nên số điểm các đội còn lại là bội của 3.

Số điểm của các đội còn lại có thể là: 0, 3, 6, 9, 12.

Do đó  $N \leq 5+3$  vì  $N \geq 7$  (câu a)

Nên  $N = 7$  hoặc  $N = 8$

- Xét  $N = 8$ .

Có 8 đội nên số trận đấu có  $\frac{8.7}{2} = 28$  trận. Tổng số điểm 8 đội đạt là 28.3 là số chẵn.

Còn  $0+3+6+9+12+12+12+15$  là số lẻ: vô lí. Vậy nên  $N \neq 8$

- Xét  $N = 7$ .

Có 7 đội nên số trận đấu có  $\frac{7.6}{2} = 21$  trận.

Tổng số điểm 7 đội đạt  $21.3 = 63$  điểm. Tổng số điểm các đội còn lại đạt được là:  $63 - (12 + 12 + 15) = 24$  điểm.

$$24 = 0 + 3 + 9 + 12$$

Số 24 biểu diễn thành tổng 4 số là bội của 3 và khác nhau chỉ duy nhất theo cách biểu diễn trên.

Tổng số điểm mỗi đội còn lại đạt được lần lượt là 0, 3, 9, 12.

**7.** Sau khi giải kết thúc, số ván cờ đã thi đấu giữa 4 kỳ thủ xếp cuối cùng là:  $\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$ .

Sau mỗi ván tổng số điểm của hai kỳ thủ nhận được là 1. Vì thế tổng số điểm của 4 kỳ thủ xếp cuối cùng không ít hơn 6 điểm. Nếu  $s \geq 6,5$  thì tổng số điểm của kỳ thủ xếp thứ hai là  $s \geq 6,5$

Do 8 kỳ thủ được các số điểm khác nhau nên dễ thấy kỳ thủ xếp thứ nhất có điểm số không ít hơn  $s + 0,5 \geq 7$ .

Do kỳ thủ xếp thứ nhất đấu 8 trận nên điều này chỉ xảy ra khi  $s + 0,5 = 7 \Leftrightarrow s = 6,5$  và kỳ thủ xếp thứ nhất thắng cả 7 ván. Suy ra kỳ thủ xếp thứ hai thắng không quá 6 ván và số điểm  $\leq 6 < s$ : vô lí.

Vậy ta phải có  $s = 6$ . Điều này có nghĩa là các kỳ thủ xếp từ năm đến tám chỉ giành điểm khi thi đấu với nhau thôi, ngoài ra thua tất cả các kỳ thủ khác. Do vậy, kỳ thủ xếp thứ tư đã thắng kỳ thủ xếp thứ năm trong trận đấu trực tiếp.

**8.** A chỉ có thể trả lời một cách rằng anh ta là Kị sĩ, bất kể anh ta là gì. Vì thế B đã nói dối. Suy ra B là Ăn trộm ngựa. Chúng ta không có thông tin chính xác về A.

**9.** Ta chia các đồng xu đã cho thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 3 đồng xu và đem cân từng nhóm đồng xu như sau: Cho A và B lên hai đĩa cân (lần cân thứ nhất); C và D lên hai đĩa cân (lần cân thứ hai). Ta xét 3 trường hợp.

+ *Trường hợp 1.* Cả hai lần cân đều thăng bằng. Khi đó, đồng xu giả ở cùng một nhóm và tổng khối lượng hai đồng xu bằng tổng khối lượng hai đồng xu giả.

+ *Trường hợp 2.* Một trong hai lần cân thăng bằng. Chỉ có hai nhóm đồng xu có khối lượng bằng nhau. Giả sử hai nhóm A và B có tổng khối lượng bằng nhau, tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm C lớn hơn tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm D. Khi đó cả hai đồng xu giả đều thuộc nhóm A và B với tổng khối lượng các đồng xu trong hai nhóm C và D. Từ đó ta sẽ có câu trả lời.

+ *Trường hợp 3.* Cả hai lần cân thứ nhất và thứ hai đều không thăng bằng.

Do đối xứng, ta có thể giả sử nhóm A có trọng lượng nặng hơn nhóm B và nhóm C có trọng lượng nặng hơn nhóm D. Khi đó đồng xu giả nặng hơn ở nhóm A và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm D; hoặc đồng xu giả nặng hơn ở nhóm C và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm B. Nếu nhóm A toàn đồng xu thật thì B chứa đồng xu giả nhẹ hơn, khi đó C chứa đồng xu giả nặng hơn. Nếu nhóm A chứa đồng xu giả nặng hơn thì B phải chứa hoàn toàn đồng xu thật (vì nếu B chứa đồng xu giả nhẹ hơn thì nhóm C có trọng lượng bằng nhóm D là vô lý). Khi đó D chứa đồng xu giả nhẹ hơn. Do đó nhóm A và D cùng chứa đồng xu giả hoặc cùng không chứa đồng xu giả. Nếu nhóm A có trọng lượng nhẹ hơn nhóm C thì đồng xu giả nặng hơn ở C và đồng xu giả nhẹ hơn ở B. Cuối cùng ta chỉ cần cân nhóm A và D với nhóm B và C thì được kết quả.

**10.** Giả sử ta điền được các số 1, 2, 3, 4, 5 để có hình vuông kì diệu:

Từ đó ta có:

$$4 + a + e + 1 + 2 = 15 \Rightarrow a + e + 1 = 9;$$

$$4 + b + e + h + 3 = 15 \Rightarrow b + e + h = 8;$$

$$2 + g + e + c + 4 = 15 \Rightarrow g + e + c = 9;$$

$$4 + d + e + f + 2 = 15 \Rightarrow d + e + f = 9;$$

$$\text{Suy ra: } (a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 35$$

Mặt khác, cộng ba hàng ở giữa của hình vuông, ta được:

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 18 = 45$$

$$\text{Vì vậy: } 3e = 8 \Rightarrow e \neq 1; 2; 3; 4; 5$$

Kết luận: Không thể có hình vuông kì diệu thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

**11.** Do cả ba đồng 51, 49 và 5 hòn đều có số lẻ các hòn đá nên thao tác đầu tiên phải là: dồn hai đồng thành một.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 4 | 2 | 4 |
| 1 | a | b | c | 2 |
| 4 | d | e | f | 2 |
| 4 | g | h | i | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 5 | 2 |

Nếu ban đầu dồn hai đồng 5 và 49 hòn thành một, ta sẽ có hai đồng 51 và 54 hòn đều có số hòn là bội của 3. Từ lúc này trở đi, khi luân phiên thực hiện các thao tác, dễ thấy mỗi đồng luôn là bội của 3.

Tương tự: Nếu ban đầu dồn hai đồng 49 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đồng luôn là bội của 5;

Nếu ban đầu dồn hai đồng 5 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đồng luôn là bội của 7.

Vậy ta không thể thực hiện được yêu cầu của đề bài.