

PHẦN I. TRONG TÂM HSG CẦN ĐẠT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x , kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0 trên trục số.

- Ta có: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$
- Với mọi $x \in \mathbb{Q}$, ta luôn có: $|x| \geq 0; |x| = |-x|; |x| \geq x$.

2. Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm x , biết:

a) $1,74 - |3,5 - x| = 1,24$; b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88$;

c) $|3,54x - 2| = -1,6$; d) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \frac{4}{5}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta lưu ý:

- $|A| = m > 0$ thì $A = m$ hoặc $A = -m$.
- $|A| = 0$ thì $A = 0$.
- $|A| = m < 0$ thì không tồn tại.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $1,74 - |3,5 - x| = 1,24 \Leftrightarrow |3,5 - x| = 0,5$

suy ra $3,5 - x = 0,5$ hoặc $3,5 - x = -0,5$

do đó $x \in 3; 4$.

b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88 \Leftrightarrow |2x - 5| = 2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 2$ hoặc $2x - 5 = -2$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{7}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$

c) $|3,54x - 2| = -1,6 < 0$ suy ra không tồn tại x .

d) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \frac{4}{5}$ hoặc $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = -\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{31}{20}$ hoặc $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{20}$.

- Trường hợp 1. $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{31}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{31}{20}$ hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{31}{20}$

$$x = \frac{53}{30} \text{ hoặc } x = -\frac{133}{30}$$

- Trường hợp 2. $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{20} \text{ hoặc } \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{20}$

$$x = -\frac{37}{30} \text{ hoặc } x = -\frac{43}{30}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{53}{30}; -\frac{133}{30}; -\frac{43}{30}; -\frac{37}{30} \right\}$.

Ví dụ 2. Tìm $x; y; z$ thỏa mãn:

a) $|3x+9|+|5y-7|=0$; b) $\left| x-1\frac{2}{3} \right| + \left| 4y+\frac{5}{6} \right| + \left| 3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z \right| = 0$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm $x; y$ mà tổng các giá trị tuyệt đối bằng 0 ta lưu ý:

$$|A|+|B|=0 \text{ thì } A=0 \text{ và } B=0.$$

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có $|3x+9| \geq 0; |5y-7| \geq 0$ nên từ $|3x+9|+|5y-7|=0$

suy ra $|3x+9|=0$ và $|5y-7|=0 \Rightarrow 3x+9=0$ và $5y-7=0$

suy ra $x=-3; y=\frac{7}{5}$.

b) Ta có $\left| x-1\frac{2}{3} \right| \geq 0; \left| 4y+\frac{5}{6} \right| \geq 0; \left| 3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z \right| \geq 0;$

nên từ $\left| x-1\frac{2}{3} \right| + \left| 4y+\frac{5}{6} \right| + \left| 3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z \right| = 0$

suy ra $\left| x-1\frac{2}{3} \right| = 0; \left| 4y+\frac{5}{6} \right| = 0; \left| 3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z \right| = 0$

do đó: $x=1\frac{2}{3}; y=-\frac{5}{24}; z=6\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm x , biết: $\left| x+\frac{1}{2021} \right| + \left| x+\frac{2}{2021} \right| + \left| x+\frac{3}{2021} \right| + \dots + \left| x+\frac{2020}{2021} \right| = 2021x$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đối với dạng toán $|A x| + |B x| + \dots + |C x| = D x$ (1), chúng ta nhận thấy rằng vế trái là tổng các giá trị tuyệt đối. Do vậy có điều kiện: $D x \geq 0$ từ đó chúng ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối. Khi đó (1) trở thành: $A x + B x + \dots + C x = D x$. Và lời giải trở nên đơn giản.

✓ *Trình bày lời giải.*

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Leftrightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Leftrightarrow 2020x + \frac{2020 \cdot 2021}{2 \cdot 2021} = 2021x \Leftrightarrow x = 1010$$

Ví dụ 4. Tìm x , biết:

a) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \right|;$

b) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| = 0$

Giải

✓ Tìm cách giải. Chúng ta biết rằng hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau và ngược lại. Do vậy giải dạng toán này, chúng ta lưu ý: $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$.

✓ Trình bày lời giải.

a) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$ hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}$

- Trường hợp 1. Giải $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{4}x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

- Trường hợp 2. Giải:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{6}{5} \right\}$

b) $\left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{7}{8}x - \frac{8}{9} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x - \frac{8}{9}$

hoặc $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = -\frac{7}{8}x + \frac{8}{9}$

- Trường hợp 1. Giải $\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}x - \frac{8}{9}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{7}{8}x = -\frac{8}{9} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{-3}{8}x = \frac{-31}{18} \Leftrightarrow x = \frac{124}{27}$$

- Trường hợp 2. Giải:

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = -\frac{7}{8}x + \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x = \frac{8}{9} - \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{8}x = \frac{1}{18} \Leftrightarrow x = \frac{4}{99}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{124}{27}; \frac{4}{99} \right\}$

Ví dụ 5. Tìm x biết:

a) $|3x-5|+|3x+1|=6$;

b) $|x+1|+|2x-3|=|3x-2|$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để giải dạng toán tổng giá trị tuyệt đối, chúng ta có thể:

- *Hướng 1.* Xét dấu, bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- *Hướng 2.* Vận dụng bất đẳng thức $|A| \geq A$, dấu bằng xảy ra khi $A \geq 0$.
- *Hướng 3.* Vận dụng bất đẳng thức $|A|+|B| \geq |A+B|$, dấu bằng xảy ra khi $AB \geq 0$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $|3x-5|=|5-3x| \geq 5-3x$; $|3x+1| \geq 3x+1$ nên

$$|3x-5|+|3x+1| \geq 5-3x+3x+1=6$$

Do vậy dấu bằng chỉ xảy ra khi $5-3x \geq 0$ và $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}; x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

b) Ta có: $|x+1|+|2x-3| \geq |x+1+2x-3|=|3x-2|$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi

$$x+1 \geq 0 \text{ và } 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \text{ hoặc } x \geq \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=|x-2019|+|x-2020|+|y-2021|+|x-2022|+2016$$

Giải

Ta có: $|x-2019| \geq x-2019$; $|x-2022|=|2022-x| \geq 2022-x$

Suy ra $|x-2019|+|2022-x| \geq x-2019+2022-x=3$

Mặt khác, ta có: $|x-2020| \geq 0$; $|y-2021| \geq 0$

Suy ra: $A \geq 2016+3=2019$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2019 khi $x=2020$; $y=2021$

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính một cách hợp lí.

$$A = \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} + \frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25};$$

$$B = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{13}}{\frac{2}{3}-\frac{2}{7}-\frac{2}{13}} \times \frac{\frac{1}{3}-0,25+0,2}{1\frac{1}{6}-0,875+0,7} + \frac{6}{7}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi thực hiện các phép tính có biểu thức chứa các số thập phân và phân số, ta nên viết chúng dưới dạng phân số rồi thực hiện các phép tính. Quan sát kĩ sau khi viết dưới dạng

phân số, ta thấy có những phần giống nhau cả số và dấu vì vậy ta nên vận dụng tính chất phân phối

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = k \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ để rút gọn.}$$

✓ *Trình bày lời giải*

$$A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$A = \frac{3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)}{-5 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)} + \frac{3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}$$

$$A = \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

$$B = \frac{1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right)}{2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right)} \times \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} + \frac{6}{7}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \frac{2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \right)}{7 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \right)} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$$

Ví dụ 8. Tính bằng cách hợp lí:

a) $-4,135 + [-21,5 + +4,135];$

b) $+45,13 + [+7,87 + -2110];$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tính tổng các số thập phân ta có thể vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp để tính hợp lí hơn.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $-4,135 + +4,135 + -21,5 = -21,5;$

b) $+45,13 + +7,87 + -2110 = 53 + -2110 = -2057$

C. Bài tập vận dụng

1. Tìm x , biết:

a) $6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2;$

b) $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2};$

c) $\frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3;$

d) $\frac{21}{5} + 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = 6.$

2. Tìm x , biết:

a) $\left|2x-1\right|+\frac{1}{2}=\frac{3}{4};$

b) $\left|x^2+3\right|x-\frac{1}{2}\left\| =x^2+3.$

3. Tìm x , biết:

a) $\left|\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|=|4x-1|;$

c) $\left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|-\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|=0;$

b) $\left|\frac{7}{5}x+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\right|;$

d) $\left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{1}{2}x+5\right|=0.$

4. Tìm x, y thỏa mãn:

a) $\left|5-\frac{2}{3}x\right|+\left|\frac{2}{3}y-4\right|=0;$

b) $\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right|+\left|1,5-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y\right|=0$

c) $|x-2020|+|y-2021|=0$

d) $|x-y|+\left|y+\frac{21}{10}\right|=0$

5. Tìm x , biết:

a) $\left|x+\frac{1}{1.2}\right|+\left|x+\frac{1}{2.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.4}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{2019.2020}\right|=2020x;$

b) $\left|x+\frac{1}{1.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.5}\right|+\left|x+\frac{1}{5.7}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{197.199}\right|=100x;$

c) $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x.$

6. Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|x+4|+|y-2|=3;$

b) $|2x+1|+|y-1|=4.$

c) $|3x|+|y+5|=5;$

d) $|5x|+|2y+3|=7.$

7. Tìm x , biết:

a) $|x+5|+|4-x|=9;$

b) $\left|x-\frac{2}{3}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{12};$

c) $2|x-3|+|2x+5|=11;$

d) $|x-3|+|5-x|+2|x-4|=2.$

8. Tìm cặp (x, y) thỏa mãn: $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3.$

9. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $2-x \quad x+1 =|y+1|;$

b) $x+3 \quad 1-x =|y|;$

c) $x-2 \quad 5-x =|2y+1|+2.$

10. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|x-5|+|1-x|=\frac{12}{|y+1|+3};$

b) $|x-2y-1|+5=\frac{10}{|y-4|+2};$

c) $|x+3|+|x-1|=\frac{16}{|y-2|+|y+2|};$

d) $|x-1|+|3-x|=\frac{6}{|y+3|+3}.$

11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{2}{3} + \left| \frac{3}{4} - x \right|;$

b) $B = \left| x + \frac{5}{6} \right| - \frac{21}{10};$

c) $C = \frac{11}{12} + \left| \frac{9}{10} - x \right|;$

d) $D = \left| 3x + \frac{9}{10} \right| - \frac{73}{79};$

e) $E = |4x - 3| + \left| 5y + \frac{15}{16} \right| + \frac{21}{10}$

12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$

13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 1000| + |2x - 2020|$ với x là số nguyên.

14. Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(0,34 - \frac{1}{25}\right) : \frac{5}{2}}{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right)} - 1,2 \cdot 0,35 : \left(\frac{-4}{5}\right).$

15. Thực hiện phép tính

a) $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7;$

b) $5,4 - 1,5 - 7,2 - 1.$

16. Tìm x , biết:

a) $\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{5} = \left|\frac{1}{2} - \frac{7}{10}\right| - \frac{3}{4};$

b) $\frac{5}{6} - \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8} - x\right) = 10 - \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|.$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

$$1. a) 6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 4,5 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ x = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{6}; -\frac{5}{6} \right\}$$

$$b) \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{1}{5} = 2 \\ 4x - \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{20} \\ x = -\frac{9}{20} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{11}{20}; -\frac{9}{20} \right\}$$

$$c) \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{17}{6} \\ \frac{3}{4}x = -\frac{23}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{34}{9} \\ x = -\frac{46}{9} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{34}{9}; -\frac{46}{9} \right\}$$

$$d) 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ \frac{x}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{7}{3} \\ \frac{x}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{3} \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{28}{3}; -4 \right\}$$

2.

$$a) \left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left| 2x - 1 \right| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ (vì } |2x - 1| + \frac{1}{2} > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left| 2x - 1 \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{1}{4} \\ 2x - 1 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5}{4} \\ 2x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{5}{8}; \frac{3}{8} \right\}$

b) $x^2 + 3 > 0$, nên suy ra: $x^2 + 3 \left| x - \frac{1}{2} \right| = x^2 + 3$

$$\Leftrightarrow 3 \left| x - \frac{1}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 1 \\ x - \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$

3.

a) $\left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x - 1|$

✓ Trường hợp 1. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 4x - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4x = -1 - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

✓ Trường hợp 2. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 1 - 4x$

$$\frac{11x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{11}. \text{ Vậy } S = \left\{ \frac{1}{11}; \frac{3}{5} \right\}$$

b) $\left| \frac{7}{5}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{5}x - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{5}x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{45}{44}$$

Trường hợp 2. $\frac{7}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{5}x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$$\frac{31}{15}x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{124}$$

Vậy $S = \left\{ -\frac{45}{44}; -\frac{15}{124} \right\}$

c) $\left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| = \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right|$

Trường hợp 1. $\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x - \frac{5}{8}x = \frac{3}{5} + \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8}x = \frac{41}{10} \Leftrightarrow x = \frac{164}{25}$$

Trường hợp 2. $\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} = -\frac{5}{8}x - \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}x = -\frac{3}{5} + \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{8}x = \frac{29}{10} \Leftrightarrow x = \frac{116}{75}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{164}{25}; -\frac{116}{75} \right\}$

d) $\left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{1}{2}x + 5 \right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \Leftrightarrow \frac{7}{8}x - \frac{1}{2}x = 5 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{100}{9}$

Trường hợp 2. $\frac{7}{8}x + \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}x - 5 \Leftrightarrow \frac{7}{8}x + \frac{1}{2}x = -5 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{280}{66}$

Vậy $S = \left\{ \frac{100}{9}; -\frac{280}{66} \right\}$

4.

a) Vì $\left| 5 - \frac{2}{3}x \right| \geq 0; \left| \frac{2}{3}y - 4 \right| \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$5 - \frac{2}{3}x = 0; \frac{2}{3}y - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 5, \frac{2}{3}y = 4 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}, y = 6$$

Vậy $x; y = \left(\frac{15}{2}; 6 \right)$

b) $\left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \right| + \left| 1,5 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x \right| + \left| \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| = 0$

Vì $\left| \frac{1}{6} + \frac{3}{4}x \right| \geq 0, \left| \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y \right| \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4}x = 0; \frac{3}{4} - \frac{3}{2}y = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -\frac{1}{6}, \frac{3}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}; y = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } x; y = \left(-\frac{2}{9}; \frac{1}{2} \right)$$

c) Vì $|x - 2020| \geq 0, |y - 2021| \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$x - 2020 = 0; y - 2021 = 0 \Leftrightarrow x = 2020; y = 2021$$

Vậy $x; y = 2020; 2021$

d) Vì $|x - y| \geq 0, \left| y + \frac{21}{10} \right| \geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + \frac{21}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{21}{10}$$

Vậy $x; y = \left(-\frac{21}{10}; -\frac{21}{10}\right)$

5.

a) Điều kiện $x \geq 0$, suy ra:

$$x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{2019.2020} = 2020x$$

$$2019x + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2010}\right) = 2020x$$

$$2019x + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = 2020x$$

$$2019x + \left(1 - \frac{1}{2020}\right) = 2020x$$

$$x = \frac{2019}{2020} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

b) Điều kiện $x \geq 0$, suy ra:

$$x + \frac{1}{1.3} + x + \frac{1}{3.5} + x + \frac{1}{5.7} + \dots + x + \frac{1}{197.199} = 100x$$

$$99x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{197.199}\right) = 100x$$

$$99x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{197} - \frac{1}{199}\right) = 100x$$

$$99x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{199}\right) = 100x$$

$$99x + \frac{99}{199} = 100x \Rightarrow x = \frac{99}{199} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

c) Ta có: $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{6}\right| \geq 0; \dots; \left|x + \frac{1}{110}\right| \geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Từ đó suy ra: $x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$

$$x + x + x + \dots + x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110}\right) = 11x$$

$$10x + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11}\right) = 11x$$

Suy ra: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{1} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$.

6.

a) $|x + 4| + |y - 2| = 3 \Rightarrow 0 \leq |x + 4| \leq 3; 0 \leq |y - 2| \leq 3$ suy ra bảng giá trị sau:

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ- THCS TÂY HỒ

$ x+4 $	0	1	2	3
$ y-2 $	3	2	1	0

Từ đó suy ra:

x	4	-3; -5	-2; -6	-1; -7
y	5; -1	0; 4	3; 1	2

Vậy cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn là:

4;5 ; 4;-1 ; -3;0 ; -3;4 ; -5;0 ; -5;4 ; -2;3 ; -2;1 ; -6;3 ; -6;1 ; -1;2 ; -7;2

b) $|2x+1|+|y-1|=4 \Rightarrow 0 \leq |2x+1| \leq 4; 0 \leq |y-1| \leq 4$

Mặt khác $|2x+1|$ là số lẻ nên chúng ta có bảng sau:

suy ra bảng giá trị sau:

$ 2x+1 $	1	3
$ y-1 $	3	1

Từ đó suy ra:

x	0; -1	1; -2
y	4; -2	2; 0

Vậy cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn là:

0;4 ; 0;-2 ; -1;4 ; -1;-2 ; 1;2 ; 1;0 ; -2;0 ; -2;2

c) $|3x|+|y+5|=5 \Rightarrow 0 \leq |3x| \leq 5; 0 \leq |y+5| \leq 5$

Mặt khác $|3x|$ chia hết cho 3, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$ 3x $	0	3
$ y+5 $	5	2

Từ đó suy ra:

x	0	1; -1
y	0; -10	-3; -7

Vậy cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn là:

0;0 ; 0;-10 ; 1;-3 ; 1;-7 ; -1;-3 ; -1;-7

d) $|5x|+|2y+3|=7 \Rightarrow 0 \leq |5x| \leq 7; 0 \leq |2y+3| \leq 7$

Mặt khác $|5x|$ chia hết cho 5, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$ 5x $	0	5
$ 2y+3 $	7	2 (loại)

Từ đó suy ra:

x	0
y	2; -5

Vậy cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn là: $0; 2$; $0; -5$

7.

a) Ta có: $|x+5| \geq x+5$ và $|4-x| \geq 4-x$ nên

$$|x+5| + |4-x| \geq x+5+4-x=9$$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x+5 \geq 0$ và $4-x \geq 0$ hay $x \geq -5; x \leq 4$

Vậy $-5 \leq x \leq 4$

b) Ta có $\left|x-\frac{2}{3}\right| \geq x-\frac{2}{3}$ và $\left|x-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3}{4}-x\right| \geq \frac{3}{4}-x$

$$\text{Suy ra } \left|x-\frac{2}{3}\right| + \left|x-\frac{3}{4}\right| \geq x-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}-x = \frac{1}{12}$$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x-\frac{2}{3} \geq 0$ và $\frac{3}{4}-x \geq 0$ hay $x \geq \frac{2}{3}; x \leq \frac{3}{4}$

Vậy $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$

c) Ta có $2|x-3| = |2x-6| \geq 6-2x$; $|2x+5| \geq 2x+5$ nên

$$2|x-3| + |2x+5| \geq 6-2x+2x+5=11$$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $6-2x \geq 0$ và $2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3; x \geq -\frac{5}{2}$

Vậy $-\frac{5}{2} \leq x \leq 3$

d) $|x-3| \geq x-3; |5-x| \geq 5-x; 2|x-4| \geq 0$

$$\Rightarrow |x-3| + |5-x| + 2|x-4| \geq x-3+5-x+0=2$$

Đấu bằng chỉ xảy ra khi $x=4$

8.

Ta có: $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$

Mặt khác: $|x-2| \geq 0; |y-3| \geq 0$ suy ra $|x-1| + |x-2| + |y-3| + |x-4| \geq 3$

Đấu bằng chỉ xảy ra khi $x=2; y=3$

9.

a) Xét $|y+1| = 2-x$ $x+1 > 0$, suy ra $2-x$ và $x+1$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1. Xét $2-x < 0$ và $x+1 < 0$

$x > 2$ và $x < -1 \Rightarrow$ không xảy ra.

+ Trường hợp 2. Xét $2-x > 0$ và $x+1 > 0$

$x < 2$ và $x > -1 \Rightarrow x \in (0; 1)$

+) Với $x = 0$ suy ra: $|y+1| = 2 \Rightarrow y = 1; y = -3$

+) Với $x = 1$ suy ra $|y+1| = 2 \Rightarrow y = 1; y = -3$

+ Trường hợp 3.

$$2-x \cdot x+1 = 0 \Rightarrow x = 2; x = -1 \Rightarrow |y+1| = 0 \Rightarrow y = -1$$

Từ đó ta có cặp số nguyên $x; y$ sau thỏa mãn:

$$x; y \in (0; 1) ; (0; -3) ; (1; 1) ; (1; -3) ; (2; -1) ; (-1; -1)$$

b) Xét $|y| = x+3$ và $1-x > 0$ suy ra $x+3$ và $1-x$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1.

+) Xét $x+3 > 0$ và $1-x > 0 \Rightarrow -3 < x < 1$

+) Xét $x = -2$ suy ra $|y| = 3 \Rightarrow y = 3; y = -3$

+) Xét $x = -1$ suy ra $|y| = 4 \Rightarrow y = 4; y = -4$

+) Xét $x = 0$ suy ra $|y| = 3 \Rightarrow y = 3; y = -3$

+ Trường hợp 2. $x+3 < 0$ và $1-x < 0 \Rightarrow x < -3$ và $x > 1$ vô lý (loại)

$$\text{Xét } |y| = x+3 \text{ và } 1-x = 0 \Rightarrow x; y \in (-3; 0) ; (1; 0)$$

Từ đó, ta có cặp số nguyên $x; y$ sau thỏa mãn:

$$(-2; 3) ; (-2; -3) ; (-1; 4) ; (-1; -4) ; (0; 3) ; (0; -3) ; (-3; 0) ; (1; 0)$$

c) $|2y+1|+2 > 0 \Leftrightarrow x-2 \cdot 5-x > 0$ suy ra $x-2$ và $5-x$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1.

+) Xét $x-2 > 0$ và $5-x > 0 \Rightarrow 2 < x < 5$

+) Xét $x = 3 \Rightarrow 3-2 \cdot 5-3 = |2y+1|+2 \Rightarrow 2 = |2y+1|+2$ vô lý vì $y \in \mathbb{Z}$ (loại).

+) Xét $x = 4$

$$\Rightarrow 4-2 \cdot 5-4 = |2y+1|+2 \Rightarrow 2 = |2y+1|+2 \Rightarrow |2y+1| = 0 \text{ vô lý vì } y \in \mathbb{Z}.$$

+ Trường hợp 2. $x-2 < 0$ và $5-x < 0 \Rightarrow x < 2$ và $x > 5$ vô lý (loại).

Vậy không tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn.

10.

a) Áp dụng $|a|+|b| \geq |a+b|$ dấu bằng chỉ xảy ra khi $ab \geq 0$

$$\Rightarrow |x-5|+|1-x| \geq |x-5+1-x| = 4$$

Mặt khác: $\frac{12}{|y+1|+3} \leq \frac{12}{3} = 4$ suy ra $|x-5|+|1-x| \geq 4 \geq \frac{12}{|y+1|+3}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x-5 \geq 1-x \geq 0$ và $y+1=0; y=-1$ với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{5; 4; 3; 2; 1\}$.

Vậy ta có cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn:

$$x; y \in \{5; -1\}; \{4; -1\}; \{3; -1\}; \{2; -1\}; \{1; -1\}$$

b) $|x-2y-1|+5 \geq 5$ và $\frac{10}{|y-4|+2} \leq \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow |x-2y-1|+5 \geq \frac{10}{|y-4|+2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x-2y-1=0$ và $y-4=0$ suy ra $x; y = 9; 4$

c) Ta có $|x+3|+|x-1| = |x+3|+|1-x| \geq |x+3+1-x| = 4$

Ta có $|y-2|+|y+2| = |2-y|+|y+2| \geq |2-y+y+2| = 4$

$$\Rightarrow \frac{16}{|y-2|+|y+2|} \leq \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow |x+3|+|x-1| \geq \frac{6}{|y-2|+|y+2|}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x+3 \geq 1-x \geq 0$ và $2-y \geq y+2 \geq 0$. Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ suy ra

$$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}; y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}. \text{ Từ đó suy ra các cặp } x; y.$$

d) Ta có $|x-1|+|3-x| \geq |x-1+3-x| = 2$

Mặt khác: $\frac{6}{|y+3|+3} \leq \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow |x-1|+|3-x| \geq \frac{6}{|y+3|+3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x-1 \geq 3-x \geq 0$ và $y+3=0$ vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có cặp số nguyên $x; y$

thỏa mãn là: $x; y \in \{1; -3\}; \{2; -3\}; \{3; -3\}$

11.

a) Ta có $\left|\frac{3}{4}-x\right| \geq 0 \Rightarrow A = \frac{2}{3} + \left|\frac{3}{4}-x\right| \geq \frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x = \frac{3}{4}$

b) Ta có $\left|x+\frac{5}{6}\right| \geq 0 \Rightarrow B = \left|x+\frac{5}{6}\right| - \frac{21}{10} \geq -\frac{21}{10}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $-\frac{21}{10}$ khi $x = -\frac{5}{6}$

c) Ta có $\left|\frac{9}{10}-x\right| \geq 0 \Rightarrow C = \frac{11}{12} + \left|\frac{9}{10}-x\right| \geq \frac{11}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{11}{12}$ khi $x = \frac{9}{10}$.

d) Ta có $\left|3x+\frac{9}{10}\right| \geq 0 \Rightarrow D = \left|3x+\frac{9}{10}\right| - \frac{73}{79} \geq -\frac{73}{79}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{73}{79}$ khi

$$x = -\frac{3}{10}.$$

e) Ta có $E = |4x - 3| + \left| 5y + \frac{15}{16} \right| + \frac{21}{10} \geq \frac{21}{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $4x - 3 = 0$ và $5y + \frac{15}{16} = 0$ hay $x = \frac{3}{4}; y = -\frac{3}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{21}{10}$ khi $x = \frac{3}{4}; y = -\frac{3}{16}$.

12. Ta có:

$$|x - 2019| + |x - 2021| = |x - 2019| + |2021 - x| \geq |x - 2019 + 2021 - x| = 2$$

Và $|x - 2020| \geq 0$ suy ra $A \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $x = 2020$.

13. Ta có: $A = |2x + 1000| + |2020 - 2x| \geq 2x + 1000 + 2020 - 2x = 3020$

Dấu bằng khi $2x + 1000 \geq 0; 2020 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -500$ và $x \leq 1010$

Với $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in -500; -499; -498; \dots; 1010$

Vậy với $x \in -500; -499; -498; \dots; 1010$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 3020.

14. Ta có: $A = \frac{0,34 - 0,04 \cdot \frac{2}{5}}{0,8 : 4,0,25} - 0,42 : \left(\frac{-4}{5} \right)$

$$A = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,8 : 1} - 0,42 \cdot \left(\frac{-5}{4} \right) = \frac{0,12}{0,8} + 0,525 = 0,15 + 0,525 = 0,675$$

15.

a) $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7$

$$= 7,3 \cdot 10,5 + 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15$$

$$= 7,3 \cdot 25,5 + 2,7 \cdot 25,5 = 25,5 \cdot 7,3 + 2,7 = 25,5 \cdot 10 = 255$$

b) $5,4 - 1,5 - 7,2 - 1 = 5,4 - 1,5 - 6,2 = 3,9 - 6,2 = -2,3$

16.

a) $x + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \left| -\frac{1}{5} \right| - \frac{3}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} - \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{15} \Leftrightarrow x = -\frac{37}{60}$$

b) $\frac{5}{6} - \left(\frac{13}{8} - x \right) = 10 - \left| -\frac{1}{6} \right|$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} - \frac{13}{8} + x = 10 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{19}{24} + x = \frac{59}{6} \Leftrightarrow x = \frac{59}{6} + \frac{19}{24} \Leftrightarrow x = \frac{85}{8}$$

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Câu 1. (Đề thi HSG 7 thành phố Thái Bình 2016-2017)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 10x$

Lời giải

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 10x \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh } |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| \geq 0 \quad \forall x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow x+1 > 0, x+2 > 0, x+3 > 0, x+4 > 0$$

$$\Rightarrow |x+1| = x+1, |x+2| = x+2, |x+3| = x+3, |x+4| = x+4 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = 10x$$

$$\Rightarrow 4x + 10 = 10x \Rightarrow 6x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn } x \geq 0). \text{ Vậy } x = \frac{5}{3} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 2. (Đề thi HSG 7 huyện Quan Sơn)

$$\text{Giải phương trình sau: } \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+10x+24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2+3x-18}$$

Lời giải

$$\text{a/ ĐKXD: } x \neq -1; -4; -6; 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{4}{3} + \frac{9}{(x-3)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{3(x+1)(x-3)} = \frac{4(x+1)(x-3)}{3(x+1)(x-3)} + \frac{3(x+1)}{3(x+1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình: } S = \{0; 2\}$$

Câu 3. (Đề thi HSG 7 Sơn Tinh)

$$\text{a/ Tìm } x, \text{ biết: } |4x+3| - x = 15.$$

$$\text{b/ Tìm } x, y, z \text{ biết: } (2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$$

Lời giải

a/ $|4x+3| - x = 15 \Leftrightarrow |4x+3| = x + 15$

Trường hợp 1: $x \geq -\frac{3}{4}$, ta có: $4x + 3 = x + 15 \Rightarrow x = 4$ (TMĐK).

Trường hợp 2: $x < -\frac{3}{4}$, ta có: $4x + 3 = -(x + 15) \Rightarrow x = -\frac{18}{5}$ (TMĐK).

Vậy: $x = 4$ hoặc $x = -\frac{18}{5}$.

b/ $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = \frac{9}{10}$

Câu 4. (Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

Tìm x, y thuộc Z biết : $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

Ta có $25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4$

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương, nên có 2 trường hợp.

TH 1 : $(x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$ thay vào $\Rightarrow y = 5 ; y = -5$

TH 2 : $(x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$

Thay vào $\Rightarrow y^2 = 17$ (loại)

Vậy $x = 2015, y = 5$ và $x = 2015, y = -5$

Câu 5. (Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

Tìm x biết:

a) $3^{x-1} + 5.3^{x-1} = 162$ b) $3x + x^2 = 0$ c) $(x-1)(x-3) < 0$

Lời giải

a) $3^{x-1}(1+5) = 162 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 27 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$

b) $3x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3+x) = 0$

$x=0$ hoặc $x=-3$

c) $(x-1)(x-3) < 0$ vì $x-1 > x-3$ nên

$(x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Câu 6. (Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$ Tính $x - 2y + 3z$

Lời giải

Ta có : $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Thay vào tỷ lệ thức

$$\Rightarrow \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow y = -7, z = 1$$

$$\Rightarrow x - 2y + 3z = 2 - 2.(-7) + 3.1 = 2 + 14 + 3 = 19$$

Câu 7. (Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

a) Tìm cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x + y + xy = 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x nguyên)

Lời giải

a)

$$\text{Ta có } x + y + xy = 2 \Leftrightarrow x + 1 + y(x + 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)=3$$

Do x, y nguyên nên $x + 1$ và $y + 1$ phải là ước của 3. Lập bảng ta có:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy các cặp (x,y) là: (0,2); (2,0); (-2,-4); (-4,-2)

b)

$$Q = \frac{27-2x}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$$

A lớn nhất khi $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất

$$* \text{ Xét } x > 12 \text{ thì } \frac{3}{12-x} < 0$$

* Xét $x < 12$ thì $\frac{3}{12-x} > 0$. Vì phân số có tử và mẫu là các số dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

$$\text{Vậy để } \frac{3}{12-x} \text{ lớn nhất thì } \begin{cases} 12-x > 0 \\ x \in \mathbb{Z} \\ 12-x \end{cases} \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow x = 11$$

A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$

Câu 8. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = \frac{5-x}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có : } P = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1$$

Để P nhận giá trị nguyên thì ta phải có $\frac{3}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 : (x-2) \Leftrightarrow x-2 \in U(3)$.

Vì $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$, nên ta lập bảng sau :

$x-2$	-1	1	-3	3
x	1	3	-1	5
P	-4 (thỏa mãn)	2 (thỏa mãn)	-2 (thỏa mãn)	0 (thỏa mãn)

Vậy với $x \in \{-1; 1; 3; 5\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Câu 9. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Tìm các số nguyên x để $Q = \frac{9}{\sqrt{x}-5}$ nhận các giá trị là số tự nhiên.

Lời giải

$Q = \frac{9}{\sqrt{x}-5}$ nhận các giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 9 : (\sqrt{x}-5) \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$$

Q là số tự nhiên khi $\sqrt{x}-5 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-5 \in \{1; 3; 9\}$.

$$\text{Từ đó: } \sqrt{x}-5=1 \Rightarrow \sqrt{x}=6 \Rightarrow x=36;$$

$$\sqrt{x}-5=3 \Rightarrow \sqrt{x}=8 \Rightarrow x=64;$$

$$\sqrt{x}-5=9 \Rightarrow \sqrt{x}=14 \Rightarrow x=196.$$

Thử lại, các giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy Q nhận giá trị nguyên với $x \in \{36; 64; 196\}$

Câu 10. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Tìm x và y thỏa mãn : $|2x-2011| + (3y+2012)^{2012} = 0$

Lời giải

$$\text{Nhận xét: } \begin{cases} |2x-2011| \geq 0 & \forall x \\ (3y+2012)^{2012} \geq 0 & \forall y \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi $2x-2011=0$ và $3y+2012=0$

$$\text{Tìm được } x = \frac{2011}{2} \text{ và } y = \frac{-2012}{3}$$

Câu 11. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Tìm x thỏa mãn: $\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \cdot \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 2^x$.

Lời giải

$$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5} \cdot \frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5} = 2^x$$

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6}$$

$$= \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{12}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{12} \Rightarrow x = 12$$

Câu 12. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI)

Tìm số nguyên x, y, biết: $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

Lời giải

$$42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$$

$$42 = 3|y - 3| + 4(2012 - x)^4$$

Do $3|y - 3| \geq 0$ với mọi giá trị của y nên $4(2012 - x)^4 \leq 42$

$$\Rightarrow (2012 - x)^4 < 11 < 2^4 \Rightarrow 2012 - x = 0 \text{ hoặc } 2012 - x = \pm 1 \text{ (vì } 2012 - x \text{ là số nguyên (do } x \text{ nguyên))}$$

* Nếu $2012 - x = \pm 1 \Rightarrow x = 2012$ hoặc $x = 2013$ và $38 = 3|y - 3|$

$|y - 3| = 38/3$ (không có giá trị của y thỏa mãn vì y nguyên)

* $2012 - x = 0 \Rightarrow x = 2012$ và $42 = 3|y - 3|$

$$\Rightarrow |y - 3| = 14 \Rightarrow y = 17 \text{ hoặc } y = -11$$

Vậy cặp số $(x, y) = (2012; 17); (2012; -11)$

Câu 13. (Đề thi HSG 7 cấp trường huyện Bình Giang)

Tìm x biết

a) $\frac{x-5}{2x+3} = \frac{3}{4}$

b) $2013 - |x - 2012| = 2012$

Lời giải

a) $\frac{x-5}{2x+3} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(x-5) = 3(2x+3)$

$$4x - 20 = 6x + 9 \Leftrightarrow 4x - 6x = 9 + 20 \Leftrightarrow -2x = 29 \Leftrightarrow x = -29/2$$

b) $|x - 2012| = 2013 - 2012$

$$\Rightarrow |x - 2012| = 1 \Rightarrow x = 2013 \text{ hoặc } x = 2011$$

Câu 14. (Đề thi HSG 7 cấp trường)

Tìm x: $\frac{x+4}{2010} + \frac{x+3}{2011} = \frac{x+2}{2012} + \frac{x+1}{2013}$

Lời giải

$$\frac{x+4}{2010} + \frac{x+3}{2011} = \frac{x+2}{2012} + \frac{x+1}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{2010} + 1 + \frac{x+3}{2011} + 1 = \frac{x+2}{2012} + 1 + \frac{x+1}{2013} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2014) \left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2014 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2014$$

Vậy giá trị x cần tìm là : $x = -2014$

Câu 15. (Đề thi HSG 7 huyện Tĩnh Gia)

Tìm x, y biết: $|x-2013| + \left| 1007 - \frac{1}{2}y \right| = 0$

Lời giải

Ta có: $|x-2013| \geq 0$ và $\left| 1007 - \frac{1}{2}y \right| \geq 0$

$$\text{Suy ra: } |x-2013| + \left| 1007 - \frac{1}{2}y \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2013| = 0 \\ \left| 1007 - \frac{1}{2}y \right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2013 = 0 \\ 1007 - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2013 \\ y = 2014 \end{cases}$$

Câu 16. (Đề thi HSG 7 huyện)

a) Tìm x biết: $|2x-7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Lời giải

a) Ta có $|2x-7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow |2x-7| = 1 \Rightarrow 2x-7 = 1$ hoặc $2x-7 = -1$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 3$.

b) Biến đổi được $3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$

$$\Rightarrow 3^n = 3^6$$

$$\Rightarrow n = 6$$

KL: Vậy $n = 6$

Câu 17. (Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm x, y biết:

a) $|2x-5| + x = 3$ b) $\frac{x+4}{20} = \frac{5}{x+4}$ c) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$ d) $|x+3| + |x+1| = 3x$

Lời giải

a) $|2x-5| + x = 3 \Rightarrow |2x-5| = 3-x$ (ĐK : $x \leq 3$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-5=3-x \\ 2x-5=-3+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=8 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ x=2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn ĐK})$$

Vậy $x=2$; $x=\frac{8}{3}$

$$b) \frac{x+4}{20} = \frac{5}{x+4} \Rightarrow (x+4)^2 = 100 \Rightarrow \begin{cases} x+4=10 \\ x+4=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-14 \end{cases}$$

$$c) 2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x \Rightarrow 2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x} \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$d) \text{ Vì } |x+3| \geq 0; |x+1| \geq 0 \Rightarrow |x+3| + |x+1| \geq 0$$

$$\text{Mà } |x+3| + |x+1| = 3x \text{ (ĐK } x \geq 0) \Rightarrow x+3 \geq 0; x+1 \geq 0$$

$$x+3+x+1=3x \Rightarrow x=4 \text{ thỏa mãn ĐK đề bài}$$

Câu 18. (Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |(x+2012)(x-2013)| + |(x-2013)(x+2014)| = 0.$$

Lời giải

$$\Rightarrow |(x+2012)(x-2013)| = 0 \text{ và } |(x-2013)(x+2014)| = 0$$

$$(x+2012)(x-2013) = 0 \Rightarrow x = -2012 \text{ hoặc } x = 2013$$

$$(x-2013)(x+2014) = 0 \Rightarrow x = 2013 \text{ hoặc } x = -2014$$

$$\text{Kết luận } x = 2013$$

Câu 19. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành) Tìm x biết

$$1) \left(\frac{x}{2} + 3 \right)^2 = 16$$

$$2) \left| x - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{4}$$

Lời giải

$$\left(\frac{x}{2} + 3 \right)^2 = 16 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} + 3 \right)^2 = 4^2 \text{ hoặc } \left(\frac{x}{2} + 3 \right)^2 = (-4)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + 3 = 4 \text{ hoặc } \frac{x}{2} + 3 = -4$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -14$$

$$\begin{aligned}
 2) \left| x - \frac{3}{2} \right| &= \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} \\
 \Rightarrow x &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\
 \Rightarrow x &= \frac{7}{4} \text{ hoặc } x = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Câu 20. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016 - 2017) Tìm x biết

$$\begin{aligned}
 a) \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{16} &= 0 & b) \left| x + \frac{3}{4} \right| - \frac{1}{2} &= 2017
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 &= \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{-7}{12} \end{cases} \\
 b) \left| x + \frac{3}{4} \right| - \frac{1}{2} &= 2017 \Rightarrow \left| x + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{2} + 2017 = \frac{4035}{2} \\
 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{4035}{2} \\ x + \frac{3}{4} = \frac{-4035}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8067}{4} \\ x = \frac{-8073}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Câu 21. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh)

Tìm x, y, z biết:

$$\begin{aligned}
 a) (x+2) \left(x - \frac{2}{3} \right) &> 0. \\
 b) xy &= -2; yz = -3; zx = 54.
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$a) \text{ Do } (x+2) \left(x - \frac{2}{3} \right) > 0 \text{ suy ra } x+2 \text{ và } x - \frac{2}{3} \text{ cùng dấu.}$$

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x - \frac{2}{3} > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+2 < 0 \\ x - \frac{2}{3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < -2 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \text{ hoặc } x < -2$$

$$b) xy = -2(1); yz = -3(2); zx = 54(3)$$

Nhân vế với vế của (1); (2); (3) ta được: $(xyz)^2 = 18^2 \Rightarrow xyz = \pm 18$

+ Với $xyz = 18$ (*)

Thay (1); (2); (3) vào (*) $\Rightarrow x = -6; y = \frac{1}{3}; z = -9$.

+ Với $xyz = -18$ (**)

Thay (1); (2); (3) vào (**) $\Rightarrow x = 6; y = -\frac{1}{3}; z = 9$

Vậy $x = \mp 6; y = \pm \frac{1}{3}; z = \mp 9$.

Câu 22. (Đề thi HSG 7 - Thị xã Sầm Sơn - 2012 -2013)

Tìm x biết:

a) $(2x-1)^2 = 4$

b) $x:2 + x:6 + x:12 + \dots + x:9900 = 99$

Lời giải

a) $(2x-1)^2 = 4 = (\pm 2)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $x \in \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$

b) $x:2 + x:6 + x:12 + \dots + x:9900 = 99$

$$\Rightarrow x \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 99$$

$$\Rightarrow \frac{99x}{100} = 99$$

$$\Rightarrow x = 100$$

Câu 23. (Đề thi HSG 7 - Thành phố Sầm Sơn - 2017 -2018)

Tìm x biết: $|2x - 5| - x = 3$.

Lời giải

$$|2x-5| - x = 3 \Leftrightarrow |2x-5| = 3+x$$

Với $x \geq \frac{5}{2}$ ta có phương trình: $2x-5=3+x \Rightarrow 2x-x=3+5 \Rightarrow x=8$ Thỏa mãn đk

Với $x < \frac{5}{2}$ ta có phương trình: $2x-5=-(3+x) \Rightarrow 2x+x=-3+5$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ Thỏa mãn đk}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{2}{3}; 8 \right\}$

Câu 24. (Đề thi HSG 7 - Thành phố SẦM SƠN - 2018-2019)

1) Tìm x biết

a) $7^{x+2} + 2.7^{x-1} = 345$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{4018} = 1005.16^{1-x}$

2) Tìm các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn : $y(x-2) + x(x-2) - (x-2) = 5$

Lời giải

1) Tìm x biết

a) $7^{x+2} + 2.7^{x-1} = 345$

$$7^{x-1} \cdot (7^3 + 2) = 345$$

$$7^{x-1} \cdot (343 + 2) = 345$$

$$7^{x-1} = 1$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{4018} = 1005.16^{1-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2.2} \cdot \frac{4}{2.3} \cdot \frac{5}{2.4} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{2.2009} = 1005.16^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2010}{2^{2009}} = 1005.16^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^{2009}} = 16^{1-x} \Leftrightarrow 2^{-2008} = 2^{4(1-x)} \Leftrightarrow 4(1-x) = -2008 \Leftrightarrow 1-x = -502 \Leftrightarrow x = 503.$$

2) Tìm các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn :

$$y(x-2) + x(x-2) - (x-2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y+x-1) = 5$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ nên $(x-2) \in U(5)$

Xét bảng

$x-2$	1	-1	5	-5
$y+x-1$	5	-5	1	-1
x	3	1	7	-3
y	3	-5	-5	3

Vậy: $(x; y) \in \{(3; 3); (1; -5); (7; -5); (-3; 3)\}$

Câu 25. (Đề thi HSG 7 - Thành phố SẦM SƠN - 2018-2019)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn : $x^2 - x(y-1) + y + 3 = 0$

Lời giải

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn : $x^2 - x(y-1) + y + 3 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - xy + x + y + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)y = x^2 + x + 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 + x + 3}{x-1} = \frac{x^2 - x + 2x - 2 + 5}{x-1} = x + 2 + \frac{5}{x-1}$$

mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(x-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ $x \in \{2; 0; 6; -4\}$

$$*) \text{ Với } x = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 + \frac{5}{2-1} = 9 \quad *) \text{ Với } x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 + \frac{5}{0-1} = -3$$

$$*) \text{ Với } x = 6 \Rightarrow y = 6 + 2 + \frac{5}{6-1} = 9 \quad *) \text{ Với } x = -4 \Rightarrow y = -4 + 2 + \frac{5}{-4-1} = -3$$

Vậy: $(x; y) \in \{(2; 9); (0; -3); (6; 9); (-4; -3)\}$

Câu 26. (Đề thi HSG 7 - Huyện Thạch Thành - 2014 - 2015)

1) Tìm x biết: $(5x + 2)^2 = 25$

2) Tìm x, y biết: $(4x - 5)^{2014} + (2y + 4)^{2016} \leq 0$

Lời giải

1) Tìm x biết :

$$(5x + 2)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2 = 5 \\ 5x + 2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

2) Vì $(4x - 5)^{2014} \geq 0; (2y + 4)^{2016} \geq 0$ với $\forall x, y$

Nên $(4x - 5)^{2014} + (2y + 4)^{2016} \leq 0$

$$\Rightarrow 4x - 5 = 0 \text{ và } 2y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ và } y = -2$$

Câu 27. (Đề thi HSG 7 huyện Thạch Bàn 2016 -2017)

1. $(x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} = 0$

2. Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

1) Ta có: $(x - 1)^{2016} \geq 0 \quad \forall x$

$$(2y - 1)^{2016} \geq 0 \quad \forall y$$

$$|x + 2y - z|^{2017} \geq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow (x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} \geq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\text{Mà } (x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} = 0 \text{ nên}$$

$$\text{dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^{2016} = 0 \\ (2y - 1)^{2016} = 0 \\ |x + 2y - z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$2) \text{ Ta có: } xy + 3x - y = 6$$

$$\Rightarrow x(y + 3) - (y + 3) = 6 - 3$$

$$\Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

Ta có bảng sau:

$x - 1$	1	3	-1	-3	
$y + 3$	3	1	-3	-1	
x	2	4	0	-2	
y	0	-2	-6	-4	

$$\text{Vậy: } (x; y) = (2; 0) = (4; -2) = (0; 6) = (-2; -4).$$

Câu 28. (Đề thi HSG 7 - THIỆU HÓA - 2016 -2017)

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$B = 2x^2 - 3x + 5 \text{ với } |x| = \frac{1}{2}.$$

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0, \text{ biết } x - y = 0.$$

Lời giải

$$\text{Vì } |x| = \frac{1}{2} \text{ nên } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì } B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 7$$

$$\text{Vậy } B = 4 \text{ với } x = \frac{1}{2} \text{ và } B = 7 \text{ với } x = -\frac{1}{2}$$

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (vì } x - y = 0).$$

Câu 29. (Đề thi HSG 7 - THIỆU HÓA - 2016 -2017)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$$

Lập bảng:

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (3; 0), (0; 3), (-2; 1)\}$.

Câu 30. (Đề thi HSG 7 Huyện Như Xuân 2014-2015)

Tìm x, y biết:

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$

b) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

c) $|x + 5| + (3y - 4)^{2016} = 0$

Lời giải

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{5}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$

Vậy $x = \frac{9}{5}; x = -\frac{11}{5}$.

b) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$

Suy ra $x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy $x = -3$.

c) $|x + 5| + (3y - 4)^{2016} = 0$. Vì $|x + 5| \geq 0; (3y - 4)^{2016} \geq 0$

Suy ra: $\begin{cases} |x + 5| = 0 \\ (3y - 4)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy $x = -5; y = \frac{4}{3}$.

Câu 31. (Đề thi HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm x biết $\frac{2}{3}x - 70 \frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999}\right) = -5$

Lời giải

$$\frac{2}{3}x - 70\frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5$$

$$\frac{2}{3}x - 70\frac{10}{11} : \left(\frac{13}{15} + \frac{13}{35} + \frac{13}{63} + \frac{13}{99} \right) = -5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 70\frac{10}{11} : \frac{13}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) = -5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 70\frac{10}{11} : \frac{13}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) = -5$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 15.3 = -5$$

$$\frac{2}{3}x = 40 \Rightarrow x = 60.$$

Câu 32. (Đề thi HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$.

Lời giải

Ta có $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là kết quả cần tìm.

Câu 33. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2016-2017)

a) Tìm x biết: $|3x - 3| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0$.

b) Cho $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$

Tìm số nguyên dương x để $B = 115$.

Lời giải

$$a) |3x - 3| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0$$

$$|3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \quad (*)$$

Điều kiện để x thỏa mãn bài toán là $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

Khi đó $x \geq \frac{-1}{3} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0$ nên (*) trở thành

$$|3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow |3x - 3| = x \quad (\text{điều kiện } x \geq 0)$$

Nếu $x \geq 1$ ta có $3x - 3 = x$ nên $x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x \leq 1$ ta có $3 - 3x = x$ nên $x = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2.3}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3.4}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{4.5}{2} \right) + \dots + \frac{1}{x} \left(\frac{x(x+1)}{2} \right) = \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} (2 + 3 + 4 + \dots + (x+1)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x(x+3)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } B = 115 \text{ khi } \frac{1}{2} \left(\frac{x(x+3)}{2} \right) = 115 \Leftrightarrow x(x+3) = 460$$

Mà x là số nguyên dương nên x và $x+3$ là ước dương của 460 nên $x = 20$.

Vậy $x = 20$.

Câu 34. (Đề thi HSG 7 Huyện Quế Sơn 2012-2013)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $|x - 2012| + |2013 - y| = 1$.

b) Tìm x biết: $(x-7)^{x+11} - (x-7)^{x+1} = 0$.

Lời giải

a) $|x - 2012|, |2013 - y|$ là các số tự nhiên. Tổng của chúng bằng 1 nên:

Trường hợp 1: $|x - 2012| = 0$ và $|2013 - y| = 1$

Giải được: $(x; y) = (2012; 2012)$ và $(x; y) = (2012; 2014)$

Trường hợp 2: $|x - 2012| = 1$ và $|2013 - y| = 0$

Giải được: $(x; y) = (2013; 2013)$ và $(x; y) = (2011; 2013)$

Vậy: $(2012; 2012); (2012; 2014); (2013; 2013); (2011; 2013)$ là các cặp số nguyên cần tìm.

$$\text{b) } (x-7)^{x+1} ((x-7)^{10} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^{x+1} = 0 \\ (x-7)^{10} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 0 \\ x-7 = 1 \\ x-7 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 8 \\ x = 6 \end{cases}$$

Câu 35. (Đề thi HSG 7 Huyện Hoài Nhơn 2014-2015)

1) Tìm x , biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$.

2) Trong ba số a, b, c có một số dương, một số âm và một số bằng 0, ngoài ra còn biết: $|a| = b^2 |b - c|$

. Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0?

Lời giải

$$1)(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} [1 - (x-5)^{12}] = 0 \Leftrightarrow \text{hoặc } (x-5)^{x+1} = 0, \text{ hoặc}$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0$$

$$(x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}.$$

Vậy: $x=4; x=5; x=6$.

$$2) \text{ Ta có } |a| \geq 0, b^2 \geq 0, \text{ nên từ } |a| = b^2(b-c) \Rightarrow b-c \geq 0 \Rightarrow c \leq b$$

+) Nếu $b=0 \Rightarrow |a|=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ có hai số a và b bằng 0, vô lý

+) Nếu $b < 0 \Rightarrow c \leq b < 0 \Rightarrow$ có hai số âm b và c vô lý

+) Nếu $b > 0$, ta xét $a=0 \Rightarrow b-c=0 \Rightarrow b=c > 0 \Rightarrow$ có hai số dương b và c , vô lý $\Rightarrow a < 0$

Vậy $a < 0; b > 0; c = 0$.

Câu 36. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2014-2015)

$$1) \text{ Tìm các số } x, y \text{ biết: } 2019|2x-1| + 5(x+2y)^{24} = 0$$

Lời giải

1) Ta có:

$$|2x-1| \geq 0, \forall x \text{ nên } 2019|2x-1| \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$(x+2y)^{24} \geq 0, \forall x, y \text{ nên } 5(x+2y)^{24} \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$$

$$\text{Do đó: } 2019|2x-1| + 5(x+2y)^{24} = 0 \text{ thì } 2x-1=0 \text{ và } x+2y=0$$

$$\text{Từ đó suy ra: } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4}.$$

Câu 37. (Đề thi HSG 7 Huyện Giao Thủy 2016-2017)

$$\frac{6}{(x-1)^2 + 2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1.$$

Lời giải

$$\frac{6}{(x-1)^4 + 2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

$$\text{Đặt } A = \frac{6}{(x-1)^4 + 2}$$

Chúng ta được $A \leq 3$ với mọi x (1)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Đặt } B = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

$$B = |y-1| + |y-2| + |3-y| + 1$$

$|y-1| \geq y-1$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y \geq 1$

$|y-2| \geq 0$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = 2$

$|3-y| \geq 3-y$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y \leq 3$

$\Rightarrow B \geq 3$ với mọi y (2), và tìm được dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = 2$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A = B = 3 \Rightarrow x = 1; y = 2$.

Câu 38. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 2014-2015)

Tìm x , biết: $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$.

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên suy ra $x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$. (1)

+) Nếu $x \geq 1$ thì (1) $\Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn)

+) Nếu $x < 1$ thì (1) $\Rightarrow x-1=-2 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Câu 39. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017-2018)

Tìm x, y nguyên biết : $2xy - x - y = 2$

Lời giải

Ta có $2xy - x - y = 2$

$$4xy - 2x - 2y = 4$$

$$2x(2y-1) - 2y + 1 = 5$$

$$(2y-1)(2x-1) = 5$$

Từ đó suy ra $(x; y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$

Vậy $(x; y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$

Câu 40. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2017-2018)

Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

Ta có $xy + 3x - y = 6$

$$\Rightarrow x(y+3) - (y+3) = 3$$

$$\Rightarrow (x-1)(y+3) = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ y+3 = \pm 3 \end{cases}; \begin{cases} x-1 = \pm 3 \\ y+3 = \pm 1 \end{cases}$$

Các cặp $(x; y)$ là: $(2; 0), (0; -6), (4; -2), (-2; -4)$

Câu 41. (Đề thi HSG 7 huyện NHƯ XUÂN, 2015 – 2016)

Tìm x, y biết:

$$1) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$2) 2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

$$3) |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0$$

Lời giải

$$1) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } x \in \left\{ \frac{9}{5}; -\frac{11}{5} \right\}$$

$$2) 2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\text{Suy ra } x-1 = -4 \Leftrightarrow x = -3 \text{ vậy } x = -3$$

$$3) |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0$$

$$\forall x: |x+5| \geq 0 \quad \forall y: (3y-4)^{2016} \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } |x+5| + (3y-4)^{2016} \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\text{Mà: } |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0 \text{ nên chỉ xảy ra dấu “=”}$$

$$\begin{cases} |x+5| = 0 \\ (3y-4)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 42. (Đề thi HSG 7 huyện NHƯ XUÂN, 2015 – 2016)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $2xy + x - 2y = 4$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2xy + x - 2y = 4 \Leftrightarrow x(2y+1) - (2y+1) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3$$

$$\text{Suy ra } x-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Xét bảng:

$x-1$	1	-1	3	-3
$2y+1$	3	-3	1	-1
x	2	0	4	-2
y	1	-2	0	-1

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2; 1); (0; -2); (4; 0); (-2; -1)\}$$

Câu 43. (Đề thi HSG 7 huyện KON TUM, 2017 – 2018)

1) $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

2. Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$.

Lời giải

1) Ta có $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x$

$(2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y$

$|x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$

$(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z \forall x, y, z$

Mà $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

nên dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$

2. Ta có: $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6-3$

$\Leftrightarrow (y+3)(x-1) = 3 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

Vậy: $(x; y) = (2; 0) = (4; -2) = (0; 6) = (-2; -4)$

Câu 44. (Đề thi HSG 7 huyện NGA SON, 2011 - 2012)

Tìm x biết:

a. $3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3(-2)^3$

b. $x^2(x+2) + 4(x+2) = 0$

c. $(x-2)(x+3) < 0$

d. $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$

Lời giải

a) $3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3(-2)^3$

$\Rightarrow |2x-1| = 9 \Rightarrow 2x-1 = 9 \text{ hoặc } 2x-1 = -9$

$\Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -4$

b) $x^2(x+2) + 4(x+2) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2+4) = 0$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 4 = 0$$

* Nếu $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

* Nếu $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ (Vô lý)

Vậy $x = -2$

c) $(x-2)(x+3) < 0$

Vì $(x-2)(x+3) < 0$ Nên $x - 2$ và $x + 3$ khác dấu. Mà: $x+3 > x-2$ với mọi x

nên suy ra: $x - 2 < 0$ và $x + 3 > 0 \Rightarrow -3 < x < 2$.

Vậy: $-3 < x < 2$.

d) $3^{x+2} + 4.3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6 \Rightarrow 3^{x-1}(3^3 + 4.3^2 + 1) = 2^6.3^6$

$$\Rightarrow 3^{x-1}.64 = 2^6.3^6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x = 7$$

Câu 45. (Đề thi HSG 7 huyện NGÀ SƠN, 2017 – 2018)

1. Tìm x thỏa mãn: $\frac{x+4}{2015} + \frac{x+3}{2016} = \frac{x+2}{2017} + \frac{x+1}{2018}$

2. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $xy + x - y = 6$

Lời giải

$$1. \frac{x+4}{2015} + \frac{x+3}{2016} = \frac{x+2}{2017} + \frac{x+1}{2018}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{2015} + 1 + \frac{x+3}{2016} + 1 = \frac{x+2}{2017} + 1 + \frac{x+1}{2018} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2019)\left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2019 = 0 \quad (\text{Vì } \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -2019$$

Vậy $x = -2019$

$$2. xy + x - y = 6 \Rightarrow x(y+1) - (y+1) = 5 \Rightarrow (y+1)(x-1) = 5$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $(y+1)$ và $(x-1)$ là các số nguyên do đó ta có các trường hợp sau :

$$\begin{cases} y+1=1 \\ x-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=6 \end{cases} \quad (\text{Loại vì } x, y \text{ nguyên dương})$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} y+1=5 \\ x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy có 1 cặp số x, y như trên thỏa mãn điều kiện đầu câu

Câu 46. (Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẠC, 2015-2016)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

$$\text{Do } 25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow (x - 2015)^2 \leq 3$$

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương suy ra $(x - 2015)^2 \in \{0; 1\}$

*) Với $(x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015 \Rightarrow y = \pm 5$

*) Với $(x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 17 \text{ (loại)}$

Vậy $x = 2015; y = 5$ hoặc $x = 2015; y = -5$

Câu 47. (Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẠC, 2017-2018)

Tìm $x; y$ biết $|x - 2013| + |1007 - \frac{1}{2}y| = 0$

Lời giải

Tìm $x; y$ biết $|x - 2013| + |1007 - \frac{1}{2}y| = 0$

Ta có $|x - 2013| \geq 0$ với mọi x và $|1007 - \frac{1}{2}y| \geq 0$ với mọi y

$|x - 2013| + |1007 - \frac{1}{2}y| = 0$ khi $|x - 2013| = 0$ và $|1007 - \frac{1}{2}y| = 0$

suy ra $x = 2013$ và $y = 2014$

Câu 48. (Đề thi HSG 7 huyện ... (1).. 2017-2018)

a) Tìm x biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Lời giải

a) Ta có $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow |2x - 7| = 1$

$\Rightarrow 2x - 7 = 1$ hoặc $2x - 7 = -1$

$\Rightarrow x = 4$ hoặc $x = 3$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 3$.

b) Biến đổi được $3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$

$\Rightarrow 3^n = 3^6$

$\Rightarrow n = 6$

Vậy $n = 6$

Câu 49. (Đề thi HSG 7 huyện ... (2).. 2017-2018)

a) Tìm x , biết: $|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

a) Vì $x^2 + |x - 1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x - 1| = x^2 + 2$ hay $|x - 1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì (*) $\Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Vậy $x = 3; x = -1$ $x = 3$ và $x = -1$

b)) Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2011 khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Câu 50. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2017-2018)

Tìm số x thỏa mãn:

a) $|x - 2012| + |x - 2013| = 2014$

b) $3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)]$

Lời giải

a) Nếu $x \leq 2012$ từ (1) suy ra : $2012 - x + 2013 - x = 2014 \Rightarrow x = \frac{2011}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Nếu $2012 \leq x < 2013$ từ (1) suy ra : $x - 2012 + 2013 - x = 2014$ hay $1 = 2014$ (loại)

Nếu $x \geq 2013$ từ (1) suy ra : $x - 2012 + x - 2013 = 2014 \Rightarrow x = \frac{6039}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = \frac{2011}{2}$ hoặc $x = \frac{6039}{2}$.

b) $3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - (4 - 1)]$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - 3]$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{x-3} = 24 - 13$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{x-3} = 11$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-3} = 8 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

Vậy $x = 6$

Câu 51. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh lộc 2017-2018)

a) Tìm x : $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$

b) Tìm x, biết : $(x + 2)^{n+1} = (x + 2)^{n+11}$ (Với n là số tự nhiên)

Lời giải

a) $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$$

- TH1: $x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{30}$

- TH2: $x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{11}{30}$

Vậy $x = -\frac{1}{30}; x = -\frac{11}{30}$

b) Ta có $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

- TH 1: $(x+2)^{n+1} = 0 \Rightarrow x = -2$

- TH2: $[1 - (x+2)^{10}] = 0$

$$\Rightarrow (x+2)^{10} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy $x = -2; x = -1; x = -3$

Câu 52. (Đề thi HSG 7 huyện KRÔNG ANA năm 2013)

a) $\frac{3}{5} \cdot \left| \frac{4}{7}x - 2 \right| - 5 = 13$

b) $(10x-3)^{2013} = (10x-3)^{2011}$

Lời giải

a) $\frac{3}{5} \cdot \left| \frac{4}{7}x - 2 \right| - 5 = 13 \Rightarrow \left| \frac{4}{7}x - 2 \right| = 18 \cdot \frac{5}{3} = 30$

$$\frac{4}{7}x - 2 = 30 \text{ hoặc } \frac{4}{7}x - 2 = -30$$

$$\frac{4}{7}x = 32 \text{ hoặc } \frac{4}{7}x = -28$$

$$x = 56 \text{ hoặc } x = -49$$

b) $\Rightarrow (10x-3)^{2011} [(10x-3)^2 - 1] = 0$

$$\Rightarrow (10x-3) = 0 \text{ hoặc } [(10x-3)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{10} \text{ hoặc } 10x-3 = 1 \text{ hoặc } 10x-3 = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{10} \text{ hoặc } x = \frac{2}{5} \text{ hoặc } x = \frac{1}{5}$$

Vậy : $x = \frac{3}{10}$; $x = \frac{2}{5}$; $x = \frac{1}{5}$

Câu 53. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI 2018)

Tìm x biết: $|x - 6| + 2x = 10$

Lời giải

*) Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ nên từ $|x - 6| + 2x = 10 \Rightarrow x - 6 + 2x = 10$

$$\Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3} < 6 \text{ (loại)}$$

*) Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ nên từ $|x - 6| + 2x = 10 \Rightarrow 6 - x + 2x = 10$

$$\Rightarrow 6 + x = 10 \Rightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x < 6)$$

Vậy $x = 4$

Câu 54. (Đề thi HSG 7 cấp huyện tỉnh BẮC GIANG 2018)

Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$.

Lời giải

Ta có $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là kết quả cần tìm.

Câu 55. (Đề thi HSG 7 TX CHÍ LINH 2016-2017)

Tìm x biết:

a) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$

b) $\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{-7}{12} \end{cases}$$

$$\text{b) } \left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017 \Rightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} + 2017 = \frac{4035}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{4035}{2} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{4035}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8067}{4} \\ x = \frac{-8073}{4} \end{cases}$$

Câu 56. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2017-2018)

Tìm x, biết:

1) $|5x-3|-x=7$

2) $|2x+3|<4x+9$

3) $\frac{16^x}{8}=2^x$

Lời giải

1) $|5x-3|-x=7 \Leftrightarrow |5x-3|=x+7(1)$

ĐK: $x \geq 7$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3=x+7 \\ 5x-3=-(x+7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2}(t/m) \\ x=\frac{-2}{3}(t/m) \end{cases}$$

2) $|2x+3|<4x+9$

ĐK: $4x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{4}$

Pt $\Leftrightarrow -(4x+9) < 2x+3 < 4x+9 \Leftrightarrow x > -2$

3) $\frac{16^x}{8}=2^x \Leftrightarrow 2^{4x-3}=2^x \Rightarrow 4x-3=x \Rightarrow x=1$

Câu 57. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2017-2018)

Tìm $x; y; z$ biết: $\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|y+\frac{2}{3}\right|+\left|x^2+xz\right|=0$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right|=0 \\ \left|y+\frac{2}{3}\right|=0 \\ \left|x^2+xz\right|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \\ y+\frac{2}{3}=0 \\ x(x+z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{2}{3} \\ z=-x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$

Câu 58. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2017-2018)

Tìm x , biết: $|2017-x|+|2018-x|+|2019-x|=2$.

Lời giải

Có $|2018-x| \geq 0$ và

$$|2017-x|+|2019-x|=|x-2017|+|2019-x| \geq |x-2017+2019-x|=2$$

$$\Rightarrow |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2017)(2019 - x) \geq 0$ và $2018 - x = 0$, suy ra: $2017 \leq x \leq 2019$ và $x = 2018 \Rightarrow x = 2018$

Vậy $x = 2018$.

Câu 59. (Đề thi HSG 7 huyện THANH CHUÔNG)

Tìm x biết :

$$|3 - 2x| = x + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

Lời giải

a) Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $|3 - 2x| = x + 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4$

Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|3 - 2x| = x + 1 \Leftrightarrow 3 - 2x = x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 + \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = 2014 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right) \Leftrightarrow x = 2014$$

Câu 60. (Đề thi HSG 7 THÁI THỤY 2015-2016)

Tìm x biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{-4}{2}$$

Vậy $x = \frac{-4}{2}$

Câu 61. (Đề thi HSG 7 Trường ĐỨC THẮNG)

Tìm x biết:

a. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b. $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

c. $|4x+3| - |x-1| = 7$

Lời giải

a) $\frac{1}{2.2} \cdot \frac{2}{2.3} \cdot \frac{3}{2.4} \cdot \frac{4}{2.5} \cdot \frac{5}{2.6} \cdots \frac{30}{2.31} \cdot \frac{31}{2^6} = 4^x$

$\Leftrightarrow \frac{1.2.3.4 \cdots 30.31}{1.2.3.4 \cdots 30.31.2^{30}.2^6} = 2^{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^{2x} \Leftrightarrow x = -18$

b) $\frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 8^x \Leftrightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 2^{12} = 2^{3x} \Rightarrow x = 4$

c) $x < -\frac{3}{4} \Rightarrow -(4x+3) - (1-x) = 7 \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$ (t/m)

$-\frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow 4x+3 - (1-x) = 7 \Rightarrow x = 1$ (loại)

$x \geq 1 \Rightarrow 4x+3 - (x-1) = 7 \Rightarrow x = 1$ (T/m)

Câu 62. (Đề thi HSG 7 huyện PHÚ THIÊN 2009-2010)

a. Tìm x, biết: $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$;

b. Tìm x, biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$

Lời giải

a) $2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$

$\Leftrightarrow -12x - 20 = 16 \Leftrightarrow -12x = 16 + 20 = 36 \Leftrightarrow x = 36 : (-12) = -3$

b) Nếu $x > \frac{1}{2}$. Ta có: (vì nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 = 0$)

$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{7}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22}$

$\Leftrightarrow 2x-1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22} = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{21} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3} > \frac{1}{2}$

Nếu $x < \frac{1}{2}$. Ta có:

$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{7}{2} : (1-2x) = \frac{21}{22} \Leftrightarrow -2x = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} : (-2) = -\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 63. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN)

Tìm tất cả các cặp số (x; y) thỏa mãn: $(2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \leq 0$

Lời giải

Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x-y+7)^{2012} \geq 0$

và $|x-3| \geq 0 \Rightarrow |x-3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

suy ra: $(2x - y + 7)^{2012} = 0$ và $|x - 3|^{2013} = 0$

$$\Rightarrow 2x - y + 7 = 0 \text{ (1) và } x - 3 = 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow y = 2x + 7 = 2.3 + 7 = 13$$

Vậy cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(3; 13)$

Câu 64. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ THU' 2015-2016)

Tìm x biết:
$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

Lời giải

$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{3|x-2|+1} \Leftrightarrow 6|x-2|+2 = 3|x-2|+6$$

$$\Leftrightarrow 3|x-2| = 4 \Leftrightarrow |x-2| = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{4}{3} \\ x-2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$$

Câu 65. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

Tìm x biết

$$\text{a) } -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

Lời giải

$$\text{a) } -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \frac{130}{343}, \text{ Vậy } x = \frac{130}{343}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49.$$

Vậy $x = 49$

Câu 66. (Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm x , biết: $|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2$.

Lời giải

vì $x^2 + |x - 1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x - 1| = x^2 + 2$ hay $|x - 1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 67. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIỄN 2016-2017)

Tìm x , biết

$$\text{a) } \frac{x}{9} = \frac{16}{x} \quad \text{b) } x^3 + 27 = 0 \quad \text{c) } \left| x \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) \right| = x \quad \text{d) } |x + 3| + |x - 5| = 8$$

Lời giải

HSTL

Câu 68. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIỄN)

a. Tìm x biết: $(x - 1)^5 = -243$

b. Tìm x biết: $|4 - x| + 2x = 3 \quad (1)$

Lời giải

a. $(x - 1)^5 = -243 = (-3)^5$

$$x - 1 = -3$$

$$x = -2$$

b. $|4 - x| + 2x = 3 \quad (1)$

* Với $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$

$(1) \Leftrightarrow 4 - x + 2x = 3 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn đk)

* Với $4 - x < 0 \Rightarrow x > 4$

$(1) \Leftrightarrow x - 4 + 2x = 3 \Leftrightarrow x \leq 4$ (loại)

Câu 69. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN HỒNG LÊ 2017-2018)

Tìm x biết $1\frac{1}{3} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$1\frac{1}{3} - \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Câu 70. (Đề HSG Toán 7_huyện_Nga Sơn_2016-2017).

Tìm x biết:

a) $3|2x-1|+1=(-2)^2-3.(-2)^3;$

b) $x^2(x+2)+4(x+2)=0;$

c) $(x-2)(x+3)<0$;

d) $3^{x+2}+4.3^{x+1}+3^{x-1}=6^6.$

Lời giải

a) $3|2x-1|+1=(-2)^2-3.(-2)^3$

$$\Rightarrow |2x-1|=9 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \\ 2x-1=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-4 \end{cases}.$$

b) $x^2(x+2)+4(x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$

Vì $(x-2)(x+3)<0$ nên $x-2, x+3$ khác dấu mà $x+3>x-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow -3<x<2.$$

d) $3^{x+2}+4.3^{x+1}+3^{x-1}=6^6 \Rightarrow 3^{x-1}.(3^3+4.3^2+1)=2^6.3^6$

$$\Rightarrow 3^{x-1}.64=2^6.3^6 \Rightarrow 3^{x-1}=3^6 \Rightarrow x=7.$$

Câu 71. (Đề HSG Toán 7_huyện_Quốc Oai_2016-2017).

Tìm x :

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2;$

b) $2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2};$

c) $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0.$

Lời giải

a) $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{5}\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}.$

b) $2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}.$

c) $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^{x+2} [1 - (x-3)^6] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ (x-3)^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}.$$

Câu 72. (Đề HSG Kỳ Xuân 2017-2018) .

Tìm x, biết: $|5x-4|=|x+2|.$

Lời giải

$$|5x-4|=|x+2| \Rightarrow \begin{cases} 5x-4=x+2 \\ 5x-4=-x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 6x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 73. (Đề HSG Toán 7_huyện_Quốc Oai_2016-2017).

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2x^2 \leq 77 \Rightarrow y^2 \leq \frac{77}{3} \Rightarrow y^2 \leq 25$$

$$\text{Mà } 2x^2 \text{ chẵn; } 77 \text{ lẻ} \Rightarrow 3y^2 \text{ lẻ} \Rightarrow y^2 \text{ lẻ} \Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$$

$$+) y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37 (\text{ktm})$$

$$+) y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5; y = 3$$

$$+) y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1; y = 5$$

Vậy số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$ là $(x; y) = (5; 3); (1; 5)$.

Câu 74. (Đề HSG Kỳ Xuân 2017-2018) .

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 8(x - 2009)^2 = 25 - y^2 \Rightarrow 8(x - 2009)^2 + y^2 = 25 (*)$$

$$\text{Vì } y^2 \geq 0 \text{ nên } (x - 2009)^2 \leq \frac{25}{8}; \text{ suy ra } \begin{cases} (x - 2009)^2 = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2 = 17 (\text{ktm}) \\ (x - 2009)^2 = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Vậy $x = 2009; y = 5$.

Câu 75. (Đề thi HSG 7 TX CHÍ LINH 2016-2017)

Tìm x biết:

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$$

$$\text{b) } \left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ x = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\text{b) } \left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017 \Rightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} + 2017 = \frac{4035}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{4035}{2} \\ x + \frac{3}{4} = \frac{-4035}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8067}{4} \\ x = \frac{-8073}{4} \end{cases}$$

Câu 76. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2017-2018)

Tìm x, biết:

1) $|5x - 3| - x = 7$

2) $|2x + 3| < 4x + 9$

3) $\frac{16^x}{8} = 2^x$

Lời giải

1) $|5x - 3| - x = 7 \Leftrightarrow |5x - 3| = x + 7 \quad (1)$

ĐK: $x \geq 7$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = x + 7 \\ 5x - 3 = -(x + 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \text{ (t/m)} \\ x = \frac{-2}{3} \text{ (t/m)} \end{cases}$$

2) $|2x + 3| < 4x + 9$

ĐK: $4x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{4}$

Pt $\Leftrightarrow -(4x + 9) < 2x + 3 < 4x + 9 \Leftrightarrow x > -2$

3) $\frac{16^x}{8} = 2^x \Leftrightarrow 2^{4x-3} = 2^x \Rightarrow 4x - 3 = x \Rightarrow x = 1$

Câu 77. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2017-2018)

Tìm x ; y ; z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x + z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$

Câu 78. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2017-2018)

Tìm x, biết: $|2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| = 2$.

Lời giải

Có $|2018 - x| \geq 0$ và

$$|2017 - x| + |2019 - x| = |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$\Rightarrow |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2017)(2019 - x) \geq 0$ và $2018 - x = 0$, suy ra: $2017 \leq x \leq 2019$ và $x = 2018 \Rightarrow x = 2018$

Vậy $x = 2018$.

Câu 79. (Đề thi HSG 7 huyện THANH CHUÔNG)

Tìm x biết :

$$|3 - 2x| = x + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

Lời giải

$$\text{a) Nếu } x \geq \frac{3}{2} \text{ thì } |3 - 2x| = x + 1 \Leftrightarrow 2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Nếu } x < \frac{3}{2} \text{ thì } |3 - 2x| = x + 1 \Leftrightarrow 3 - 2x = x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 + \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = 2014 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right) \Leftrightarrow x = 2014$$

Câu 80. (Đề thi HSG 7 THÁI THỤY 2015-2016)

$$\text{Tìm x biết: } \frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$$

Lời giải

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{-4}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-4}{2}$$

Câu 81. (Đề thi HSG 7 Trường ĐỨC THẮNG)

Tìm x biết:

a. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b. $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

c. $|4x + 3| - |x - 1| = 7$

Lời giải

a) $\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \dots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 4^x$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^{2x} \Leftrightarrow x = -18$$

b) $\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 8^x \Leftrightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{3x}$

$$\Leftrightarrow 2^{12} = 2^{3x} \Rightarrow x = 4$$

c) $x < -\frac{3}{4} \Rightarrow -(4x + 3) - (1 - x) = 7 \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$ (t/m)

$$-\frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow 4x + 3 - (1 - x) = 7 \Rightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x + 3 - (x - 1) = 7 \Rightarrow x = 1 \text{ (T/m)}$$

Câu 82. (Đề thi HSG 7 huyện PHÚ THIỆT 2009-2010)

a. Tìm x, biết: $2(x - 1) - 3(2x + 2) - 4(2x + 3) = 16$;

b. Tìm x, biết: $3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$

Lời giải

a) $2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$

$$\Leftrightarrow -12x - 20 = 16 \Leftrightarrow -12x = 16 + 20 = 36 \Leftrightarrow x = 36 : (-12) = -3$$

b) Nếu $x > \frac{1}{2}$. Ta có: (vì nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 = 0$)

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{7}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22} = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{21} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3} > \frac{1}{2}$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$. Ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{7}{2} : (1 - 2x) = \frac{21}{22} \Leftrightarrow -2x = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} : (-2) = -\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 83. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN)

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn: $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

Lời giải

Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$

và $|x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

suy ra: $(2x - y + 7)^{2012} = 0$ và $|x - 3|^{2013} = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 7 = 0$ (1) và $x - 3 = 0$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow x = 3$

Từ (1) $\Rightarrow y = 2x + 7 = 2.3 + 7 = 13$

Vậy cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(3; 13)$

Câu 84. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ THU' 2015-2016)

Tìm x biết: $\frac{2}{|x - 2| + 2} = \frac{3}{|6 - 3x| + 1}$

Lời giải

$$\frac{2}{|x - 2| + 2} = \frac{3}{3|x - 2| + 1} \Leftrightarrow 6|x - 2| + 2 = 3|x - 2| + 6$$

$$\Leftrightarrow 3|x - 2| = 4 \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \frac{4}{3} \\ x - 2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$

Câu 85. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

Tìm x biết

$$a) -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

Lời giải

$$a) -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \frac{130}{343}, \text{ Vậy } x = \frac{130}{343}$$

$$b) \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49.$$

Vậy $x = 49$

Câu 86. (Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm x , biết: $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$.

Lời giải

vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 87. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIỄN 2016-2017)

Tìm x , biết

$$a) \frac{x}{9} = \frac{16}{x} \quad b) x^3 + 27 = 0 \quad c) \left| x(x^2 - \frac{5}{4}) \right| = x \quad d) |x+3| + |x-5| = 8$$

Lời giải

HSTL

Câu 88. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIỄN)

a. Tìm x biết: $(x-1)^5 = -243$

b. Tìm x biết: $|4-x| + 2x = 3 \quad (1)$

Lời giải

a. $(x-1)^5 = -243 = (-3)^5$

$$x-1 = -3$$

$$x = -2$$

b. $|4-x| + 2x = 3 \quad (1)$

* Với $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$

$(1) \Leftrightarrow 4-x+2x=3 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn đk)

* Với $4-x < 0 \Rightarrow x > 4$

$(1) \Leftrightarrow x-4+2x=3 \Leftrightarrow x=4$ (loại)

Tìm x biết $1\frac{1}{3} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$1\frac{1}{3} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Câu 90. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2019-2020)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$.

Lời giải

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$.

Ta có $|x - y| + |y - z| + |z - x| = |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có $|x| + x = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

Từ đó ta có $\begin{cases} |x - y| + (x - y) \\ |y - z| + (y - z) \\ |z - x| + (z - x) \end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Suy ra $|x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$$

Câu 91. (Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$.

Lời giải

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2} \quad (2)$

Xét $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow 2y+4z=0$ (vô lí)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ (2) suy ra

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Suy ra: $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \quad \text{và} \quad \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

Đặt $\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$ thì $\frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{k}$

Suy ra $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 28k$ (3)

Thay $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ vào (3) ta được :

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$

$$56k^2 - 28k = 0$$

$$56k(2k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \quad (\text{loại})$$

Hoặc $k = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn)

+ Với $k = \frac{1}{2}$ thì tìm được $x = 1; y = 2; z = 3$

Kết luận: Vậy $x = 1; y = 2; z = 3$

Câu 92. (Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Tìm x biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

Lời giải

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} [1 - (x-5)^{12}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } (x-5)^{x+1} = 0, \text{ hoặc } 1 - (x-5)^{12} = 0$$

$$(x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}.$$

Vậy: $x = 4; x = 5; x = 6$

Câu 93. (Đề thi HSG 7 Kinh Môn 2017-2018)

Tìm x biết: $|x^2 + |x+1|| = x^2 + 5$

Lời giải

vì $x^2 + |x+1| > 0$ nên ta có:

$$|x^2 + |x+1|| = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + |x+1| = x^2 + 5$$

$$\Rightarrow |x+1| = 5 \Rightarrow x+1 = 5 \text{ hoặc } x+1 = -5$$

* Trường hợp 1: $x+1=5 \Rightarrow x=4$

* Trường hợp 2: $x+1=-5 \Rightarrow x=-6$

Vậy $x=-6$ hoặc $x=4$

Câu 94. (Đề thi HSG 7 Nga Sơn)

a) $3|2x-1|+1=(-2)^2-3(-2)^3$

b) $x^2(x+2)+4(x+2)=0$

c) $(x-2)(x+3)<0$

d) $3^{x+2}+4.3^{x+1}+3^{x-1}=6^6$

Lời giải

a) $3|2x-1|+1=(-2)^2-3(-2)^3$

$\Rightarrow |2x-1|=9 \Rightarrow 2x-1=9$ hoặc $2x-1=-9$

$\Rightarrow x=5$ hoặc $x=-4$

b) $x^2(x+2)+4(x+2)=0 \Rightarrow (x+2)(x^2+4)=0$

$\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x+2=0$ hoặc $x^2+4=0$

* Nếu $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

* Nếu $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ (Vô lý)

Vậy $x=-2$

c) $(x-2)(x+3)<0$

Vì $(x-2)(x+3)<0$ Nên $x-2$ và $x+3$ khác dấu. Mà: $x+3>x-2$ với mọi x nên suy ra:

$x-2<0$ và $x+3=0 \Rightarrow -3<x<2$.

Vậy: $-3<x<2$

d) $3^{x+2}+4.3^{x+1}+3^{x-1}=6^6 \Rightarrow 3^{x-1}(3^3+4.3^2+1)=2^6.3^6$

$\Rightarrow 3^{x-1}.64=2^6.3^6 \Rightarrow 3^{x-1}=3^6 \Rightarrow x=7$

Câu 95. (Đề thi HSG 7 huyện Phú Thiện 2019-2020)

1) Tìm x , biết: $2(x-1)-3(2x+2)-4(2x+3)=16$;

2) Tìm x , biết: $3\frac{1}{2}:|2x-1|=\frac{21}{22}$

Lời giải

1) $2(x-1)-3(2x+2)-4(2x+3)=16$

$\Leftrightarrow 2x-2-6x-6-8x-12=16 \Rightarrow 2x-2-6x-6-8x-12=16 \Rightarrow 2x-2-6x-6-8x-12=16$

$\Leftrightarrow -12x-20=16$

$\Leftrightarrow -12x=16+20=36$

$\Leftrightarrow x=36:(-12)=-3$

$$2) \quad 3\frac{1}{2}:|2x-1| = \frac{21}{22}$$

Nếu $x > \frac{1}{2}$. Ta có: (vì nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $2x-1=0$)

$$3\frac{1}{2}:|2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$\frac{7}{2}:(2x-1) = \frac{21}{22}$$

$$2x-1 = \frac{7}{2}:\frac{21}{22} = \frac{7}{2}.\frac{22}{21} = \frac{11}{3}$$

$$2x = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{14}{3}:2 = \frac{7}{3} > \frac{1}{2}$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$. Ta có:

$$3\frac{1}{2}:|2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$\frac{7}{2}:(1-2x) = \frac{21}{22}$$

$$-2x = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{8}{3}:(-2) = -\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 96. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -2)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau $A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$.

Lời giải

$$A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$$

$$A = (|x-2013| + |x-2015|) + |x-2014|$$

$$\text{Vì: } |x-2015| = |2015-x|$$

$$\Rightarrow A = (|x-2013| + |2015-x|) + |x-2014|$$

$$\text{Mà: } |x-2013| + |2015-x| \geq |x-2013+2015-x| = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} A = (|x-2013| + |2015-x|) + |x-2014| \geq 2 + |x-2014| \\ |x-2014| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2013)(2015-x) \geq 0 \\ x-2014=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2013 \leq x \leq 2015 \\ x=2014 \end{cases} \Leftrightarrow x=2014$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x=2014$

Câu 97. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016-2017)

Tìm x biết:

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\text{b) } \left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017.$$

Lời giải

$$\text{a) } \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ x = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

b)

$$\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017 \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} + 2017 \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{4035}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{4035}{2} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{4035}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8067}{4} \\ x = -\frac{8073}{4} \end{cases}$$

Câu 98. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 3)

Tính giá trị của biểu thức : $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$

Lời giải

Tính giá trị của biểu thức : $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$

Ta có $|x - 2| = 1$

$$x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

$$x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào biểu thức ta được $6.1^2 + 5.1 - 2 = 9$

Thay $x = 3$ vào biểu thức ta được $6.3^2 + 5.3 - 2 = 67$

Câu 99. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 4)

Tìm GTNN của biểu thức sau: $A = |x - 2006| + |2007 - x|$ khi x thay đổi.

Lời giải

$$\text{Có } A = |x - 2006| + |2007 - x| \geq |x - 2006 + 2007 - x|$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2006)(2007 - x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

Vậy $A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Câu 100. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 8)

a) $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

b) $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

a) $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

$$|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| \geq |x - 2010 + 2014 - x| + |x - 2012| \geq 4$$

Mà $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

nên (*) xảy ra dấu “=”

Suy ra: $\begin{cases} x - 2012 = 0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$

b) $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

$$y = \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

$$2x - 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Câu 101. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Bảo 2017-2018)

Tìm x, biết: $|2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| = 2$.

Lời giải

Có $|2018 - x| \geq 0$ và

$$|2017 - x| + |2019 - x| = |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$\Rightarrow |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2017)(2019 - x) \geq 0$ và $2018 - x = 0$, suy ra:

$$2017 \leq x \leq 2019 \text{ và } x = 2018 \Rightarrow x = 2018$$

Vậy $x = 2018$.

Câu 102.(Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2019-2020)

Tìm x biết: $|x + 2013| + |x + 2014| + |x + 2015| = 2$

Lời giải

Ta có: $|x + 2013| = |-x - 2013| \geq -x - 2013, \forall x$

$$|x + 2015| \geq x + 2015, \forall x$$

$$|x + 2014| \geq 0, \forall x$$

$$\Rightarrow |x + 2013| + |x + 2014| + |x + 2015| \geq 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2013 \geq 0 \\ x + 2015 \geq 0 \\ x + 2014 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2013 \geq x \geq -2015 \\ x = -2014 \end{cases}$$

Vậy $x = -2014$.

Câu 103.(Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2019-2020)

Tìm số nguyên x, y biết $2017x^2 + 2018 = y^2$

Lời giải

$$\text{Có } 2016x^2 + 2018 = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) \quad (*)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow (y + x)(y - x) \text{ chẵn}$$

$$\text{Có } y + x + y - x = 2y \text{ chẵn}$$

$$\text{Suy ra } y + x; y - x \text{ cùng chẵn} \Rightarrow (y + x)(y - x) : 4$$

Mà $2016x^2 + 2018$ không chia hết cho 4.

Vậy không tìm được số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức trên.

Câu 104.(Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN 2019-2020)

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn: $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2012 \text{ là số tự nhiên chẵn} \Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$$

$$\text{Và } |x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$$

$$\text{Do đó, từ } (2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2x - y + 7 = 0(1) \text{ và } x - 3 = 0(2)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow x = 3.$$

Từ (1) $\Rightarrow y = 2x + 7 = 2.3 + 7 = 13$

Vậy cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(3; 13)$.

Câu 105.(Đề thi HSG 7 huyện ĐÔNG HƯNG 2019-2020)

Tìm số x thỏa mãn:

a) $|x - 2012| + |x - 2013| = 2014$

b) $3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)]$

Lời giải

a) Nếu $x \leq 2012$ từ (1) suy ra : $2012 - x + 2013 - x = 2014 \Rightarrow x = \frac{2011}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Nếu $2012 \leq x < 2013$ từ (1) suy ra : $x - 2012 + 2013 - x = 2014$ hay $1 = 2014$ (loại)

Nếu $x \geq 2013$ từ (1) suy ra : $x - 2012 + x - 2013 = 2014 \Rightarrow x = \frac{6039}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị x là : $\frac{2011}{2}$ hoặc $\frac{6039}{2}$

b) $3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - (4 - 1)]$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - 3]$$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - 13$$

$$3 + 2^{x-3} = 11$$

$$2^{x-3} = 8 = 2^3$$

$$x - 3 = 3$$

$$x = 6.$$

Vậy $x = 6$

Câu 106.(Đề thi HSG 7 huyện ĐÔNG HƯNG 2019-2020)

Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

$$x(y + 3) - (y + 3) = 3$$

$$(x - 1)(y + 3) = 3$$

$$\begin{cases} x - 1 = \pm 1 \\ y + 3 = \pm 3 \end{cases}; \begin{cases} x - 1 = \pm 3 \\ y + 3 = \pm 1 \end{cases}$$

Các cặp $(x; y)$ là: $(2; 0), (0; -6), (4; -2), (-2; -4)$.

Câu 107.(Đề thi HSG 7 huyện QUỲNH PHỤ 2019-2020)

Tìm các số x, y, z , biết: $(x - 1)^{2016} + (2y - 1)^{2016} + |x + 2y - z|^{2017} = 0$

Lời giải

Ta có: $(x-1)^{2016} \geq 0, \forall x$

$$(2y-1)^{2016} \geq 0, \forall y$$

$$|x+2y-z|^{2017} \geq 0, \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} \geq 0, \forall x, y, z$$

$$\text{Mà } (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$$

$$\text{Nên dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ 1+2\cdot\frac{1}{2}-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

Câu 108.(Đề thi HSG 7 huyện QUỲNH PHỤ 2019-2020)

Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6-3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

$$\text{Vậy: } (x; y) = (2; 0) = (4; -2) = (0; 6) = (-2; -4).$$

Câu 109.(Đề thi HSG 7 huyện VŨ NHƯ 2019-2020)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \frac{1}{3}:|x-1|-0,25=\frac{5}{12}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3}:|x-1|-0,25=\frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{3}:|x-1|=\frac{2}{3}$$

$$|x-1|=\frac{1}{2}$$

Khi đó $x - 1 = \frac{1}{2}$ hoặc $x - 1 = -\frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Câu 110.(Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2007-2008)

Tìm x biết

a) $|2,5 - x| = 1,3$

b) $|x - 2007| + |2008 - x| = 0$

Lời giải

a) $x = 1,2$ hoặc $x = 3,8$.

b) $x = 2007$ và $x = 2008$.

Điều này là vô lí.

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Câu 111.(Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2019 - 2020)

Tìm x, y, z biết $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

$$\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{10} - |x + 2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow |x + 2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = -2; 2$$

$$\Leftrightarrow x = -4; 0$$

Câu 112.(Đề thi HSG 7 huyện ĐÔNG HƯNG 2005 - 2006)

Tìm x biết : $\underbrace{|x - 2| + |x - 2| + \dots + |x - 2|}_{n=2006} + 2005x = 0; (x < 0)$

Lời giải

Vì tổng trên có 2006 hạng tử $|x - 2|$ nên ta có $2006|x - 2| + 2005x = 0$ (1)

Mà $x < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -x + 2$.

Nên từ (1) ta có $2006(-x + 2) + 2005x = 0$

Suy ra $-2006x + 4012 + 2005x = 0$

Suy ra $x = 4012$ (không thỏa mãn điều kiện $x < 0$)

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán

Câu 113. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2019 - 2020)

a) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $3xy - 5 = x^2 + 2y$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

Theo đề ta có $3xy - 2y = x^2 + 5 \Rightarrow y(3x - 2) = x^2 + 5 \quad (1)$

Do x, y nguyên nên suy ra $x^2 + 5$ chia hết cho $3x - 2$

$\Rightarrow 9(x^2 + 5)$ chia hết cho $3x - 2$

$\Rightarrow 9x^2 + 45$ chia hết cho $3x - 2$ $\Rightarrow 9x^2 - 6x + 6x - 4 + 49$ chia hết cho $3x - 2$

$\Rightarrow 3x(3x - 2) + 2(3x - 2) + 49$ chia hết cho $3x - 2$

$\Rightarrow 49$ chia hết cho $3x - 2 \Rightarrow 3x - 2 \in \{-49; -7; -1; 1; 7; 49\}$

$\Rightarrow 3x \in \{-47; -5; 1; 3; 9; 51\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 17\}$

Thay x lần lượt vào (1) ta được $y \in \{6; 2; 6\}$

Vậy các cặp số (x, y) là $(1; 6), (3; 2), (17; 6)$.

b)

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \\ &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10(3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$ với mọi n là số nguyên dương.

Câu 114. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2014-2015)

Tìm x biết:

a. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$

b. $|2x - 1| - x = 1$

c. $\left|\frac{3}{5} - \frac{1}{2}x\right| > \frac{2}{5}$

Lời giải

a. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

b. $|2x - 1| - x = 1$

Nếu $x < \frac{1}{2}$ ta có: $-2x+1-x=1 \Rightarrow x=0$ (thỏa mãn)

c. $\left| \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x \right| > \frac{2}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x > \frac{2}{5} \Leftrightarrow x < \frac{2}{5} \text{ hoặc } \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x < -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy $x < \frac{2}{5}$ hoặc $x > 2$

Tìm x biết $|x+3|-2x=|x-4|$

Tìm x biết $|x+3|-2x=|x-4|$

x	-3	4
x+3	- 0 +	+
x-4	- -	0 +

Xét khoảng $x > 4$, ta có (1) trở thành: $-2x = -7 \Leftrightarrow x = 3,5$ (không thuộc khoảng đang xét)

Câu 116. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2014-2015)

Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết : $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$

Ta có: $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$

$$8(x-2009)^2 = 25 - y^2$$

$$8(x-2009)+y^2=25(*)$$

Vì $y^2 \geq 0$ nên $(x-2009)^2 \leq \frac{25}{8}$, suy ra $(x-2009)^2 = 0$ hoặc $(x-2009)^2 = 1$

Với $(x-2009)^2 = 1$, thay vào (*) ta có: $y^2 = 17$ (loại)

Với $(x-2009)^2 = 0$ thay vào (*) ta có $y^2 = 25$, suy ra $y = 5$ (do $y \in \mathbb{N}$)

Từ đó tìm được $x = 2009, y = 5$

Câu 117. (Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2012-2013)

Tìm x, biết : $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 118. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2013-2014)

a. $|x-2010| + |x-2012| + |x-2014| = 4$

$$\text{b. } |2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y \text{ và } y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{7}{7} - \frac{11}{11} + \frac{101}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{5}{5} + \frac{5}{5}} = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{0} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{0}$$

Lời giải

a. $|x-2010| + |x-2012| + |x-2014| \geq |x-2010+2014-x| + |x-2012| \geq 4(*)$

Mà $|x-2010| + |x-2012| + |x-2014| = 4$ nên $(*)$ xảy ra dấu “=” suy ra

$$\begin{cases} x-2012 = 0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$$

$$\text{b. } y = \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow 2x-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4} \text{ hoặc } 2x-3 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Câu 119. (Đề thi HSG 7 huyện Hạ Hòa 2110-2011)

Tìm x

$$\text{a. } |x-3,2| + \left|2x - \frac{1}{5}\right| = x+3$$

$$\text{b. } |2x-1| + 3 = 15$$

Lời giải

a. $|x-3,2| + \left|2x - \frac{1}{5}\right| = x+3$ với mọi x , dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $3,2 - x \geq 0$;

$$\left|2x - \frac{1}{5}\right| \geq \left|2x - \frac{1}{5}\right| \geq 3,2 - x + 2x - \frac{1}{5} = x+3$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3,2 - x \geq 0 \\ 2x - \frac{1}{5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3,2 \\ x \geq 0,1 \end{cases}$. Vậy $0,1 \leq x \leq 3,2$

b. $|2x-1| + 3 = 15$

$$\Leftrightarrow |2x-1| = 12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=12 \\ 2x-1=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=13 \\ 2x=-11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6,5 \\ x=-5,5 \end{cases}$$

Câu 120. (Đề thi HSG 7 Cấp Trường năm 2014 – 2015)

Tìm x sao cho $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Leftrightarrow x = -4$$

Câu 121. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Hiệp Hòa 2016-2017)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

c) $|4x+3| - |x-1| = 7$

Lời giải

a) $\frac{1}{2.2} \cdot \frac{2}{2.3} \cdot \frac{3}{2.4} \cdot \frac{4}{2.5} \cdot \frac{5}{2.6} \cdot \dots \cdot \frac{30}{2.31} \cdot \frac{31}{2^6} = 4^x$

$$\frac{1.2.3 \dots 30.31}{1.2.3.4 \dots 30.31.2^{30}.2^6} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow x = -18$$

$$b) \frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 8^x \Rightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4.6}{3.2} \right)^6 = 2^{3x} \Rightarrow 2^{3x} = 4^6$$

$$\Rightarrow 2^{3x} = 2^{12} \Rightarrow x = 4$$

$$c) x < -\frac{3}{4} \Rightarrow -(4x+3) - (1-x) = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}(\text{tm})$$

$$-\frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow 4x+3 - (1-x) = 7 \Rightarrow x = 1(\text{ktm})$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x+3 - (x-1) = 7 \Leftrightarrow x = 1(\text{tm})$$

Câu 122. (Đề thi HSG Toán 7 huyện 025 năm học 2017-2018)

Tìm x biết:

$$a) 1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$$

$$b) |2x-1| - x = 4$$

Lời giải

$$a) \frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} : x = \frac{-26}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{26}$$

$$b) \dots \Rightarrow |2x-1| = 4+x$$

$$*) \text{ Với } 2x-1 \geq 0, \text{ từ (1) ta có: } 2x-1 = x+4 \Leftrightarrow x = 5(\text{tm})$$

$$*) \text{ Với } 2x-1 < 0 \Rightarrow (1) \text{ ta có: } 1-2x = x+4 \Rightarrow x = -1(\text{tm})$$

$$\text{Vậy } x = 5, x = -1$$

Câu 123. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 028 năm học 2015-2016)

$$\text{Tìm x biết: a) } \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$b) -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$a) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = -2 + 4 \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$b) -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4} \right) x = \frac{13}{14} \Rightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Rightarrow x = \frac{130}{343}$$

Câu 124. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 028 năm học 2015-2016)

$$\text{Tìm } x, y \in \mathbb{N} \text{ biết: } 25 - y^2 = 8.(x - 2009)^2$$

Lời giải

Ta có: $8(x-2009)^2 = 25 - y^2 \Rightarrow 8(x-2009)^2 + y^2 = 25(*)$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2009)^2 \leq \frac{25}{8} \Rightarrow \begin{cases} (x-2009)^2 = 1 \\ (x-2009)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 17(\text{ktm}) \\ y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (2009; 5)$

Câu 125. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Phú Thiện năm học 2015-2016)

a) Tìm x , biết: $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$

b) Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$

Lời giải

a) $2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$

$\Leftrightarrow -12x - 20 = 16 \Leftrightarrow -12x = 36 \Rightarrow x = -3$

b) Nếu $x > \frac{1}{2}$

$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = \frac{7}{3}(\text{tm})$

Nếu $x < \frac{1}{2}$, ta có $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (1-2x) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}(\text{tm})$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 126. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Đức Thọ năm học 2015-2016)

Tìm giá trị n nguyên dương biết a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$ b) $8 < 2^n < 64$

Lời giải

a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n \Rightarrow 3^{4n-3} = 3^n \Rightarrow 4n-3 = n \Rightarrow n = 1$

b) $8 < 2^n < 64 \Rightarrow 2^3 < 2^n < 2^6 \Rightarrow n = 4, n = 5$

Câu 127. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Thiệu Hóa năm học 2016-2017)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x; |3y+12| \geq 0 \forall y$, do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \geq 0 \forall x, y$, theo đề bài thì:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0. \text{ Khi đó:}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{6} = 0 \\ 3y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = -4 \end{cases}$$

Câu 128. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Thiệu Hóa năm học 2016-2017)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$$

Lập bảng

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Câu 129. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2017-2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy + 3x = 4$

Lời giải

Biến đổi được $x(2y + 3) = 4$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in U(4) \text{ và } 2y + 3 \text{ lẻ}$$

x	-4	-2	-1	1	2	4
$2y + 3$	-1	-2	-4	4	2	1
y	-2	Loại	Loại	Loại	Loại	-1

Câu 130. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2015-2016)

a) Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

b) Tìm x, y biết $|3 + y| + |2x + y| = 0$

Lời giải

a) Tính được $\left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) Vì $|3 + y| \geq 0, |2x + y| \geq 0 \Rightarrow |3 + y| + |2x + y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

Câu 131. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2015-2016)

Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

Lời giải

Viết được $(x+1)^2 = 42 + 8y^2$

Suy ra $(x+1)^2$ là số chẵn, để có $(x+1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài

Câu 132. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 038 năm học 2016-2017)

Tìm x , biết:

a) $(2x-1)^4 = 16$ b) $(2x+1)^4 = (2x+1)^6$ c) $||x+3|-8| = 20$

Lời giải

a) $(2x-1)^4 = 16 = (\pm 2)^4 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ x=-0,5 \end{cases}$

b) $(2x+1)^4 = (2x+1)^6 \Rightarrow \begin{cases} x=-0,5 \\ x=0 \\ x=-15 \end{cases}$

c) $||x+3|-8| = 20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|-8=20 \\ |x+3|-8=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3|=28 \\ |x+3|=-12 \text{ (ktm)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ x=-31 \end{cases}$

Câu 133. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 039 năm học 2016-2017)

Tìm giá trị n nguyên dương a) $\frac{1}{8} \cdot 16^n = 2^n$ b) $27 < 3^n < 243$

Lời giải

a) $\frac{1}{8} \cdot 16^n = 2^n \Rightarrow 2^{4n-3} = 2^n \Rightarrow 4n-3=n \Rightarrow n=1$

b) $27 < 3^n < 243 \Rightarrow 3^3 < 3^n < 3^5 \Rightarrow n=4$

Câu 134. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 039 năm học 2016-2017)

Tìm x biết $|2x+3| = x+2$

Lời giải

a) Ta có: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Nếu $x \geq -\frac{3}{2}$ thì $|2x+3| = x+2 \Rightarrow 2x+3 = x+2 \Rightarrow x = -1$ (tm)

Nếu $-2 \leq x < -\frac{3}{2}$ thì $|2x+3| = x+2 \Rightarrow -2x-3 = x+2 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$ (tm)

Nếu $x < -2$ thì không có giá trị của x thỏa mãn

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2006| + |2007 - x|$ khi x thay đổi

Lời giải

a) +Nếu $x < 2006$ thì $A = -x + 2006 + 2007 - x = -2x + 4013$

Khi đó $-x > -2016 \Rightarrow -2x + 4013 > -4012 + 4013 = 1 \Rightarrow A > 1$

+Nếu $2006 \leq x \leq 2007$ thì $A = x - 2006 + 2007 - x = 1$

+Nếu $x > 2007$ thì $A = x - 2006 - 2007 + x = 2x - 4013$

Do $x > 2007 \Rightarrow 2x - 4013 > 4014 - 4013 = 1 \Rightarrow A > 1$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $2006 \leq x \leq 2007$

Câu 135. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu sơn năm học 2015-2016)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \forall x; |3y + 12| \geq 0 \forall y$, do đó: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \forall x, y$

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Câu 136. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu sơn năm học 2015-2016)

Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$

$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$

Lập bảng:

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Câu 137. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Vĩnh Lộc năm học 2016-2017)

Tìm x biết $\frac{1}{2} - \left|x + \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{3}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\text{TH1: } x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{30}$$

$$\text{TH2: } x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{11}{30}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{1}{30}; -\frac{11}{30} \right\}$$

Câu 138. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Vĩnh Lộc năm học 2016-2017)

Tìm x , biết: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ với n là số tự nhiên

Lời giải

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0 \Rightarrow (x+2)^{10} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = -2; x = -1; x = -3$$

Câu 139. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Hiền Quan năm học 2015-2016)

Tìm các số x, y, z biết:

$$\text{a) } (x-1)^3 = -8 \quad \text{b) } |9-7x| = 5x-3 \quad \text{c) } x-3\sqrt{x} = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } (x-1)^3 = -8 \Rightarrow x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b) } |9-7x| = 5x-3. \text{ Điều kiện } x \geq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9-7x = 5x-3 \\ 9-7x = 3-5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x = 12 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\text{c) } x-3\sqrt{x} = 0. \text{DK: } x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Câu 140. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Hiền Quan năm học 2015-2016)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $6x^2 + 5y^2 = 74$

Lời giải

$$\text{Từ } 6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{74}{6} \text{ mà } x \text{ nguyên} \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$$

$$\text{Mặt khác ta có } x^2 + 1 = 75 - 5x^2 - 5y^2 : 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10 (\text{ktm}) \\ x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \{(3, 2); (3, -2); (-3, 2); (-3, -2)\}$$

Câu 141. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Ân Tường Đông năm học 2014-2015)

Tìm x biết:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} & \text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \\ \text{c) } \left|x - \frac{2}{5}\right| = 0,24 & \text{d) } \left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1 \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} \Rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} - \frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 5x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \left|x - \frac{2}{5}\right| = 0,24 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{100} + \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{25} \\ x = -\frac{24}{100} + \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{25} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1 &\Rightarrow \left(\frac{7}{3}x - \frac{6}{10}\right) : \frac{17}{5} = 1 \\ \Rightarrow \frac{7}{3}x - \frac{3}{5} = \frac{17}{5} &\Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{17}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} = 4 \\ \Rightarrow x = 4 : \frac{7}{3} &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

Câu 142. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Phú Thiện năm học 2009-2010)

$$\text{a) Tìm } x, \text{ biết: } 2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$$

$$\text{b) Tìm } x, \text{ biết: } 3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$$

Lời giải

$$\text{a) } 2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16 \Leftrightarrow -12x = 36 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{b) Nếu } x > \frac{1}{2}, \text{ ta có: } 3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = \frac{7}{3} (\text{tm})$$

$$\text{Nếu } x < \frac{1}{2}, \text{ ta có: } 3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (1-2x) = \frac{21}{22} \Rightarrow -2x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3} (\text{tm})$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 143. (Đề thi HSG 7 Huyện Phú Thiện 2009 -2010)

a) Tìm x , biết: $2(x-1) - 3(2x+2) - 4.(2x+3) = 16$

b) Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$

c) Tìm x, y, z , biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$

Lời giải

a) $2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16 \Leftrightarrow -12x = 36 \Leftrightarrow x = -3$

b) Nếu $x > \frac{1}{2}$, ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = \frac{7}{3} (tm)$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$, ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (1-2x) = \frac{21}{22} \Rightarrow -2x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3} (tm)$$

Vậy $x = \frac{7}{3} \vee x = -\frac{4}{3}$

c) Từ $x+z=2y$ ta có:

$$x - 2y + z = 0 \text{ hay } 2x - 4y + 2z = 0 \text{ hay } 2x - y - 3y + 2z = 0 \text{ hay } 2x - y = 3y - 2z$$

Vậy nếu $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15} \Rightarrow 2x-y=3y-2z=0$

Từ $2x-y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y-2z=0$ và $x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0 \Rightarrow \frac{1}{2}y+y-z=0$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}y - z = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}z \Rightarrow x = \frac{1}{3}z$$

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\left\{x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; z \in \mathbb{R}\right\}$ hoặc $\left\{x = \frac{1}{2}y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y\right\}$ hoặc

$$\{x \in \mathbb{R}, y = 2x, z = 3x\}$$

Câu 144. (Đề thi HSG 7 Trường THCS Ân Tường Đông 14-15)

Tìm x biết:

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

c) $\left|x - \frac{2}{5}\right| = 0,24$

d) $\left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1$

Lời giải

$$a) \frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} \Rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} - \frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 5x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$c) \left|x - \frac{2}{5}\right| = 0,24 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{100} + \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{25} \\ x = -\frac{24}{100} + \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{25} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d) \left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} &= 1 \Rightarrow \left(\frac{7}{3}x - \frac{6}{10}\right) : \frac{17}{5} = 1 \\ \Rightarrow \frac{7}{3}x - \frac{3}{5} &= \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{17}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} = 4 \\ \Rightarrow x &= 4 : \frac{7}{3} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

Câu 145. (Đề thi HSG 7 Huyện Bô Lý 15-16)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

b) Tìm x : $\frac{x+4}{2010} + \frac{x+3}{2011} = \frac{x+2}{2012} + \frac{x+1}{2013}$

c) Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2014x$

Lời giải

a) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y+z+1}{x} &= \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} \\ &= \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \end{aligned}$$

Vì $x+y+z \neq 0$, do đó: $x+y+z = 0,5$. Thay vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

$$b) \frac{x+4}{2010} + \frac{x+3}{2011} = \frac{x+2}{2012} + \frac{x+1}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{2010} + 1 + \frac{x+3}{2011} + 1 = \frac{x+2}{2012} + 1 + \frac{x+1}{2013} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2014) \left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2014 = 0 \Leftrightarrow x = -2014$$

$$c) x^2 + 2014x = x(x+2014) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -2014 \\ x > 0 \end{cases}$$

Câu 146. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 17-18)

Tìm x , biết $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

$$\text{Vì } x^2 + |x-1| > 0 \text{ nên } (1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2 \Rightarrow |x-1| = 2$$

$$+\text{Nếu } x \geq 1 \text{ thì } (*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$+\text{Nếu } x < 1 \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

Câu 147. (Đề thi HSG 7 huyện Nga Sơn 2016-2017)

Tìm x biết:

$$a) 3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$b) x^2(x+2) + 4(x+2) = 0$$

$$c) (x-2)(x+3) < 0$$

$$d) 3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

Lời giải

$$a) 3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\Rightarrow |2x-1| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \\ 2x-1=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-4 \end{cases}$$

$$b) x^2(x+2) + 4(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$c) \text{ Vì } (x-2)(x+3) < 0 \text{ nên } x-2, x+3 \text{ khác dấu mà } x+3 > x-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 2$$

$$d) 3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6 \Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 2^6 \cdot 3^6$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot 64 = 2^6 \cdot 3^6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x = 7$$

Câu 148. (Đề thi HSG 7 huyện Quốc Oai 2016-2017)

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$

Lời giải

$$2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2x^2 \leq 77 \Rightarrow y^2 \leq \frac{77}{3} \Rightarrow y^2 \leq 25$$

$$\text{Mà } 2x^2 \text{ chẵn; } 77 \text{ lẻ} \Rightarrow 3y^2 \text{ lẻ} \Rightarrow y^2 \text{ lẻ} \Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$$

$$+) y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37 \text{ (không phải số tự nhiên)}$$

$$+) y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5; y = 3$$

$$+) y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1; y = 5$$

Vậy số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$ là $(x; y) = (5; 3); (1; 5)$

Câu 149. (Đề thi HSG 7 Trường Kỳ Xuân 2017-2018)

Tìm x , biết: $|5x-4| = |x+2|$

Lời giải

$$|5x-4|=|x+2| \Rightarrow \begin{cases} 5x-4=x+2 \\ 5x-4=-x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 6x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 150. (Đề thi HSG 7 Trường Kỳ Xuân 2017-2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$

Lời giải

Ta có: $8(x - 2009)^2 = 25 - y^2 \Rightarrow 8(x - 2009)^2 + y^2 = 25 (*)$

Vì $y^2 \geq 0$ nên $(x - 2009)^2 \leq \frac{25}{8}$; suy ra $\begin{cases} (x - 2009)^2 = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2 = 17 (ktm) \\ (x - 2009)^2 = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Vậy $x = 2009; y = 5$

Câu 151. (Đề thi HSG 7 huyện Lâm Thao 2016-2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết :

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

$$\text{Có: } |7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 2000$$

Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$

$A \geq 0$, mà $A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$; hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Vậy $\text{Min} A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$; hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Câu 152. (Đề thi HSG 7 huyện Quốc Oai 2016-2017)

Tìm x :

$$a) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \quad b) 2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \quad c) (x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$$

Lời giải

$$a) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2 \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$b) 2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

$$c) (x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^{x+2} [1 - (x-3)^6] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ (x-3)^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

Câu 153. (Đề thi HSG 7 Trường Phú Khánh 2018-2019)

a) Tìm x biết: $|x-2| + |3-2x| = 2x+1$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

a) Nếu $x > 2$ ta có: $x-2+2x-3=2x+1 \Leftrightarrow x=6$

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2-x+2x-3=2x+1 \Rightarrow x=-2$ (ktm)

Nếu $x < \frac{3}{2}$, ta có: $2-x+3-2x=2x+1 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$

Vậy $x=6; x=\frac{4}{5}$

b) Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(y+2) = 3$

$$\Leftrightarrow (y+2)(x-1) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$$

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Câu 154. (Đề thi HSG 7 Trường Cự Khê 2016-2017)

Tìm x biết:

a) $|x-2010| + |x-2012| + |x-2014| = 4$

b) $|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

a) $|x-2010| + |x-2012| + |x-2014| \geq |x-2010+2014-x| + |x-2012| \geq 4(*)$

Mà $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=4$, nên (*) xảy ra dấu "=" $\Rightarrow \begin{cases} x-2012=0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x=2012$

$$b) y = \frac{3\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4} \\ 2x-3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Câu 155. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

Tìm x , biết:

$$a) \frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27 \cdot (x-1)} \quad b) x-3\sqrt{x}=0 (x \geq 0) \quad c) |2x-7|=|5x+2|$$

Lời giải

$$a) 81(x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{4}{9} \\ x-1 = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$b) \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=9 \end{cases}$$

$$c) |2x-7|=|5x+2| \Rightarrow \begin{cases} 2x-7=5x+2 \\ 2x-7=-5x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{5}{7} \end{cases}$$

Câu 156. (Đề thi HSG 7 Trường Nguyễn Du 2016-2017)

Tìm x thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$a) 3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$b) |x+3| + |x+7| = 4x$$

Lời giải

$$a) 3^x \cdot (3^2 + 1) = 810 \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$$

$$b) \text{ lập luận có } x > 0. \text{ Với } x > 0 \Rightarrow x+3+x+7=4x \Leftrightarrow x=5$$

Câu 157. (Đề thi HSG 7 MỸ HƯNG 2016-2017)

Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8} \Rightarrow x(1-2y) = 40$$

$$\Rightarrow 1-2y \in \text{ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1; \pm 5$$

$1-2y$	-5	-1	1	5
x	-8	-40	40	8
y	3	1	0	-2

Vậy ta có các cặp số $(x; y) = \{(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)\}$

Câu 158. (Đề thi HSG 7)

a) Tìm x biết: $3x - |2x + 1| = 2$

b) Tìm x, y, z biết: $3(x-1) = 2(y-2); 4(y-2) = 3(z-3)$ và $2x + 3y - z = 50$.

Lời giải

a) Nếu $x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x - 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3(tm)$

Nếu $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x + 2x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(ktm)$

Vậy $x = 3$

b) $\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $2x + 3y - z = 50 \Rightarrow x = 11; y = 17; z = 23$.

Câu 159. (Đề thi HSG 7)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $2x + \frac{1}{7} = \frac{1}{y}$

Lời giải

Đề $\Rightarrow \frac{7.2x+1}{7} = \frac{1}{y} \Rightarrow y(14x+1) = 7 \Rightarrow (x; y) = (0; 7)$

Câu 160. (Đề thi HSG 7)

Tìm x biết:

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

b) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

Lời giải

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right| \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$

$$b) (x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-7)^{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ x-7=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=8 \end{cases}$$

Câu 161. (Đề thi HSG 7 Hưng Vũ 2018-2019)

Tìm x , biết

$$a) \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{15}x \right) = -\frac{7}{6}$$

$$b) \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) - \left(\frac{5}{8}x + 1 \right) = 5$$

Lời giải

$$a) \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{15}x = -\frac{7}{6}$$

$$\frac{-2}{5} + \frac{5}{2} - \frac{4}{9}x = \frac{-7}{6}$$

$$-\frac{4}{9}x = \frac{-7}{6} - \left(\frac{-2}{5} + \frac{5}{2} \right)$$

$$-\frac{4}{9}x = \frac{-49}{15}$$

$$x = \frac{-49}{15} : \frac{-4}{9}$$

$$x = \frac{147}{20}$$

$$b) \frac{1}{4}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 - \frac{5}{8}x - 1 = 5$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8} \right)x = 5 - (-1 - 2 - 1)$$

$$\frac{7}{24}x = 9$$

$$x = 9 : \frac{7}{24}$$

$$x = \frac{216}{7}$$

Câu 162. (Đề thi HSG 7 Đề 075)

Tìm x biết: $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} &= \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006} \Rightarrow \frac{x-1}{2009} - 1 + \frac{x-2}{2008} - 1 = \frac{x-3}{2007} - 1 + \frac{x-4}{2006} - 1 \\ \Rightarrow \frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} &= \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006} \\ \Leftrightarrow (x-2010) \left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2006} \right) &= 0 \Rightarrow x = 2010 \end{aligned}$$

Câu 163. (Đề thi HSG 7 THCS Vạn Long 2018-2019)

a) Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

b) Tìm x, y biết $|3+y| + |2x+y| = 0$

Lời giải

a) Tính được $\left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) Vì $|3+y| \geq 0, |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y| = 0 \\ |2x+y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Câu 164. (Đề thi HSG 7 trường Cao Viên 2013-2014)

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$

Lời giải

Ta có: $A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$

$$\Rightarrow A = (|-x+2013| + |x-2015|) + |x-2014|$$

$$\Rightarrow A \geq |-x+2013+x-2015| + |x-2014| = 2 + |x-2014| \geq 2$$

$$A = 2 \Leftrightarrow (-x+2013)(x-2015) \geq 0 \text{ và } x-2014 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2013 \leq x \leq 2015 \\ x = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014$$

Vậy $\min A = 2 \Leftrightarrow x = 2014$

Câu 165. (Đề thi HSG 7 trường Tam Hưng 2016-2017)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho:

a) $|x+5| \leq 2$.

b) $(x^2-20)(x^2-15)(x^2-10)(x^2-5) < 0$.

Lời giải

a) $|x+5| \leq 2 \Rightarrow |x+5| \in \{0,1,2\}$

$$|x+5|=0 \Rightarrow x=-5$$

$$|x+5|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-5=-4 \\ x=-1-5=-6 \end{cases}$$

$$|x+5|=2 \Rightarrow \begin{cases} x=-2-5=-7 \\ x=2-5=-3 \end{cases}$$

b) Ta có $x^2 - 20 < x^2 - 15 < x^2 - 10 < x^2 - 5$

Vì $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5) < 0$ nên trong tích $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5)$ có 1 thừa số âm, hoặc có 3 thừa số âm

Trường hợp 1: Tích $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5)$ có 1 thừa số âm

Suy ra: $x^2 - 20 < 0 < x^2 - 15$

$$\Rightarrow 15 < x^2 < 20$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \text{ (vì } x^2 \text{ là số chính phương)}$$

$$\Rightarrow x = \pm 4$$

Trường hợp 2: Tích $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5)$ có 3 thừa số âm

Suy ra: $x^2 - 10 < 0 < x^2 - 5$

$$\Rightarrow 5 < x^2 < 10$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \text{ (vì } x^2 \text{ là số chính phương)}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3$$

Câu 166. (Đề thi HSG 7 trường Tam Hưng 2016-2017)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn:

a) $2^m - 2^n = 2048$

b) $3m + 4n - mn = 16$

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $m > n$

Ta có: $2^m - 2^n = 2048$

$$\Rightarrow 2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{11}$$

Vì $m > n$ nên $2^{m-n} \geq 2^1$, do đó 2^{m-n} là số chẵn.

Suy ra: $2^{m-n} - 1$ là số lẻ

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^n = 2^{11} \\ 2^{m-n} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11 \\ m = 12 \end{cases}$$

b) Biến đổi $3m + 4n - mn = 16 \Rightarrow (3-n)(m-4) = 4.$

Suy ra $(3-n);(m-4)$ là ước của 4

Do đó, ta lập bảng sau :

$3-n$	1	4	2	-2	-1	-4
$m-4$	4	1	2	-2	-4	-1
n	2	-1	1	5	4	7
m	8	5	6	2	0	3

Vậy: $(m,n) = \{(8;2);(0;4);(5;-1);(3;7);(6;1);(2;5)\}$

Câu 167. (Đề thi HSG 7 trường Bình Minh 2013-2014)

Tìm x thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) $3^{x+2} + 3^x = 810$

b) $|x+3| + |x+7| = 4x$

Lời giải

a)

$$3^x \cdot (3^2 + 1) = 810$$

$$\Rightarrow 3^x = 81$$

$$\Rightarrow x = 4$$

b) Vì $|x+3| \geq 0; |x+7| \geq 0 \Rightarrow |x+3| + |x+7| \geq 0$ với mọi giá trị của x nên $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow |x+3| + |x+7| = x+3+x+7 = 4x \Rightarrow x = 5$

Câu 168. (Đề thi HSG 7 trường Bình Minh 2013-2014)

a) Chứng minh với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ ta có: $|a| + |b| \geq |a+b|$

b) Áp dụng tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x-2| + |x-8|$

Lời giải

a) Với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ ta có: $|a| + |b| \geq a+b$ và $|a| + |b| \geq -a-b = -(a+b)$

Suy ra: $|a| + |b| \geq |a+b|$

b) Ta có: $B = |x-2| + |x-8| = |x-2| + |8-x| \geq x-2+8-x.$

$$\Rightarrow B \geq 6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)(8-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$

Vậy $\min B = 6 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$

Câu 169. (Đề thi HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

a) Tìm x biết: $|x-2| + |3-2x| = 2x+1$ (1)

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

a) Nếu $x > 2$ thì từ (1) $\Rightarrow x - 2 + 2x - 3 = 2x + 1 \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ thì từ (1) $\Rightarrow 2 - x + 2x - 3 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2$ (không thỏa mãn)

Nếu $x < \frac{3}{2}$, thì từ (1) $\Rightarrow 2 - x + 3 - 2x = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 6; x = \frac{4}{5}$

b) Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 3 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 2) = 3$

$\Leftrightarrow (y + 2)(x - 1) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

$y + 2$	3	1	-1	-3
$x - 1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Câu 170. (Đề thi HSG 7 huyện Năm Căn 2017-2018)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x+1 \in U(4) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4\}$

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$

Câu 171. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trãi 2018-2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{2(7x-8)}{2(2x-3)} = \frac{7(2x-3)+5}{2(2x-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

Đặt $B = \frac{5}{2(2x-3)}$ thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất

Mà B lớn nhất khi $2x-3$ có giá trị dương nhỏ nhất.

Vì x là số tự nhiên nên suy ra $2x-3$ có giá trị là số tự nhiên nhỏ nhất

Suy ra: $2x-3=1 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Vậy để phân số $A = \frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất thì $x=2$.

Khi đó :

$$\text{Max } A = \frac{7.2-8}{2.2-3} = 6$$

Câu 172. (Đề thi HSG 7 huyện ... 2019-2020)

Tìm số x thỏa mãn:

a) $|x-2012|+|x-2013|=2014$

b) $3+2^{x-3}=24-[4^2-(2^2-1)]$

Lời giải

a) Nếu $x \leq 2012$ từ đề bài suy ra $2012-x+2013-x=2014 \Rightarrow x = \frac{2011}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $2012 \leq x < 2013$ từ đề bài suy ra :

$$x-2012+2013-x=2014 \Rightarrow 0x=2013 \text{ (không có giá trị của } x \text{ thỏa mãn)}$$

Nếu $x \geq 2013$ từ đề bài suy ra $x-2012+x-2013=2014 \Rightarrow x = \frac{6039}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{2011}{2}; \frac{6039}{2} \right\}$

b) $3+2^{x-3}=24-[16-(4-1)]$

$$\Leftrightarrow 3+2^{x-3}=24-[16-3]$$

$$\Leftrightarrow 3+2^{x-3}=24-13$$

$$\Leftrightarrow 3+2^{x-3}=11$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-3}=8=2^3$$

$$\Rightarrow x-3=3$$

$$\Rightarrow x=6$$

Câu 173. (Đề thi HSG 7 huyện ... 2018-2019)

Tìm x, y nguyên biết: $xy+3x-y=6$

Lời giải

$$x(y+3)-(y+3)=3 \Rightarrow (x-1)(y+3)=3$$

Vì x, y nguyên nên $x-1, y+3$ là các số nguyên và là ước của 3 .

Ta có: $U(3)=\{1;-1;3;-3\}$

Do đó ta lập bảng sau:

$x-1$	1	-1	3	-3
$y+3$	3	-3	1	-1
x	2	0	4	-2
y	0	-6	-2	-4

Vậy: Các cặp $(x; y)$ là $(2; 0); (0; -6); (4; -2); (-2; -4)$

Câu 174. (Đề thi HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017-2018)

1) Tìm x, y biết: $x(x-y) = \frac{3}{10}$ và $y(x-y) = -\frac{3}{50}$

2) Tìm x biết: $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$

Lời giải

1) Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được:

$$x(x-y) - y(x-y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-y) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = \left(\pm\frac{3}{5}\right)^2$$

Suy ra $x-y = \pm\frac{3}{5}$

Thay $x-y = \frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{10}$

Thay $x-y = -\frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{10}$

2) Từ $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$ suy ra: $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng dấu

Dễ thấy $x-3 < x+\frac{1}{2}$ nên ta có:

TH1: $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng dương $\Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

TH2: $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng âm $\Leftrightarrow x+\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

Vậy $x > 3$ hoặc $x < -\frac{1}{2}$

Câu 175. (Đề thi HSG 7 huyện Bồ Trách 2017-2018)

Tìm cặp số nguyên (x, y) biết $x+y = x.y$

Lời giải

$$x+y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y: y-1 \Rightarrow y-1+1: y-1 \Rightarrow 1: y-1$, do đó $y-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=2 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) là $(0, 0); (2, 2)$

Câu 176. (Đề thi HSG 7 huyện Bồ Trạc 2017-2018)

Tìm x , biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$

Lời giải

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x \quad (1)$$

Vì $VT \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, do đó:

$$|x+1|=x+1; |x+2|=x+2; |x+3|=x+3$$

$$(1) \Rightarrow x+1+x+2+x+3=4x \Rightarrow x=6$$

Câu 177. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm x biết: $2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=10800$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=2^x.2^2.3^x.3.5^x=10800$$

$$\Leftrightarrow (2.3.5)^x=900$$

$$\Leftrightarrow 30^x=30^2$$

$$\Rightarrow x=2$$

Vậy $x=2$.

Câu 178. (Đề thi HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Tìm x, y biết:

$$1) \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2.$$

$$2) 2^{x-1} + 5.2^{x-2} = \frac{7}{32}.$$

$$3) |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0.$$

Lời giải

1)

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

2)

$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{32}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32}$$

$$\Rightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} : \frac{7}{2} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\Rightarrow x-1 = -4$$

$$\Rightarrow x = -3$$

$$3) |x+5| + (3y-4)^{2016} = 0 \quad (1)$$

Vì $|x+5| \geq 0; (3y-4)^{2016} \geq 0$ nên:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} |x+5| = 0 \\ (3y-4)^{2016} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 0 \\ 3y-4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Câu 179. (Đề thi HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho : $2xy + x - 2y = 4$.

Lời giải

Ta có: $2xy + x - 2y = 4$

$$\Leftrightarrow x(2y+1) - (2y+1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3 = (\pm 1) \cdot (\pm 3) = (\pm 3) \cdot (\pm 1)$$

$x-1$	1	-1	3	-3
x	2	0	4	-2
$2y+1$	3	-3	1	-1
y	1	-2	0	-1

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (0; -2); (4; 0); (-2; -1)\}$

Câu 180. (Đề HSG toán 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tìm x, y biết:

a) $\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$

b) $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

Lời giải

a) Từ gt Câu toán ta có: $(x-1)^2 = 900 \Rightarrow x-1 = \pm 30 \Rightarrow \begin{cases} x = 31 \\ x = 29 \end{cases}$

b) Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau từ 2 tỉ số đầu ta có:

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$$

Kết hợp với giả thiết $\Rightarrow \frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

+Nếu $2x+3y-1 \neq 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

+Nếu $2x+3y-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1-3y$. Thay vào 2 tỉ số đầu ta tính được $y = \frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}$

Câu 181. (Đề HSG toán 7 THCS Phú Nhuận 204 - 2015)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x+2| + |2x-2013|$ với x là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x + y + z = xyz$

Lời giải

a) Ta có: $A = |2x+2| + |2x-2013| = |2x+2| + |2013-2x| \geq |2x+2+2013-2x| = 2015$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $\text{Max} A = 2015$ khi $x = -1$

b) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo Câu ra $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu Câu ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2$

Th1: $y-1=1 \Rightarrow y=2$ và $z-1=2 \Rightarrow z=3$

Th2: $y-1=2 \Rightarrow y=3$ và $z-1=1 \Rightarrow z=2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Câu 182. (Đề HSG toán 7 THCS Phú Nhuận 204 - 2015)

Tìm x , biết $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2 \Rightarrow |x-1| = 2$

+Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+Nếu $x < 1 \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 183. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ với 35; 210; 12

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35, 210, 12

Ta có: $(x+y).35 = (x-y).210 = 12.xy$

Từ $(x+y).35 = (x-y).210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175}$

$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$ thay vào đẳng thức $(x+y).35 = 12xy$ ta được

$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\}$ mà $y > 0 \Rightarrow y = 5$

Với $y = 5$ thì $x = 7$

Câu 184. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Tìm x biết:

a) $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

c) Tìm x, y nguyên biết $2xy - x - y = 2$

Lời giải

a) Ta có: $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Rightarrow x = \frac{130}{343}$

b) Ta có: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$

$\Rightarrow 2x+1 = 99 \Leftrightarrow x = 49$

c) $2xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow (2y-1)(2x-1) = 5$

Học sinh xét 4 trường hợp tìm ra $(x; y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$

Vậy $(x; y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$

Câu 185. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015} \Rightarrow \frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015} \Rightarrow x = -\frac{1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} = -2016$

Vậy $x = -2016$

Câu 186. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Khuyến)

Tìm x biết: $x^2 - 2(x + 3) = x - 6$

Lời giải

$$x^2 - 2(x + 3) = x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Câu 187. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Khuyến)

Tìm x biết: $\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$

Lời giải

$$\frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Câu 188. (Đề thi HSG 7)

Tìm x biết:

$$a) (2x - 1)^4 = 16 \quad b) (2x + 1)^4 = (2x + 1)^6 \quad c) \|x + 3\| - 8 = 20$$

Lời giải

$$a) (2x - 1)^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) (2x + 1)^4 = (2x + 1)^6 \Rightarrow x = -0,5; x = 0; x = -1,5$$

$$c) \|x + 3\| - 8 = 20 \Rightarrow \begin{cases} \|x + 3\| = 20 + 8 \\ \|x + 3\| = -20 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x + 3\| = 28 \\ \|x + 3\| = -12(VN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 28 \\ x + 3 = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -31 \end{cases}$$

Câu 189. (Đề thi HSG 7)

Tìm các số x, y, z biết:

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$$

Lời giải

$$a)(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3x-5)^{2006} = 0 \\ (y^2-1)^{2008} = 0 \Leftrightarrow x = z = \frac{5}{3}; \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ (x-z)^{2100} = 0 \end{cases}$$

Câu 190. (Đề thi HSG 7 PGD huyện Châu Đức 2018-2019)

Tìm x biết $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

Lời giải

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 191. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Tính $B = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\text{Vì } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$$

$$\text{Vậy } B = 4 \text{ khi } x = \frac{1}{2} \text{ và } B = 7 \text{ khi } x = -\frac{1}{2}$$

Câu 192. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

$$\text{Vì } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \forall x; |3y + 12| \geq 0 \forall y, \text{ do đó: } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \forall x, y$$

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Câu 193. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm x biết: $2009 - |x - 2009| = x$

Lời giải

$$2009 - |x - 2009| = x \Rightarrow 2009 - x = |x - 2009|$$

$$\Rightarrow |x - 2009| = -(x - 2009) \Rightarrow x \leq 2009$$

Câu 194. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y - z| = 0$

Lời giải

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = \frac{9}{10}$$

Câu 195. (Đề thi HSG 7 huyện QUẾ SƠN 2018-2019)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Lời giải

a)

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 2^x$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^x$$

$$\Rightarrow x = -36$$

b)

$$\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 2^x \Rightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^x \Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{12} = 2^x$$

$$\Rightarrow x = 12$$

Câu 196. (Đề thi HSG 7 trường VỊ THANH 2018-2019)

a) Tìm x biết: $x^2 - 2(x + 3) = x - 6$

b) Tìm x biết: $\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$

a)

$$x^2 - 2(x + 3) = x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

b)

$$\frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Câu 197. (Đề thi HSG 7 trường TÀO SƠN huyện ANH SƠN 2017-2018)

Tìm x biết:

$$a) \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right|$$

$$b) 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$$

Lời giải

a)

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

b)

$$2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 4 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 10800 : 12 = 900$$

$$\Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

Câu 198. (Đề thi HSG 7 huyện HƯƠNG KHÊ 2017-2018)

Tìm x , biết $|x - 1| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$|x-1| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow A = \frac{14}{27} \\ x-1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Câu 199. (Đề thi HSG 7 huyện HÒA BÌNH 2016-2017)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$

b) $2^{x+\frac{1}{2}} = 8$

Lời giải

a) $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - 2$$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{-3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{9}{10}$$

b) $2^{x+\frac{1}{2}} = 8$

$$2^{x+\frac{1}{2}} = 2^3$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Câu 200. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Lời giải

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x \quad (1)$$

Vì VT $\geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, do đó:

$$|x+1| = x+1; |x+2| = x+2; |x+3| = x+3$$

$$(1) \Rightarrow x+1+x+2+x+3 = 4x \Rightarrow x = 6$$

Câu 201. (Đề thi HSG 7 trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

Tìm x, y biết:

a) $3 : 2\frac{1}{4} = \frac{3}{4} : (6x)$

b) $|2x-3| = 5+x$

c) $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$

d) $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} + \frac{y}{3} (x, y \in \mathbb{Z}^+)$

Lời giải

a) $x = \frac{3}{32}$.

b) Th1: Nếu $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì ta có:

$$2x - 3 = 5 + x \Leftrightarrow x = 8(\text{tm})$$

Th2: Nếu $2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ thì ta có: $-2x + 3 = 5 + x \Leftrightarrow x = -2(\text{tm})$

Vậy $x \in \{-2; 8\}$.

c) $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} + 9\right) 3^x = 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{28}{3} \cdot 3^x = 28 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

d) Đưa về phương trình ước số $x \cdot (1 + 2y) = 6 \Rightarrow x = 2; y = 1$.

Câu 202. (Đề thi HSG 7 trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

a) Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$.

b) Tìm x, y biết $|3 + y| + |2x + y| = 0$.

Lời giải

a) Tính được $\left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) Vì $|3 + y| \geq 0, |2x + y| \geq 0 \Rightarrow |3 + y| + |2x + y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3 + y| = 0 \\ |2x + y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Câu 203. (Đề thi HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

a) Tìm x biết $\left| 3x - 3 \right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0$

b) Cho $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$

Tìm số nguyên dương x để $B = 115$

Lời giải

a) $\left| 3x - 3 \right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0 \Rightarrow \left| 3x - 3 \right| + 2x + 1 = 3x + 1 (*)$

Điều kiện để x thỏa mãn bài toán là $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

Khi đó $x \geq \frac{-1}{3} \Rightarrow 2x+1 \geq 0$ nên (*) trở thành

$$|3x-3|+2x+1=3x+1 \Leftrightarrow |3x-3|=x \text{ (điều kiện } x \geq 0)$$

Nếu $x \geq 1$ ta có $3x-3=x$ nên $x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x \leq 1$ ta có $3-3x=x$ nên $x=\frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}$

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2.3}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3.4}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{4.5}{2} \right) + \dots + \frac{1}{x} \left(\frac{x(x+1)}{2} \right) \\ \text{b)} \quad &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (2+3+4+\dots+(x+1)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } B = 115 \text{ khi } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2} \right) = 115 \Leftrightarrow x(x+3) = 460$$

Mà x là số nguyên dương nên x và $x+3$ là ước dương của 460 nên $x = 20$

Vậy $x = 20$.

Câu 204. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn:

$$\text{a)} \quad 3x(3y-2)+3y=9$$

$$\text{b)} \quad 5^x + 5^y = 3250 \quad (x < y)$$

Lời giải

$$\text{a)} \text{ Biến đổi } (3x-2)(3x+1)=7 \Rightarrow \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=3; y=0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \text{ Biến đổi } 5^x \cdot (5^{y-x} + 1) = 5^3 \cdot 26 \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^3 \\ 5^{y-x} + 1 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Câu 205. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm x thỏa mãn: $|x-1|+|x-5|+|x-2007|=2006$

Lời giải

Ta có:

$$|x-1|+|x-5|+|x-2007|=|x-1|+|x-5|+|2007-x| \geq x-1+0+2007-x=2006$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 = 0 \\ 2007-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 5 \\ x \leq 2007 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Tìm x biết:

$$a) 3^{x+1} = 243$$

$$b) \frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

Lời giải

$$a) \quad 3^{x+1} = 243 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^5 \\ \Rightarrow x+1 = 5 \Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$

$$b) \frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \\ x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{-1}{30} \\ x = -\frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{11}{30} \end{cases}$$

Câu 207. (Đề thi HSG 7 trường THCS Hồng Đà 2015 - 2016)

$$a) \text{Tìm các số } x, y, z \text{ biết rằng } \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

$$b) \text{Tìm } x: \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

$$c) \text{Tìm } x \text{ để biểu thức sau nhận giá trị dương: } x^2 + 2016x$$

Lời giải

a) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} \\ = \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Vì $x+y+z \neq 0 \Rightarrow x+y+z = 0,5$. Thay kết quả này vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \text{ tức là } \frac{1,5-x}{x} = \frac{2,5-y}{y} = \frac{-2,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

$$b) \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015} \\ \Rightarrow \frac{x+4}{2012} + 1 + \frac{x+3}{2013} + 1 = \frac{x+2}{2014} + 1 + \frac{x+1}{2015} + 1 \\ \Rightarrow (x+2016) \cdot \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x+2016 = 0 \Rightarrow x = -2016$$

c) Ta có: $x^2 + 2014x = x(x + 2014) \Rightarrow \begin{cases} x < -2014 \\ x > 0 \end{cases}$

Câu 208. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết:

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$

b) $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} \& xy = 405 \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{81} = \frac{xy}{5 \cdot 9} = \frac{405}{45} = 9$

$\Rightarrow x^2 = 9 \cdot 25 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$

$\Rightarrow y^2 = 9 \cdot 81 = 27^2 \Rightarrow y = \pm 27$

Do x, y cùng dấu nên: $\begin{cases} x = 15; y = 27 \\ x = -15; y = -27 \end{cases}$

b) $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x} = \frac{1+9y-1-7y}{2x-7x} = \frac{2y}{-5x} = \frac{1+7y-1-5y}{7x-24} = \frac{2y}{7x-24}$

$\Rightarrow \frac{2y}{-5x} = \frac{2y}{7x-24} \Rightarrow -5x = 7x-24 \Rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$\frac{1+5y}{24} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -5-25y = 24y \Rightarrow 49y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{49}$

Vậy $x = 2; y = -\frac{5}{49}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 209. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm x , biết:

a) $(2x-1)^4 = 16$

b) $(2x+1)^4 = (2x+1)^6$

c) $||x+3|-8| = 20$

Lời giải

a) Tính đúng $x = 1,5; x = -0,5$

b) Tính đúng $x = -0,5; x = 0; x = -15$

$$c) \left| |x+3| - 8 \right| = 20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3| - 8 = 20 \\ |x+3| - 8 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| = 28 \\ |x+3| = -12(VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 28 \\ x+3 = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -31 \end{cases}$$

Câu 210. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm các số x, y, z biết:

$$a) (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

$$b) \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 116$$

Lời giải

$$a) (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\pm 1 \\ x=z \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y; z) \in \left\{ \left(\frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3} \right); \left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3} \right) \right\}$$

b) Từ giả thiết

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4; y=6; z=8 \\ x=-4; y=-6; z=-8 \end{cases}$$

Câu 211. (Đề thi HSG 7 trường THCS Hồng Đà 2015 - 2016)

$$a) \text{Cho } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}. \text{ Tìm số nguyên } x \text{ để } A \text{ là số nguyên}$$

b) Tìm số nguyên x, y sao cho $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 4, tức là $\sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Vậy giá trị x cần tìm là: 1; 4; 16; 25; 49

$$a) \text{Từ : } x - 2xy + y = 0 \Rightarrow (1-2y)(2x-1) = -1$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(1-2y)$ và $(2x-1)$ là các số nguyên do đó ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} 1-2y=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1-2y=-1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số x, y như trên thỏa mãn điều kiện đầu bài

Câu 212. (Đề thi HSG 7 – Thị xã Chí Linh 2016 – 2017)

Tìm x biết:

a) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$

b) $\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017$

Lời giải

a, $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{-7}{12} \end{cases}$

b, $\left|x + \frac{3}{4}\right| - \frac{1}{2} = 2017 \Rightarrow \left|x + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} + 2017 = \frac{4035}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{4035}{2} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{4035}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8067}{4} \\ x = \frac{-8073}{4} \end{cases}$$

Câu 213. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Mô 2017 – 2018)

Tìm giá trị của x biết:

a) $|5x - 3| - x = 7$ b) $|2x - 3| - 4x < 9$ c) $\frac{16^x}{8} = 2^x$

Lời giải

a) $|5x - 3| - x = 7 \Leftrightarrow |5x - 3| = x + 7 \ (x \geq -7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = x + 7 \\ 5x - 3 = -(x + 7) \end{cases}$$

Vậy ta có $x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = -\frac{2}{3}$

b) $|2x - 3| - 4x < 9 \Rightarrow |2x - 3| < 9 + 4x \ (1)$

$$4x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-9}{4}$$

$$(1) \Leftrightarrow -(4x + 9) < 2x - 3 < 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow x > -2$$

c) $\frac{16^x}{8} = 2^x \Leftrightarrow 2^{4x-3} = 2^x \Rightarrow 4x - 3 = x \Rightarrow x = 1$

Câu 214. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thanh Chương 2019 – 2020)

Tìm x biết :

a) $|3-2x|=x+1$

b) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2014}).x = \frac{2013}{1}+\frac{2012}{2}+...+\frac{2}{2012}+\frac{1}{2013}$

Lời giải

a. Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $|3-2x|=x+1 \Leftrightarrow 2x-3=x+1 \Leftrightarrow x=4$

Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|3-2x|=x+1 \Leftrightarrow 3-2x=x+1 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Vậy $x=4$ hoặc $x=\frac{2}{3}$

b. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2014}).x = \frac{2013}{1}+\frac{2012}{2}+...+\frac{2}{2012}+\frac{1}{2013}$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2014}).x = \frac{2012}{2}+1+\frac{2011}{3}+1...+\frac{2}{2012}+1+\frac{1}{2013}+1+1$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2014}).x = \frac{2014}{2}+\frac{2014}{3}+...+\frac{2014}{2012}+\frac{2014}{2013}+\frac{2014}{2014}$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2014}).x = 2014(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}) \Leftrightarrow x=2014$

Câu 215. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

a) Tìm x biết: $\frac{1}{2}:2x=-\frac{1}{3}$

b) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x+4^x=5^x$

Lời giải

a) $\frac{1}{2}:2x=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}x=-\frac{1}{3}$

$x=\frac{-1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{-1}{2}.\frac{4}{1}=\frac{-4}{3}$

Vậy $x=\frac{-4}{3}$

b) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x+4^x=5^x$

+) Với $x=0$, $x=1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x=2$ thay vào ta được $3^2+4^2=5^2$ (đúng), vậy $x=2$ thỏa mãn

+) $x>2$

$$3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \quad (*)$$

$$\text{Với } x > 2 \text{ ta có } \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\left(\text{vì } \frac{3}{5} < 1; \frac{4}{5} < 1 \right)$$

Suy ra $x > 2$ không thỏa mãn

Vậy $x = 2$

Câu 216. (Đề thi HSG 7 – Trường Nguyễn Chí – Huyện Đông Sơn 2017 – 2018)

Tìm x biết

$$\text{a) } -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\text{c) Tìm } x, y \text{ nguyên biết } 2xy - x - y = 2$$

Lời giải

$$\text{a) } -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \frac{130}{343}, \text{ Vậy } x = \frac{130}{343}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99} \Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49. \text{ Vậy } x = 49$$

$$\text{c) } 2xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x(2y - 1) - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow (2y - 1)(2x - 1) = 5$$

$$\text{HS xét 4 trường hợp tìm ra } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

$$\text{Vậy } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

Câu 217. (Đề thi HSG 7 – Cấp Huyện mã T21 - 2019 – 2020)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } |x^2 + |x-1|| = x^2 + 2.$$

Lời giải

$$\text{vì } x^2 + |x-1| > 0 \text{ nên } (1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2 \text{ hay } |x-1| = 2$$

$$\text{+) Nếu } x \geq 1 \text{ thì } (*) \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) = > x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$

KL:.....

Câu 218. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$.

Lời giải

$$\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015}$$

$$x = \frac{-1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} = -2016$$

Vậy $x = -2016$

Câu 219. Câu 2. (Đề thi HSG 7 - Huyện Gia Viễn 2019 - 2020)

a. Tìm x biết: $(x-1)^5 = -243$

b. Tìm x biết: $|4-x| + 2x = 3 \quad (1)$

c. Tìm x, y, z biết: $\begin{cases} x+y+z=94(1) \\ 3x=4y=5z(2) \end{cases}$

Lời giải

a. $(x-1)^5 = -243 = (-3)^5$

$$x-1=-3$$

$$x=-2$$

b. $|4-x| + 2x = 3 \quad (1)$

* Với $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \quad (1) \Leftrightarrow 4-x+2x=3 \Rightarrow x=-1$ (thỏa mãn đk)

* Với $4-x < 0 \Rightarrow x > 4 \quad (1) \Leftrightarrow x-4+2x=3 \Leftrightarrow x=7/3 < 4$ (loại)

Vậy $x = -1$

c. Tìm x, y, z biết: $\begin{cases} x+y+z=94(1) \\ 3x=4y=5z(2) \end{cases}$

Ta có: BCNN $(3,4,5) = 60$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{3x}{60} = \frac{4y}{60} = \frac{5z}{60} \text{ hay } \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{20+15+12} = \frac{94}{47} = 2$$

$$\Rightarrow x = 40, y = 30; z = 24$$

Câu 220. (Đề thi HSG 7 - Huyện Gia Viễn 2019 - 2020)

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

$$2^x + 2^y = 72$$

Giả sử $x > y$ ta có $2^x + 2^y = 2^y (1 + 2^{x-y}) = 9 \cdot 2^3$

Do $1 + 2^{x-y}$ là số lẻ nên: $1 + 2^{x-y} = 1; 3; 9$

Ta có bảng giá trị sau:

$1 + 2x - y = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 9$	$2^y = 2^3$

Ta thấy $2^y = 2^3$ là phù hợp

$$\text{Vậy } \begin{cases} 2^{x-y} + 1 = 9 \\ 2^y = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-y} = 2^3 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy $x=6$ và $y=3$

Câu 221. (Đề thi HSG – Huyện Hiệp Hòa 2019 – 2020)

Tìm x biết:

a. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b. $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

c. $|4x+3| - |x-1| = 7$

Lời giải

a. $\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \dots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 4^x$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = 2^{2x} \quad x = -18$$

b. $\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 8^x$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x}$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{3x}$$

$$2^{12} = 2^{3x} \Rightarrow x = 4$$

$$c. x < -\frac{3}{4} \Rightarrow -(4x+3)-(1-x)=7 \Rightarrow x = -\frac{11}{3} \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$-\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \Rightarrow 4x+3-(1-x)=7 \Rightarrow x = 1 \text{ (Loại)}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x+3-(x-1) = 7 \Rightarrow x = 1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Câu 222. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Lạc 2019 2020)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$

Lời giải

$$+ \text{Với } x=1, \text{ ta có } 1! = y_2 \Rightarrow 1 = y_2 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$+ \text{Với } x=2, \text{ ta có } 1! + 2! = y_2 \Rightarrow 3 = y_2 \Rightarrow \text{không tìm được giá trị của } y \text{ thỏa mãn đề bài}$$

$$+ \text{Với } x=3, \text{ ta có } 1! + 2! + 3! = y_2 \Rightarrow 9 = y_2 \Rightarrow y = \pm 3$$

+ Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì 5!, 6!, ..., x! đều có chữ số tận cùng bằng 0) nên không phải là số chính phương, còn y_2 lại là số chính phương $\Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn đề bài là $(x, y) = (1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)$

Câu 223. (Đề thi HSG 7 – Huyện Phú Thiện 2009 – 2010)

$$a. \text{ Tìm } x, \text{ biết: } 2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16;$$

$$b. \text{ Tìm } x, \text{ biết: } 3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$c. \text{ Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15} \text{ và } x+z = 2y.$$

Lời giải

$$a, 2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$$

$$-12x - 20 = 16$$

$$-12x = 16 + 20 = 36$$

$$x = 36 : (-12) = -3$$

$$b, \text{ Nếu } x > \frac{1}{2}. \text{ Ta có: (vì nếu } x = \frac{1}{2} \text{ thì } 2x - 1 = 0)$$

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$\frac{7}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$$

$$2x - 1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22} = \frac{11}{3}$$

$$2x = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3} > \frac{1}{2}$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$. Ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$\frac{7}{2} : (1 - 2x) = \frac{21}{22}$$

$$-2x = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{8}{3} : (-2) = \frac{-4}{3} < \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = \frac{-4}{3}$

c, Từ $x + z = 2y$ ta có:

$$x - 2y + z = 0 \text{ hay } 2x - 4y + 2z = 0 \text{ hay } 2x - y - 3y + 2z = 0 \\ \text{hay } 2x - y = 3y - 2z$$

Vậy nếu: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ thì: $2x - y = 3y - 2z = 0$ (vì $5 \neq 15$).

Từ $2x - y = 0$ suy ra: $x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y - 2z = 0$ và $x + z = 2y \Rightarrow x + z + y - 2z = 0$ hay $\frac{1}{2}y + y - z = 0$

hay $\frac{3}{4}y - z = 0$ hay $y = \frac{2}{3}z$. suy ra: $x = \frac{1}{3}z$.

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\{x = z; y = z; z \in \mathbb{R}\}$

hoặc $\{x = y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}; y = 2x; z = 3x\}$

$$\frac{1}{2}y + y - z = 0$$

hay $\frac{3}{2}y - z = 0$ hay $y = \frac{2}{3}z$. suy ra: $x = \frac{1}{3}z$.

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\{x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z \mid z \in \mathbb{R}\}$

hoặc $\{x = \frac{1}{2}y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}; y = 2x; z = 3x\}$

Câu 224. (Đề thi HSG 7 - Huyện Vĩnh Bảo 2017 - 2018)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài ra: $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

Suy ra: $x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có:

$$1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

TH1: $\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ (loại)

Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị

Câu 225. (Đề thi HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016-2017)

a) $\frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27(x-1)}$

b) $x - 3\sqrt{x} = 0 \ (x \geq 0)$

c) $|2x - 7| = |5x + 2|$

Lời giải

a) $81(x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{4}{9} \\ x-1 = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ x = \frac{5}{9} \end{cases}$

b) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$

c) $|2x - 7| = |5x + 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 5x + 2 \\ 2x - 7 = -5x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{5}{7} \end{cases}$

Câu 226. (Đề thi HSG 7 Sơn Dương 2016-2017)

a) Tìm x biết: $|5x - 4| = |x + 2|$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x + xy + y = 9$

Lời giải

a) $|5x - 4| = |x + 2| \quad (1)$

Xét với $x < -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4 - 5x + 2 + x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (ktm)

Xét với $-2 < x < \frac{4}{5} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4 - 5x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (tm)}$

Xét với $x \geq \frac{4}{5}$ ta có $(1) \Leftrightarrow 5x - 4 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (tm)}$

Vậy $x = \frac{1}{3}; x = \frac{3}{2}$

b) Từ $x + xy + y = 9 \Leftrightarrow x(y+1) + (y+1) = 10 \Leftrightarrow (y+1)(x+1) = 10$

$x+1$	-1	1	-2	2	-5	5	-10	10
x	-2	0	-3	1	-6	4	-11	9
$y+1$	-10	10	-5	5	-2	2	-1	1
y	-11	9	-6	4	-1	1	-2	0

Câu 227. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2018-2019)

Tìm x, y nguyên biết $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

$$xy + 3x - y = 6 \Rightarrow (x-1) \cdot (y+3) = 3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = -3 \cdot -1 = -1 \cdot -3$$

Tìm ra các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $(4; 2); (2; 0); (-2; -4); (0; 6)$

Câu 228. (Đề thi HSG 7 Hoàng Hóa 2017-2018)

a) Tìm x biết: $(2x-3)^2 = 16$

b) Tìm x, y biết rằng: $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$

Lời giải

$$a) (2x-3)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=4 \\ 2x-3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3,5 \\ x=-0,5 \end{cases}$$

$$b) \text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 229. (Đề thi HSG 7 2017-2018)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết:

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84$

$$b) \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$$

Lời giải

$$a) \frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{49} = \frac{xy}{3 \cdot 7} = \frac{84}{21} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \cdot 7 = 28 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{7}$$

Do x, y cùng dấu nên:

$$\bullet x = 6; y = 2\sqrt{7}$$

$$\bullet x = -6; y = -2\sqrt{7}$$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} = -y \Rightarrow 1+3y = -12y \Leftrightarrow -15y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = -\frac{1}{15}$ thỏa mãn đề bài

Câu 230.(Đề thi HSG 7 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của biểu thức sau:

$$A = |x+1| + 5$$

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$$

Lời giải

$$A = |x+1| + 5$$

Ta có: $|x+1| \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = -1$

Vậy $\text{Min} A = 5 \Leftrightarrow x = -1$

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Ta có $x^2 \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5$$

Vậy $\text{Max} B = 5 \Leftrightarrow x = 0$

1) Tìm các số x, y, z biết:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$

b) $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

2) Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

b) Ta có: $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x; (2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y; |x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$

$$\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0. \text{ Dấu "=" xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

2. Ta có: $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 6-3$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1). \text{ Ta có bảng sau:}$$

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

Vậy $(x; y) = \{(2; 0); (4; -2); (0; 6); (-2; -4)\}$

Câu 232.(Đề thi HSG 7 Lộc Hà 2018-2019)

Tìm x , biết $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2 \Rightarrow |x-1| = 2$

+Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+Nếu $x < 1 \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 233.(Đề thi HSG 7 Lộc Hà 2018-2019)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x + y + z = xyz$

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài ra $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2$

Th1: $y-1=1 \Rightarrow y=2$ và $z-1=2 \Rightarrow z=3$

Th2: $y-1=2 \Rightarrow y=3$ và $z-1=1 \Rightarrow z=2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Câu 234.(Đề thi HSG 7 Minh An 2016-2017)

a) Tìm x biết: $|x-2| + |3-2x| = 2x+1$

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

c) Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

a) Nếu $x > 2$ ta có: $x-2+2x-3=2x+1 \Leftrightarrow x=6$

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2-x+2x-3=2x+1 \Rightarrow x=-2(ktm)$

Nếu $x < \frac{3}{2}$, ta có: $2-x+3-2x=2x+1 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$

Vậy $x=6; x=\frac{4}{5}$

b) Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(y+2) = 3$

$\Leftrightarrow (y+2)(x-1) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

b) Từ $2x = 3y; 4y = 5z; 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{2} = \frac{3y}{4} = \frac{5z}{3} = \frac{4x-3y+5z}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 235.(Đề thi HSG 7 Hương Khê 2016-2017)

Tìm x, biết : $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 236.(Đề thi HSG 7)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2003|$ với x là số nguyên

Lời giải

Ta có: $A = |2x-2| + |2x-2003| = |2x-2| + |2003-2x| \geq |2x-2+2003-2x| = 2011$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x-2)(2003-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2003}{2}$

Câu 237.(Đề thi HSG 7 Hương Khê 2016-2017)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài 1 $\frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có : $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2$

TH1: $y-1=1 \Rightarrow y=2$ và $z-1=2 \Rightarrow z=3$

TH2: $y-1=2 \Rightarrow y=3$ và $z-1=1 \Rightarrow z=2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1; 2; 3); (1; 3; 2)$

Câu 238.(Đề thi HSG 7 Hoàng Hóa 2016-2017)

a) Tìm tập hợp các số nguyên x, biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3, 2 + 4, 5 \cdot \frac{31}{45} \right) : \left(-21\frac{1}{2} \right)$$

b) Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

Lời giải

a) Ta có: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$. Lại có:

$$\left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot \frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45}\right) : \left(\frac{43}{2}\right) = \left(1 + \frac{38}{5}\right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$
 Do đó

$$-5 < x < \frac{-2}{5} \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1\}$$

b) Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow 11x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$ ta có:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} (tm)$$

Vậy $x = \frac{10}{11}$

Câu 239. (Đề thi HSG 7 Võ Thị Sáu 2016-2017)

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x-7}{x-2}; B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a) Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

Để A nguyên thì $\frac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$

$$B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

Để B nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Do đó $x=5, x=1, x=4, x=2$

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$

b) Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x=1$.

Câu 240.(Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Tìm hai số x và y sao cho $x + y = xy = x : y$ ($y \neq 0$)

Lời giải

$$\text{Từ } x + y = xy \Rightarrow x = xy - y = y(x - 1) \Rightarrow x : y = x - 1$$

$$\text{Ta lại có: } x : y = x + y \Rightarrow x + y = x - 1 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = xy - y = -x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy hai số cần tìm là } x = \frac{1}{2}; y = -1$$

Câu 241.(Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Tìm x , biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

Lời giải

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} \cdot [1 - (x-5)^{12}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-5)^{12} = 0 \end{cases}$$

$$(x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 1 \\ x-5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x = 4, x = 5, x = 6$$

Câu 242.(Đề thi HSG 7 đề 139 năm 2015-2016)

a) Tìm x biết: $|x-2| + |3-2x| = 4x+1$

b) Tìm x, y, z biết $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

c) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 7$

Lời giải

a) Nếu $x > 2$ ta có: $x - 2 + 2x - 3 = 4x + 1 \Rightarrow x = -6$ (ktm)

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2 - x + 2x - 3 = 4x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (ktm)

Nếu $x < \frac{3}{2}$ ta có: $2 - x + 3 - 2x = 4x + 1 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$ (tm)

$$\text{Vậy } x = \frac{4}{7}$$

b) Từ $2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{7}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Vậy ta tìm được $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

c) Ta có:

$$xy + 2x - y = 7 \Leftrightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(y + 2) = 5 = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$$

y + 2	5	1	-1	-5
x - 1	1	5	-5	-1
x	2	6	-4	0
y	3	-1	-3	-7

Vậy $(x; y) = \{(2; 3); (6; -1); (-4; -3); (0; -7)\}$

Câu 243. (Đề thi HSG 7 Huyện Thái Thụy năm 2017-2018)

Tìm x và y thỏa mãn $|2x - 2011| + (3y + 2012)^{2012} = 0$

Lời giải

Nhận xét $\begin{cases} |2x - 2011| \geq 0 \forall x \\ (3y + 2012)^{2012} \geq 0 \forall y \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x - 2011 = 0 \\ 3y + 2012 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2011}{2} \\ y = -\frac{2012}{3} \end{cases}$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{2011}{2}; -\frac{2012}{3} \right)$

Câu 244. (Đề thi HSG 7 Huyện Thái Thụy năm 2017-2018)

Tìm x thỏa mãn: $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Lời giải

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6}$$

$$= \left(\frac{6}{3} \right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2} \right)^6 = 2^{12} \Rightarrow 2^x = 2^{12} \Rightarrow x = 12$$

Vậy $x = 12$

Câu 245.(Đề thi HSG 7 đề 141 năm 2018-2019)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x + z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

Câu 246.(Đề thi HSG 7 đề 141 năm 2018-2019)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x - 2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}$, $(x - 2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 2010)^2 = 4 \\ (x - 2010)^2 = 1 \\ (x - 2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(\text{ktm}) \end{cases} \\ x - 2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(\text{ktm}) \\ x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(\text{ktm}) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2010; 6); (2010; -6)$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{2011}{2}; -\frac{2012}{3}\right)$

Câu 247.(Đề thi HSG 7 Huyện Duyên Hải năm 2016-2017)

Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $2x + 3y - z = 186$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x + 3y - z}{30 + 60 - 28} = \frac{186}{62} = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{15} = 3 \\ \frac{y}{20} = 3 \\ \frac{z}{28} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \\ z = 84 \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) = (45; 60; 84)$

Câu 248.(Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Cày năm 2017-2018)

a) Tìm x biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

b) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

a) $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

b) Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn

+) $x > 2$, ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1(*)$

Với $x > 2$ ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2 \dots \text{ktm}$$

Vậy $x = 2$

Câu 249.(Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Cày năm 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$.

Lời giải

Từ $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$= \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0$$

$$\Rightarrow 20z=24y=30x \Rightarrow 10z=12y=15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Giải ra và kết luận : $x = 12; y = 15; z = 18$

Vậy $(x; y; z) = (12; 15; 18)$

Câu 250.(Đề thi HSG 7 THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Tìm x , biết: $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$ (*)

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 251.(Đề thi HSG 7 Trường thực hành Sài Gòn 2017-2018)

a) $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24$

b) $x - y = xy = x : y$ ($y \neq 0$)

Lời giải

a) Ta có: $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3.24$

$$\Rightarrow 5^{2x-3}(5^2 - 1) = 5^3.24$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3 \Rightarrow 2x-3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

b) Ta có: $x - y = xy$ nên $x = xy + y = y(x+1) \Rightarrow x : y = x+1$

Mà $x - y = x : y$, do đó: $x+1 = x - y \Rightarrow y = -1$

Do đó: $x+1 = x \Rightarrow x+x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy $x = -\frac{1}{2}; y = -1$

Câu 252.(Đề thi HSG 7 Huyện Đất Mũi 2016-2017)

Tìm x , biết $|x-1| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$|x-1| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ x-1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 253.(Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 154 – 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| = 0 \\ \left| y + \frac{2}{3} \right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 254.(Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Trách 2017-2018)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \forall x; |3y + 12| \geq 0 \forall y$, do đó: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \forall x, y$

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Câu 255.(Đề thi HSG 7 Huyện Vị Thanh 2017-2018)

Tìm x , biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Lời giải

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x \quad (1)$$

Vì $VT \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, do đó:

$$|x+1| = x+1; |x+2| = x+2; |x+3| = x+3$$

$$(1) \Rightarrow x+1 + x+2 + x+3 = 4x \Rightarrow x = 6$$

Câu 256.(Đề thi HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

Tìm x biết $\left|\frac{2}{3}x + 1\right| + \frac{1}{4} = 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left|\frac{2}{3}x + 1\right| + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow \left|\frac{2}{3}x + 1\right| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1 = \frac{7}{4} \\ \frac{2}{3}x + 1 = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3}x = -\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ x = -\frac{33}{8} \end{cases}$$

Câu 257.(Đề thi HSG 7 2016-2017)

Tìm x , biết: $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ nên $(1) \Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$ (*)

+) Nếu $x \geq 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+) Nếu $x < 1$ thì $(*) \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

Câu 258.(Đề thi HSG 7 Huyện Tân Tạo 2018-2019)

Tìm x , biết: $|x-2| + |3-2x| = 2x+1$

Lời giải

Nếu $x > 2$ ta có: $x-2+2x-3=2x+1 \Leftrightarrow x=6$

Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2-x+2x-3=2x+1 \Rightarrow x=-2$ (ktm)

Nếu $x < \frac{3}{2}$, ta có: $2-x+3-2x=2x+1 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

Vậy $x=6$; $x = \frac{4}{5}$

Câu 259.(Đề thi HSG 7 Huyện Tam Nông 2018-2019)

Tìm x , biết:

a) $5^x + 5^{x+2} = 650$

b) $3 - \left| x - \frac{4}{5} \right| = \frac{3}{4}$

Lời giải

a) $5^x + 5^{x+2} = 650 \Rightarrow 5^x (1 + 5^2) = 650$

$\Leftrightarrow 5^x \cdot 26 = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

b) $3 - \left| x - \frac{4}{5} \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \left| x - \frac{4}{5} \right| = \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{4}{5} = \frac{9}{4} \\ x - \frac{4}{5} = -\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{61}{20} \\ x = -\frac{29}{20} \end{cases}$$

Câu 260.(Đề thi HSG 7 2018-2019)

Tìm x, y, z biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| = 0 \\ \left| y + \frac{2}{3} \right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 261.(Đề thi HSG 7 THCS Trần Hưng Đạo 2018-2019)

a) Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

b) Tìm x, y biết $|3+y| + |2x+y| = 0$

Lời giải

a) Tính được $\left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) Vì $|3+y| \geq 0; |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y| = 0 \\ |2x+y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = -2x \end{cases}$$

Câu 262.(Đề thi HSG 7 2018-2019)

Tìm x , biết:

a) $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3,2) + \frac{2}{5} \right|$

b) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

Lời giải

a) $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3,2) + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

b) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-7)^{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 0 \\ x-7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 8 \end{cases}$$

Câu 263.(Đề thi HSG 7 huyện Sơn Dương 2017-2018)

Tìm x biết: $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$

Lời giải

$$\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2009} - 1 + \frac{x-2}{2008} - 1 = \frac{x-3}{2007} - 1 + \frac{x-4}{2006} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}$$

$$\Rightarrow (x-2010) \left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2006} \right)$$

$$\Rightarrow x = 2010$$

Câu 264.(Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm x biết: $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

Lời giải

Ta có:

$$2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900 \Leftrightarrow 30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là kết quả cần tìm

Câu 265.(Đề thi HSG 7 huyện Sơn Tây 2018-2019)

a) Tìm x , biết: $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$

b) Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$

Lời giải

$$a) 2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$$

$$\Leftrightarrow -12x - 20 = 16 \Leftrightarrow -12x = 36 \Rightarrow x = -3$$

b) Nếu $x > \frac{1}{2}$

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = \frac{7}{3} (tm)$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$, ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (1-2x) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = -\frac{4}{3} (tm)$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 266.(Đề thi HSG 7 huyện Sơn Tây 2018-2019)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$

Lời giải

Từ $x+z=2y$ ta có:

$$\begin{aligned} x-2y+z &= 0 \Rightarrow 2x-4y+2z=0 \\ \Rightarrow 2x-y-3y+2z &= 0 \Rightarrow 2x-y=3y-2z \end{aligned}$$

Vậy nếu $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ thì $2x-y=3y-2z=0$ ($5 \neq 15$)

$$\text{Từ } 2x-y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$$

$$\text{Từ } 3y-2z=0 \text{ và } x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0 \text{ hay } \frac{1}{2}y+y-z=0$$

$$\text{Hay } \frac{3}{2}y-z=0 \text{ hay } y=\frac{2}{3}z \Rightarrow x=\frac{1}{3}z$$

Vậy các giá trị cần tìm là $\left\{x=\frac{1}{3}z; y=\frac{2}{3}z, z \in \mathbb{R}\right\}$ hoặc $\left\{x=\frac{1}{2}y, y \in \mathbb{R}, z=\frac{3}{2}y\right\}$ hoặc

$$\{x \in \mathbb{R}, y=2x, z=3x\}$$

Câu 267.(Đề thi HSG 7 huyện Phù Cát 2017-2018)

Tìm x biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

Lời giải

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} \cdot [1 - (x-5)^{12}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-5)^{12} = 0 \end{cases}$$

$$(x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $x=4, x=5, x=6$

Câu 268.(Đề thi HSG 7 trường Đáp Cầu 2018-2019)

Tìm x biết: $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$

Lời giải

$$a) \frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006} \Rightarrow \frac{x-1}{2009} - 1 + \frac{x-2}{2008} - 1 = \frac{x-3}{2007} - 1 + \frac{x-4}{2006} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}$$

$$\Leftrightarrow (x-2010) \left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2006} \right) = 0 \Rightarrow x = 2010$$

Câu 269.(Đề thi HSG 7 huyện Việt yên 2016-2017)

Tìm x, y, z biết:

a) $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x+y=55$

b) $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}, x = \frac{z}{2}$ và $x+2y-3z=-24$

Lời giải

a) $\Rightarrow 28+7x=28+4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x=8; y=14$

b) Học sinh đưa về dạng dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = 5 \Rightarrow x=10; y=15; z=20.$

Câu 270.(Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2016-2017)

Tìm x sao cho : $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \frac{1}{17}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$$

Câu 271.(Đề thi HSG 7 huyện Thái Thụy 2015-2016)

c) Tìm x biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

d) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

a) $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

b) Với $x=0, x=1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x=2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x=2$ thỏa mãn

+) $x > 2$, ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1(*)$

Với $x > 2$ ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2 \dots \text{ktm}$$

Vậy $x = 2$

Câu 272. (Đề thi HSG 7 huyện Tiền Hải 2016-2017)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y, 5y = 6z$ và $xyz = 30$

b) Tìm x biết $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

Lời giải

a) $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k.6k.5k = 30 \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

b) $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{8}{5} + \frac{3}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = 1$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 273. (Đề thi HSG 7 huyện Sơn Trà 2018-2019)

1) Tìm x, y biết $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

2) Tìm x, y, z biết $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 18$

Lời giải

1. Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|3y + 12| \geq 0$ với mọi y , do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ với mọi x, y . Theo đề bài thì:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$. Từ đó suy ra: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$. Khi đó

$$2x - \frac{1}{6} = 0 \text{ và } 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \text{ và } y = -4. \text{ Vậy } x = \frac{1}{12}; y = -4$$

2. Ta có: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$. Suy ra

$$\frac{4.(3x-2y)}{16} = \frac{3.(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

Do đó: $\frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ (1)

$$\frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \text{ Suy ra } x=4; y=6; z=8$$

Câu 274.(Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm ba số x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

Lời giải

Từ : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$

Suy ra $\begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \text{ (Vì } x, y, z \text{ cùng dấu)}$

Vậy $(x; y; z) \in \{(6; 8; 10), (-6; -8; -10)\}$

Câu 275.(Đề thi HSG 7 trường THCS Trục Tĩnh 2016-2017)

Tìm x , biết: $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$

Lời giải

$$2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$$

$$-12x - 20 = 16$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Câu 276.(Đề thi HSG 7 trường THCS Trục Tĩnh 2016-2017)

Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$

Lời giải

Nếu $x > \frac{1}{2}$ ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x-1| = \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3} > \frac{1}{2}$$

Nếu $x < \frac{1}{2}$. Ta có:

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} : (1 - 2x) = \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow -2x = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3} : (-2) = -\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Câu 277.(Đề thi HSG 7 trường THCS Nghĩa Điền 2016-2017)

Tìm x biết: $(2x-1)^4 = 81$

Lời giải

$$(2x-1)^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Câu 278.(Đề thi HSG 7 trường THCS Nghĩa Điền 2016-2017)

Tìm x biết: $|2x-7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $|2x-7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow |2x-7| = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-7=1 \\ 2x-7=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$$

Câu 279.(Đề thi HSG 7 trường THCS Nghĩa Điền 2016-2017)

Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Lời giải

$$3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5 \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

Câu 280.(Đề thi HSG 7 cấp trường 2016-2017)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 281.(Đề thi HSG 7 cấp trường 2016-2017)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x-2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}$, $(x-2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2010)^2 = 4 \\ (x-2010)^2 = 1 \\ (x-2010)^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2010| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2012 \\ x = 2008 \end{array} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{array} \right. \\ x - 2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2016; 6)$

Câu 282.(Đề thi HSG 7 cấp trường 2017-2018)

Tìm x biết:

a) $1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$ b) $|2x - 1| - x = 4$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} : x = \frac{-26}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{26}$$

$$\text{b) } |2x-1|-x=4 \Rightarrow |2x-1|=4+x \quad (1)$$

Với $2x-1 \geq 0$, từ (1) ta có: $2x-1 = x+4 \Rightarrow x=5(tm)$

Với $2x-1 < 0$, từ (1) ta có: $1-2x = x+4 \Rightarrow x = -1(tm)$

Vậy $x = 5; x = -1$

Câu 283. (Đề thi HSG 7 huyện Trưc Ninh 2018-2019)

Tìm x, y, z biết:

a) $2009 - |x - 2009| = x$

$$\text{b)} (2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$$

Lời giải

$$a) 2009 - |x - 2009| = x \Rightarrow 2009 - x = |x - 2009|$$

$$\Rightarrow |x - 2009| = -(x - 2009) \Rightarrow x \leq 2009$$

$$\text{b) } x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = \frac{9}{10}$$

Câu 284. (Đề thi HSG 7 huyện Trà Lý 2017-2018)

a) Tính giá trị biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2014} \right| + \left| a - \frac{1}{2016} \right|$, với $a = \frac{1}{2015}$

Lời giải

a) Thay $a = \frac{1}{2015}$ vào biểu thức S $P = \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014} \right| + \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right|$

Ta có:

$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$$

$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016} = \frac{2016 - 2014}{2014 \cdot 2016}$$

Câu 285.(Đề thi HSG 7 THCS Phương Trung 2018-2019)

Tìm số hữu tỉ x , biết:

a) $(x-1)^5 = -243$

b) $\frac{x+2}{11} + \frac{x+2}{12} + \frac{x+2}{13} = \frac{x+2}{14} + \frac{x+2}{15}$

c) $x - 2\sqrt{x} = 0 \ (x \geq 0)$

Lời giải

a) $(x-1)^5 = (-3)^5 \Rightarrow x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$

b) $(x+2) \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} \right) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

c) $x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Câu 286.(Đề thi HSG 7 THCS Phương Trung 2018-2019)

Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

Lời giải

$$\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}, \frac{5}{x} + \frac{2y}{8} = \frac{1}{8}, \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8}$$

$$x(1-2y) = 40 \Rightarrow 1-2y \text{ là ước lẻ của } 40. \text{ Ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1; \pm 5$$

$$\Rightarrow (x; y) = \{(40; 0); (-40; 1); (8; -2); (8; 3)\}$$

Câu 287.(Đề thi HSG 7 THCS Nguyễn Trực 2017-2018)

Tìm x, y biết:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 6y^2 + 1 = 2 \ (x, y \text{ là nguyên tố})$

Lời giải

a) $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $x = 5; y = 2$

Câu 288.(Đề thi HSG 7 THCS X 2018-2019)

Tìm x , biết $|x-1| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x-1| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{2}{3} \\ x-1 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 289.(Đề thi HSG 7 huyện CHUÔNG MỸ 2018-2019)

1. Tìm a, b, c biết $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$
2. Tìm x, y biết: $(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0$
3. Tìm các cặp số nguyên dương (a, b) biết: $3a - b + ab = 8$

Lời giải

1. Ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32}$ và a, b, c cùng dấu

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32} = \frac{a^2 + 3b^2 - 2c^2}{4 + 27 - 32} = \frac{-16}{-1} = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16.4 \Rightarrow a = \pm 8 \\ b^2 = 16.9 \Rightarrow b = \pm 12 \\ c^2 = 16.16 \Rightarrow c = \pm 16 \end{cases}$$

Vậy các số a, b, c cần tìm là:

$$(a = 8; b = 12; c = 16) \text{ hoặc } (a = -8; b = -12; c = -16)$$

2. Ta có: $(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0$

$$\text{Vì } (3x-1)^{2018} \geq 0; \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} \geq 0$$

$$\Rightarrow (3x-1)^{2018} = 0; \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow 3x-1=0; y + \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}$$

3. $3a - b + ab = 8 \Leftrightarrow (ab - b) + (3a - 3) = 5$

$$\Rightarrow b(a-1) + 3(a-1) = 5 \Leftrightarrow (a-1)(b+3) = 5$$

Lập bảng ta có:

$a-1$	1	5	-1	-5
a	2	6	0	-4
$b+3$	5	1	-5	-1

b	2	-2	-8	-4
Xét	Thỏa mãn	Không tm	Không tm	Không tm

Vậy các cặp số nguyên dương (a, b) cần tìm là $(2; 2)$

Câu 290.(Đề thi HSG 7 huyện THƯỜNG TÍN 2018-2019)

Tìm x biết:

$$a. 23x - \left(\frac{1}{27} - \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$b. |2x - 5| - 47 = \frac{1}{2}x$$

$$c. (2x - 3)(3x + 1) = \left(\frac{8}{2017} - \frac{8}{2018} + 27\frac{3}{2019}\right) \cdot \left(\frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1\right)$$

$$d. x^2 - 5x = -6$$

Lời giải

$$a. \text{Tìm được } x = -\frac{11}{621}$$

$$b. \text{Với } x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow |2x - 5| = 2x - 5$$

$$\text{Nên ta có: } 2x - 5 - 47 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = \frac{104}{3} (tm...x \geq \frac{5}{2})$$

$$\text{Với } x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 < 0 \Rightarrow |2x - 5| = -2x + 5$$

$$\text{Nên ta có: } -2x + 5 - 47 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = -16\frac{4}{5} (tm...x < \frac{5}{2})$$

$$c. \text{Xét } \frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 = \frac{-34 + 14 - 15 + 35}{35} = 0$$

$$\text{Thay vào ta có: } (2x - 3)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$d. \text{Ta có: } x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) - (3x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Câu 291.(Đề thi HSG 7 THCS LÊ HỒNG PHONG 2018-2019)

Tìm x, y biết:

$$a. 5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24$$

$$b. x - y = xy = x : y (y \neq 0)$$

Lời giải

a. Ta có: $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$

$$\Rightarrow 5^{2x-3}(5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3 \Rightarrow 2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

b. Ta có: $x - y = xy$ nên $x = xy + y = y(x + 1) \Rightarrow x : y = x + 1$

Mà $x - y = x : y$, do đó: $x + 1 = x - y \Rightarrow y = -1$

Do đó: $x + 1 = x \Rightarrow x + x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Vậy $x = -\frac{1}{2}; y = -1$

Câu 292.(Đề thi HSG 7 TRƯỜNG THCS LÊ HỒNG PHONG 2018-2019)

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x-7}{x-2}; B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a. Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b. Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Lời giải

a. Ta có: $A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

Để A nguyên thì $\frac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$

$$B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

Để B nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Do đó $x = 5, x = 1, x = 4, x = 2$

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$

b. Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x = 1$.

Câu 293.(Đề thi HSG 7 HUYỆN CÁT TIÊN 2018-2019)

a. Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$

b. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên $y = \frac{2x-3}{x-2}$

Lời giải

a. $2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x-y-z}{15-10-8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\Rightarrow x = -150; y = -100; z = -80$$

b. Biểu thức $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2x-3 : x-2$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+1 : x-2 \Leftrightarrow 1 : x-2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Câu 294.(Đề thi HSG 7 ...2018-2019)

Tìm x , biết:

a. $(2x-1)^4 = 16$

b. $(2x+1)^4 = (2x+1)^6$

c. $||x+3|-8|=20$

Lời giải

a) Tính đúng $x=1,5; x=-0,5$

b) Tính đúng $x=-0,5; x=0; x=-15$

c) $||x+3|-8|=20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|-8=20 \\ |x+3|-8=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|=28 \\ |x+3|=-12(VN) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=28 \\ x+3=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ x=-31 \end{cases}$$

Câu 295.(Đề thi HSG 7 ...2018-2019)

Tìm các số x, y, z biết:

a) $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

a) $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\pm 1 \\ x=z \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) \in \left\{ \left(\frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3} \right); \left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3} \right) \right\}$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2+y^2+z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4; y=6; z=8 \\ x=-4; y=-6; z=-8 \end{cases}$$

Câu 296.(Đề thi HSG 7 huyện Cù Chính Lan 2018-2019)

Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8} \Rightarrow x(1-2y) = 40$$

$$\Rightarrow 1-2y \in \text{ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1; \pm 5$$

$1-2y$	-5	-1	1	5
x	-8	-40	40	8
y	3	1	0	-2

Vậy ta có các cặp số $(x; y) = \{(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)\}$

Câu 297.(Đề thi HSG 7 huyện Cù Chính Lan 2018-2019)

Tìm số nguyên x để A có giá trị là một số nguyên biết:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} (x \geq 0)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-3$	-4	-2	-1	1	2	4
x	Loại	1	4	16	25	49

$$\text{Vậy } x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$$

Câu 298.(Đề thi HSG 7 huyện Giao Thủy 2016-2017)

Tìm x, y biết:

$$\text{a) } \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \text{ và } 5x + 4y = 120$$

$$\text{b) } \frac{6}{(x-1)^2+2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{5x}{40} = \frac{4y}{20} = \frac{5x+4y}{40+20} = \frac{120}{60} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 8 = 16 \\ y = 2 \cdot 5 = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{6}{(x-1)^2+2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

Đặt $A = \frac{6}{(x-1)^4 + 2}$. Chứng tỏ được $A \leq 3 (\forall x) (1)$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Đặt $B = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$

$$B = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

$|y-1| \geq y-1$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y \geq 1$

$|y-2| \geq 0$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = 2$

$|3-y| \geq 3-y$ với mọi y . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y \leq 3$

$\Rightarrow B \geq 3$ với mọi y (2). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = 2$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A = B = 3 \Rightarrow x = 1; y = 2$

Câu 299. (Đề thi HSG 7 huyện Trực Ninh 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

Sử dụng tính chất $|A| \geq 0$

Suy ra: $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0; \left|y + \frac{2}{3}\right| \geq 0; |x^2 + xz| \geq 0$ nên $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$

Câu 300. (Đề thi HSG 7 huyện Trực Ninh 2017-2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2018)^2$

Lời giải

$$36 - y^2 = 8(x - 2018)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2018)^2 = 36$$

$$\text{Vì } y^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (x - 2018)^2 = 1 \\ (x - 2018)^2 = 0 \\ (x - 2018)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } (x - 2018)^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 28 \text{ (không thể)}$$

$$\text{Với } (x - 2018)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ y = 2016 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Với } (x - 2018)^2 = 0 \Rightarrow x = 2018 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2020; 2); (2016; 2); (2018; 6)\}$$

Câu 301. (Đề thi HSG 7 huyện Hà Trung 2015-2016)

a) Tìm x biết: $1024 \cdot (x-9)^{x+1} - (x-9)^{x+11}$

b) Cho $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ và $xy = 112$. Tìm x, y

c) Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

Lời giải

a) Tìm x biết: $1024 \cdot (x-9)^{x+1} - (x-9)^{x+11}$

$$\Rightarrow (x-9)^{x+1} \cdot [1024 - (x-9)^{10}] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-9)^{x+1} = 0 \\ [1024 - (x-9)^{10}] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-9)^{x+1} = 0 \\ [1024 - (x-9)^{10}] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-9=0 \\ (x-9)^{10} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x-9=2 \\ x-9=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=11 \\ x=7 \end{cases}$$

b) Cho $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ và $xy = 112$. Tìm x, y

Cách 1

Ta có: $xy = 112 \Rightarrow x = \frac{112}{y}$

thay vào $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ ta được: $\frac{112}{4y} = \frac{7}{7} \Rightarrow y^2 = 196 \Rightarrow y = \pm 14$

*) $y = 14 \Rightarrow x = 8$

*) $y = -14 \Rightarrow x = -8$

Vậy:

Cách 2: Đặt $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = k$ suy ra $x = 4k; y = 7k$ thay vào $xy = 112$ ta được:

$$4k \cdot 7k = 112 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

*) Với $k = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$

*) Với $k = -2 \Rightarrow x = -8; y = -14$

c) Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

$$2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^x \cdot 12 = 10800$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

Câu 302. (Đề thi HSG 7 huyện Hà Trung 2015-2016)

Cho $\frac{4x-7y}{3x+6y} = \frac{4}{9}$ Tính $\frac{x}{2y}$

Lời giải

Cho $\frac{4x-7y}{3x+6y} = \frac{4}{9}$ Tính $\frac{x}{2y}$

Ta có: $\frac{4x-7y}{3x+6y} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 9(4x-7y) = 4(3x+6y) \Leftrightarrow 36x-63y = 12x+24y$

$$\Leftrightarrow 24x = 87y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{87}{24} = \frac{29}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{2y} = \frac{29}{16}$$

Câu 303.(Đề thi HSG 7 huyện Đông Hưng 2018-2019)

a) Cho $Q = \frac{27-2x}{12-x}$. Tìm các số nguyên x , để Q có giá trị nguyên ?

b) Tìm x , biết: $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}$; $x \neq 12$

Biến đổi được

$$Q = \frac{27-2x}{12-x} = \frac{2.(12-x)+3}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$$

Ta có $2 \in \mathbb{Z}$; $x \in \mathbb{Z}$; $x \neq 12$

nên Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{3}{12-x}$ có giá trị nguyên

Mà $\frac{3}{12-x}$ có giá trị nguyên khi và chỉ khi $12-x \in U(3)$

$$U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Nếu $12-x = -3$ thì $x = 15$ (t/m)

Nếu $12-x = -1$ thì $x = 13$ (t/m)

Nếu $12-x = 3$ thì $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $x \in \{9; 11; 13; 15\}$

b) $(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{x+1} [1 - (x-5)^{12}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hoặc } (x-5)^{x+1} = 0, \text{ hoặc } 1 - (x-5)^{12} = 0$$

$$\text{Ta có: } (x-5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

$$1 - (x-5)^{12} = 0 \Leftrightarrow (x-5)^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $x = 4, x = 5, x = 6$

Câu 304.(Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2018-2019)

a) Tìm x biết: $\frac{x+2}{2017} + \frac{x+3}{2016} + \frac{x+4}{2015} + \frac{x+5}{1007} + \frac{x+2074}{11} = 0$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) biết: $2019^{\left||x^2-y|-8\right|+y^2-1} = 1$

Lời giải

a) $\frac{x+2}{2017} + \frac{x+3}{2016} + \frac{x+4}{2015} + \frac{x+5}{1007} + \frac{x+2074}{11} = 0$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{2017} + 1 + \frac{x+3}{2016} + 1 + \frac{x+4}{2015} + 1 + \frac{x+5}{1007} + 2 + \frac{x+2074}{11} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+2019}{2017} + \frac{x+2019}{2016} + \frac{x+2019}{2015} + \frac{x+2019}{1007} + \frac{x+2019}{11} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2019) \left(\frac{1}{2017} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{11} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2019=0 \text{ (vì } \frac{1}{2017} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{11} \neq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = -2019$$

Vậy $x = -2019$

b) $2019^{\left||x^2-y|-8\right|+y^2-1} = 1$

$$\Rightarrow \left||x^2-y|-8\right| + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left||x^2-y|-8\right| + y^2 = 1$$

$$\text{Mà } \left||x^2-y|-8\right| \geq 0; y^2 \geq 0;$$

$$\text{nên } 0 \leq y^2 \leq 1 \text{ mà } x, y \in \mathbb{Z}, y^2 \in \{0;1\} \Rightarrow y \in \{0;\pm 1\}$$

$$\text{Với } y = 0 \text{ suy ra: } \left||x^2-0|-8\right| + 0 = 1 \Rightarrow \left||x^2|-8\right| = 1 \Rightarrow |x^2-8| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-8=1 \\ x^2-8=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ x^2=7 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } y = 1 \text{ suy ra: } \left||x^2-1|-8\right| + 1 = 1 \Rightarrow \left||x^2-1|-8\right| = 0 \Rightarrow |x^2-1|-8 = 0$$

$$\Rightarrow |x^2-1| = 8 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=8 \\ x^2-1=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ x^2=-7 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } y = -1 \text{ suy ra: } \left||x^2+1|-8\right| + 1 = 1 \Rightarrow \left||x^2+1|-8\right| = 0 \Rightarrow |x^2+1|-8 = 0$$

$$\Rightarrow |x^2+1| = 8 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=8 \\ x^2+1=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=7 \\ x^2=-9 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn đề bài là: (3;0); (-3;0); (3;1); (-3;1)

Câu 305.(Đề thi HSG 7 huyện Hậu Lộc 2013-2014)

- a) Tìm x , biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$
- b) Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $x+y=x.y$

Lời giải

a) Ta có: $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$ (1)

Vì: $VT \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow 4x \geq 0$ hay $x \geq 0$.

Do đó: $|x+1|=x+1; |x+2|=x+2; |x+3|=x+3$

(1) $\Rightarrow x+1+x+2+x+3=4x$

$\Rightarrow x=6$

Vậy $x=6$

b) $x+y=x.y \Rightarrow xy-x=y \Rightarrow x(y-1)=y \Rightarrow x=\frac{y}{y-1}$

vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y: y-1 \Rightarrow y-1+1: y-1 \Rightarrow 1: y-1$

$\Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=0 \end{cases}$

Nếu $y=2$ thì $x=2$

Nếu $y=0$ thì $x=0$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(0; 0)$ và $(2; 2)$

Câu 306.(Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2014-2015)

- a) Tìm tập hợp các số nguyên x , biết rằng:

$$4\frac{5}{9}:2\frac{5}{18}-7 < x < \left(3\frac{1}{5}:3,2+4,5.1\frac{31}{45}\right):\left(-21\frac{1}{2}\right)$$

b) Tìm x , biết: $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$

Lời giải

a) Ta có: $4\frac{5}{9}:2\frac{5}{18}-7=\frac{41}{9}.\frac{18}{41}-7=2-7=-5$

Lại có: $\left(3\frac{1}{5}:3,2+4,5.1\frac{31}{45}\right):\left(-21\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{16}{5}.\frac{5}{16}+\frac{9}{2}.\frac{76}{45}\right):\left(-\frac{43}{2}\right)=\left(1+\frac{38}{5}\right).\frac{-2}{43}=\frac{43}{5}.\frac{-2}{43}=\frac{-2}{5}$

Do đó: $-5 < x < \frac{-2}{5}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

b) Nhận xét: Với mọi n ta có $\frac{1}{n} > 0$ nên với $\frac{1}{n} \geq 0$

$\Rightarrow 11x \geq 0$ hay $x \geq 0$

Với $x \geq 0$ ta có:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{10}{11}$$

Câu 307. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2014-2015)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$.

Lời giải

Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 45| + b - 45$ là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow 2^a + 37 \text{ là số chẵn} \Rightarrow 2^a \text{ lẻ} \Leftrightarrow a = 0.$$

$$\text{Khi đó } |b - 45| + b - 45 = 38$$

$$+) \text{ Nếu } b < 45, \text{ ta có } -(b - 45) + b - 45 = 38 \Leftrightarrow 0 = 38 \text{ (loại)}$$

$$+) \text{ Nếu } b \geq 45, \text{ ta có } 2(b - 45) = 38 \Leftrightarrow b - 45 = 19 \Leftrightarrow b = 64 \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } (a; b) = (0; 64)$$

Câu 308. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

$$a) \quad \text{Tìm } x, \text{ biết: } \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) : \frac{-2x}{3} = \frac{-12}{19}$$

$$b) \quad \text{Tìm } x, \text{ biết: } \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$$

Lời giải

a) Ta có

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) : \frac{-2x}{3} = \frac{-12}{19} \Leftrightarrow \frac{10-9}{12} : \frac{-12}{19} = \frac{-2x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot \frac{19}{12} = \frac{2x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{19}{12 \cdot 12} \Leftrightarrow x = \frac{19}{12 \cdot 12} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{19}{96}$$

$$\text{Vậy: } x = \frac{19}{96}$$

$$b) \quad \text{Ta có: } \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right| \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|-\frac{16}{5} + \frac{2}{5}\right| \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy: $x \in \left\{ \frac{7}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$

Câu 309. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

Tìm các số tự nhiên x và y lớn hơn 1 thỏa mãn cả hai điều kiện sau:

$x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x .

Lời giải

Giả sử $1 < x \leq y$. Từ $x+1 \vdots y \Rightarrow x+1 = k.y$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $ky = x+1 \leq y+1 < y+y = 2y \Rightarrow ky < 2y$ nên $k < 2$, mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k = 1$.

Thay $k = 1$ vào $x+1 = ky$, ta được $x+1 = y$

Theo bài ra $y+1 \vdots x$ nên $(x+1)+1 \vdots x \Rightarrow 2 \vdots x \Rightarrow x = 2$ (do $x \in \mathbb{N}$ và $x > 1$)

Với $x = 2$ thì $y = 3$

Vậy $(x; y) = \{(2; 3); (3; 2)\}$

Câu 310. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Tìm các số $x; y; z$ biết:

a) $(x-1)^3 = -8$

b) $|9-7x| = 5x-3$

c) $x-3\sqrt{x} = 0$

Lời giải

a) $(x-1)^3 = -8 \Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$

b) $|9-7x| = 5x-3$

ĐK: $x \geq \frac{3}{5}$

$$|9-7x| = 5x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-7x = 5x-3 \\ 9-7x = 3-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (tmdk)} \\ x = 3 \text{ (tmdk)} \end{cases}$$

Vậy: $x \in \{1; 3\}$

c) $x-3\sqrt{x} = 0$ ĐK: $x \geq 0$

Khi đó ta có: $x-3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x}-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (tmdk)} \\ x = 9 \text{ (tmdk)} \end{cases}$

Câu 311. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $6x^2 + 5y^2 = 74$

Lời giải

Từ : $6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{74}{6}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$

Mặt khác ta có: $x^2 + 1 = 75 - 5y^2 - 5x^2 : 5 \Rightarrow x^2 = 4; x^2 = 0$

*) Với $x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10$ (Loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

*) Với $x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow (x; y) = \{(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)\}$

Câu 312.(Đề HSG 7 cấp huyện....)

a) Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

b) Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Lời giải

a) Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$

Và $|x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

Suy ra $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}$

b) Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

Do đó, từ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa} \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999 \Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hoặc $n = 37$, hoặc $n+1 = 37$

Với $n = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa mãn)

Với $n+1 = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn)

Vậy $n = 36$ và $a = 6$

Câu 313.(Đề HSG 7 Trường Nguyễn Khuyến 2017 – 2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy + 3x = 4$

Lời giải

Biến đổi: $x(2y + 3) = 4$

Chỉ ra được $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in U(4)$ và $2y + 3 \mid 4$

x	-4	-2	-1	1	2	4
-----	----	----	----	---	---	---

$2y+3$	-1	-2	-4	4	2	1
y	-2	Loại	Loại	Loại	Loại	-1

Vậy $(x; y) \in \{(-4; -2); (4; -1)\}$

Câu 314.(Đề HSG 7)

Tìm x biết:

$$a) 3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$$

$$b) \left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7$$

$$c) (2x-1)^7 = (2x-1)^5$$

Lời giải

$$a) 3(x-2) + \frac{2}{5} = 4 \Rightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5} \Rightarrow x-2 = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$b) \left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7 \Rightarrow \left| x + \frac{1}{3} \right| = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

$$c) (2x-1)^7 = (2x-1)^5 \Rightarrow (2x-1)^5 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$