

Chuyên đề 4 . LŨY THỪA TỔNG QUY LUẬT VÀ LIÊN QUAN

PHẦN I. TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n \quad (x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}; n > 1)$$

$$\text{Quy ước : } x^1 = x, x^0 = 1 (x \neq 0)$$

2. Các phép tính về lũy thừa

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0; m, n \in \mathbb{N})$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{với } (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

B. Một số ví dụ

$$\text{Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức : } A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}; B = \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để thực hiện phép tính chứa nhiều lũy thừa, ta dùng các công thức biến đổi về lũy thừa của các số nguyên tố. Sau đó có thể dùng tính chất phân phối của phép nhân đối và phép cộng.

✓ *Trình bày lời giải.*

$$\text{a) Ta có : } A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

b) Ta có :

$$B = \frac{2.3.5.2^{14}.3^{29} - 5.2^5.7^5.2^{12}}{2.3^3.2^{14}.3^{14}.3^{14} - 2^2.3.2^{15}.7^5} = \frac{2^{15}.3^{30}.5 - 2^{17}.5.7^5}{2^{15}.3^{31} - 2^{17}.3.7^5} = \frac{5(2^{15}.3^{30} - 2^{17}.7^5)}{3.(2^{15}.3^{30} - 2^{17}.7^5)} = \frac{5}{3}$$

Ví dụ 2: Tìm x

a) $(x+2)^2 = 64$; b) $(x+5)^3 = -125$ c) $2^x + 2^{x+2} = 320$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x có chứa lũy thừa ở phần cơ số ta đưa hai vế về cùng số mũ và lưu ý:

$$a^n = b^n \text{ (với n lẻ) thì } a = b$$

$$a^n = b^n \text{ (với n chẵn) thì } a = b \text{ hoặc } a = -b$$

Để tìm x ở phần số mũ ta đưa hai vế về cùng cơ số và sử dụng :

$$a^m = a^n \text{ (với } a \neq 0, \pm 1) \text{ thì } m = n$$

✓ *Trình bày lời giải*

a) $(x+2)^2 = 64 \Rightarrow (x+2)^2 = 8^2 \Rightarrow x+2 = 8 \text{ hoặc } x+2 = -8$

Suy ra $x \in \{6; -10\}$

b) $(x+5)^3 = -125 \Rightarrow (x+5)^3 = (-5)^3 \Rightarrow x+5 = -5 \Rightarrow x = -10$

c) $2^x + 2^{x+2} = 320 \Rightarrow 2^x (1 + 2^2) = 320$

$$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$$

Ví dụ 3:

a) Chứng minh rằng $16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 66

b) Chứng minh rằng với số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n$ chia hết cho 30

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để chứng minh $A:k$ ta có thể vận dụng tính chất :

$$A = b.k \text{ thì } A:k$$

$$A = B + C \text{ mà } B:k \text{ thì } C:k \text{ thì } A:k$$

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có : $16^5 + 2^5 = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 2^{15}.33 = 2^{14}.66:66$

b) Ta có : $3^{n+2} + 3^n - 2^{n+4} + 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n.(2^4 - 1)$

$$= 3^n.10 - 2^n.15 = 3^{n-1}.30 - 2^{n-1}.30:30$$

Ví dụ 4: Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A = 3^{2020} - 3^{2019} + 3^{2018} - 3^{2017} + \dots + 3^2 - 3 + 1;$

b) $B = 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + 5^{2017} + \dots + 5^2 + 5 + 1$

c) $C = 7^{2021} - 7^{2019} + 7^{2017} - 7^{2015} + \dots + 7^5 - 7^3 + 7$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những bài toán tính tổng đại số về lũy thừa có cùng cơ số theo quy luật, chúng ta cần nhân hai vế với một lượng thích hợp để được biểu thức mới, mà bắt đầu từ hạng tử đối nhau thì cộng biểu thức ban đầu với biểu thức mới, bằng nhau thì trừ biểu thức mới với biểu thức ban đầu

✓ *Trình bày lời giải*

a) Xét $3.A = 3^{2021} - 3^{2020} + 3^{2019} - 3^{2018} + \dots + 3^3 - 3^2 + 3$

$$\Rightarrow 3.A + A = 3^{2021} + 1 \Rightarrow A = \frac{3^{2021} + 1}{4}$$

b) Xét $5.B = 5^{2021} + 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + \dots + 5^3 + 5^2 + 5$

$$\Rightarrow 5.B - B = 5^{2021} - 1 \Rightarrow B = \frac{5^{2021} - 1}{4}$$

c) Xét $49.A = 7^{2023} - 7^{2021} + 7^{2019} - 7^{2017} + \dots + 7^7 - 7^5 + 7^3$

$$\Rightarrow 49.C + C = 7^{2023} + 7 \Rightarrow C = \frac{7^{2023} + 1}{50}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng tổng:

$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Bản chất của bài toán là thu gọn tổng S. Tương tự như ví dụ trên, dễ dàng phát hiện ra nhân hai vế của tổng S với $\frac{1}{2^2}$. Sau đó cộng với biểu thức S. Cuối cùng đánh giá

✓ *Trình bày lời giải*

$$\text{Xét } \frac{1}{2^2} . S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2016}} - \frac{1}{2^{2018}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} . S + S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow \frac{5}{4} . S < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5} \text{ hay } S < 0,2$$

Ví dụ 6: Đặt $A = 3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + \dots + 3^{200}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 120

Giải

Biểu thức A có 100 số hạng. Kể từ số hạng đầu, cứ nhóm 4 số hạng liên tiếp với nhau được 25 nhóm

$$A = (3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + 3^{104}) + (3^{105} + 3^{106} + 3^{107} + 3^{108}) + \dots + (3^{197} + 3^{198} + 3^{199} + 3^{200})$$

$$A = 3^{100} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{104} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{196} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$A = 3^{100} \cdot 120 + 3^{104} \cdot 120 + \dots + 3^{196} \cdot 120$$

$$A = 120 \cdot (3^{100} + 3^{104} + \dots + 3^{196}) : 120. \text{ Điều phải chứng minh}$$

C. Bài tập vận dụng

1. Tính:

$$a) A = \frac{6 + 3^2 \cdot 2 - 6 \cdot 3^2}{3^2 + 3 \cdot 3^2 - 3^4};$$

$$b) \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$$

$$2. \text{ Thực hiện phép tính: } A = \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$3. \text{ Cho } T = 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2 - 1. \text{ Tính } 2021^T$$

4. Tìm x, biết :

$$a) 3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$b) 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$$

$$5. \text{ Tìm số tự nhiên } x, \text{ biết : } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

6. Tìm x , biết :

$$a) \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x;$$

$$b) \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$$

7. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$$

$$8. \text{ Chứng minh rằng : } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} + \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$9. \text{ Chứng minh rằng : } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

$$10. \text{ Chứng minh rằng : } \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

11. Xét tổng $T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$. Hãy so sánh T với 3

12. Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S - P)^{2013}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 7, tỉnh Bắc Giang, năm học 2012 - 2013)

13. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

14. Chứng tỏ rằng:

a) $63^{63} - 37^{37}$ chia hết cho 10

b) $2^{100} + 2^{101} + 2^{102}$ chia hết cho 7

c) $7^{100} - 7^{99} - 7^{98}$ chia hết cho 41

15. Thu gọn biểu thức sau :

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}$

b) $B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{2019}} - \frac{1}{5^{2020}}$

c) $C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2020}{3^{2020}}$

16. **Đố.** Bạn có thể điền các lũy thừa của 2 vào các ô vuông còn lại trong bảng bên sao cho tích các lũy thừa trong mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo bằng nhau được không ?

	2^1	
	2^5	
	2^9	

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Câu 1. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}. \text{ Tính } (S - P)^{2016}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (S - P)^{2016} = 0$$

Câu 2. (Đề thi HSG 7)

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

$$A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}; \quad B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000} \\ &= 2011 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}\right) \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1999}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000}\right)\right] \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000}\right)\right] \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000}\right)\right] \\ &= 2011 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000}\right) \\ B &= 2012 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000}\right) \end{aligned}$$

Suy ra $A < B$

Câu 3. (Đề thi HSG 7 Trường thực hành Sài Gòn 2017-2018)

$$\text{Tính nhanh : } N = \frac{1}{1000} - \frac{1}{1000.999} - \frac{1}{999.998} - \frac{1}{998.997} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } N &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{1000.999} + \frac{1}{999.998} + \frac{1}{998.997} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right) \\ &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{998} - \frac{1}{999} + \frac{1}{997} - \frac{1}{998} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{1000} - \left(1 - \frac{1}{1000} \right) = \frac{499}{500} \end{aligned}$$

Câu 4. (Đề thi HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

Rút gọn $A = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011}$

Lời giải

$$\text{Tính } 4A = (5-1)A = 5^{2012} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{2012} - 1}{4}$$

Câu 5. (Đề thi HSG 7 THCS Hiền Quan 2018-2019)

Tính $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$

Lời giải

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50} \quad (1)$$

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51} \quad (2)$$

$$\text{Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có : } 4A = 5^{51} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{51} - 1}{4}$$

Câu 6. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

$$\text{a) Rút gọn } A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

b) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện :

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{-49}{50}$$

$$b) 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n$$

$$\Rightarrow 2B = 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$2B = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1}$$

$$2B - B = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1})$$

$$-(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2$$

$$= -(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Đặt } C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$$

$$\Rightarrow 2C = 2.(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}$$

$$2C - C = (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$C = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó } B = -(2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có: } (n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$$

$$2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1}.[2^{33} - (n-1)] = 0 \Rightarrow 2^{33} - n + 1 = 0 \Rightarrow n = 2^{33} + 1$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

Câu 7. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Chứng minh rằng : $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

$$\text{Đặt } D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \text{ (có 100 số hạng)}$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96}.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2.31 + 2^6.31 + \dots + 2^{96}.31$$

$D = 31.(2 + 2^6 + \dots + 2^{96})$ chia hết cho 31

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 8. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Nông 2018-2019)

Tính bằng giá trị biểu thức : $B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2011.2013}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } B &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2011.2013} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \\ &= 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013} \end{aligned}$$

Câu 9. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ Tính $(S - P)^{2013}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2013} = 0$

Câu 10. (Đề thi HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018-2019)

Rút gọn : $B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} (-5)B &= (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018} \\ B &= (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} \\ \text{Do đó: } (-5)B - B &= -6B = (-5)^{2018} - 1 \Rightarrow B = \frac{1 - 5^{2018}}{6} \end{aligned}$$

Câu 11. (Đề thi HSG 7 huyện Tiền Hải 2016-2017)

Tính giá trị biểu thức: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$

Lời giải

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + + 17.18.19.(20-16)$$

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$$

$$4B = 17.18.19.20$$

$$B = 17.18.19.5 = 29070$$

Câu 12. (Đề thi HSG 7 huyện Trục Ninh 2018-2019)

Thực hiện phép tính:

$$b) -\frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1}$$

Lời giải

$$b) -\frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1}$$

$$= -\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + + \frac{1}{93.95} + \frac{1}{95.97} + \frac{1}{97.99}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + + \frac{2}{93.95} + \frac{2}{95.97} + \frac{2}{97.99}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + + \frac{1}{93} - \frac{1}{95} + \frac{1}{95} - \frac{1}{97} + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{99}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99}$$

$$= \frac{-49}{99}.$$

Câu 13. (Đề thi HSG 7 huyện Quang Trung 2018-2019)

Thực hiện phép tính:

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + + \frac{1}{99}}$$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + + \frac{1}{99}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + + \frac{1}{100}}{\frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \frac{100-99}{1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + + \frac{1}{100}}{\left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + + \frac{100}{99}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + + \frac{99}{99}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{1 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right)} = \frac{1}{100}$$

Câu 14. (Đề thi HSG 7 huyện 2018-2019)

Chứng minh rằng:

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$b) B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B < \frac{1}{2}$$

Câu 15. (Đề thi HSG 7 trường THCS Đặng Thái Sơn 2018-2019)

$$a) \text{ Tính : } B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$$

$$b) \text{ Chứng minh: } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

$$a) B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$$

$$= \frac{1}{(-3)} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{50}} + \frac{1}{(-3)^{51}}$$

$$-\frac{1}{3} B = \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{51}} + \frac{1}{(-3)^{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} B = \frac{1}{-3} - \frac{1}{(-3)^{52}} = \frac{-3^{51} - 1}{3^{52}} \Rightarrow B = \frac{-3^{51} - 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

b) Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$\begin{aligned} *A &< \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 16. (Đề thi HSG 7 huyện Giao Thủy 2016-2017)

Cho biểu thức: $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$

Tính giá trị của biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$

Lời giải

$$b) A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4 \cdot |A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Câu 17. (Đề thi HSG 7 huyện Giao Thủy 2016-2017)

Cho $M = \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \frac{1}{315} + \dots + \frac{1}{9177}$. So sánh M với $\frac{1}{12}$

Lời giải

So sánh M với $\frac{1}{12}$

$$M = \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots + \frac{1}{19.21.23}$$

$$\Rightarrow 4M = \frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + \dots + \frac{4}{19.21.23}$$

$$4M = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{19.21} - \frac{1}{21.23}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{21.23} = \frac{40}{483}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{12} = \frac{40}{480} > \frac{40}{483} \Rightarrow M < \frac{1}{12}$$

Câu 18. (Đề thi HSG 7 huyện Trục Ninh 2017-2018)

$$\text{CMR: } \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Ta có:

$$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Câu 19. (Đề thi HSG 7 huyện Đông Hưng 2018-2019)

$$\text{Cho biểu thức: } A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}.$$

Lời giải

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Câu 20. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2018-2019)

$$B = \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \frac{9}{39.49} + \dots + \frac{9}{2009.2019}$$

Lời giải

$$B = \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \frac{9}{39.49} + \dots + \frac{9}{2009.2019}$$

$$\frac{10}{9}B = \frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \frac{10}{39.49} + \dots + \frac{10}{2009.2019}$$

$$\frac{10}{9}B = \frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{39} + \frac{1}{39} - \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2019}$$

$$\frac{10}{9}B = \frac{1}{9} - \frac{1}{2019}$$

$$\frac{10}{9}B = \frac{673-3}{3.2019}$$

$$B = \frac{670}{3.2019} \cdot \frac{9}{10} = \frac{67}{673}$$

Câu 21. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2018-2019)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+5}$

Lời giải

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+5}$$

$$\text{Đặt: } A = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$\Rightarrow 2A = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2A - A = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1} - 2.2^2 - 3.2^3 - 4.2^4 - \dots - n.2^n$$

$$\Rightarrow A = n.2^{n+1} - 2^2 - (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$\text{Đặt: } B = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$$

$$\Rightarrow 2B = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2B - B = (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + 2^{n+1}) - (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$\Rightarrow B = 2^{n+1} - 2^2$$

$$\Rightarrow A = n.2^{n+1} - 2^2 - (2^{n+1} - 2^2) = n.2^{n+1} - 2^{n+1} = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1)2^{n+1} = 2^{n+5}$$

$$\Rightarrow n-1 = 2^4 = 16 \Rightarrow n = 17$$

Vậy $n = 17$

Câu 22. (Đề thi HSG 7 huyện Xuân Dương 2013-2014)

$$\text{Tính } \left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3^{2000}}{2003} - 81\right)$$

Lời giải

$$\left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3^{2000}}{2003} - 81\right)$$

Trong dãy số có $\frac{3^6}{9} - 81 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3^{2000}}{2003} - 81\right) = 0$$

Câu 23. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Hiệp Hòa 2016-2017)

Tính $M = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2} = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+17-1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{17.18}{2} - 1\right) \\ &= 76 \end{aligned}$$

Câu 24. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1} \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1}\right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}\right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ A &= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{-49}{50} \end{aligned}$$

Câu 25. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

Lời giải

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt

$$\begin{aligned}
 B &= 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n \\
 \Rightarrow 2B &= 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n) \\
 2B &= 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1} \\
 2B - B &= (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1}) \\
 &\quad - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n) \\
 B &= -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2 \\
 &= -(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3
 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
 C &= 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n \\
 \Rightarrow 2C &= 2.(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1} \\
 2C - C &= (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) \\
 C &= 2^{n+1} - 2^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó } B &= -(2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3 \\
 &= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có: } (n-1).2^{n+1} = 2^{n+34}$$

$$\begin{aligned}
 2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} &= 0 \\
 2^{n+1}.[2^{33} - (n-1)] &= 0 \Rightarrow 2^{33} - n + 1 = 0 \Rightarrow n = 2^{33} + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

Câu 26. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

$$\text{Tính } S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 S &= (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + \dots + (-3)^{2015} \\
 -3S &= (-3).[(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2015}] \\
 &= (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2016} \\
 -3S - S &= [(-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2016}] - (3^0 - 3^1 + \dots - 3^{2015}) \\
 -4S &= (-3)^{2016} - 1.
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{(-3)^{2016} - 1}{-4} = \frac{3^{2016} - 1}{-4} = \frac{1 - 3^{2016}}{4}$$

Câu 27. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS TT Hậu A năm học 2017-2018)

$$\text{Biết } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385. \text{ Tính } S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$$

Lời giải

$$S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) = 4.385 = 1540$$

Câu 28. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu Sơn năm học 2015-2016)

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right) = \frac{2016}{2017} \end{aligned}$$

Câu 29. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Ân Tường Đông năm học 2014-2015)

Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$. Hãy tính $\frac{S}{P}$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1} = \left(\frac{1}{49} + 1 \right) + \left(\frac{2}{48} + 1 \right) + \left(\frac{3}{47} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1 \right) + 1 \\ &= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \right) + 1 = \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \\ &= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{50} \end{aligned}$$

Câu 30. (Đề thi HSG 7 Huyện Kim Thành 18-19)

Cho $a + b + c + d = 2000$ và $\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} = \frac{1}{40}$

Tính giá trị của $S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$$

$$S + 4 = \frac{a+b+c+d}{b+c+d} + \frac{a+b+c+d}{c+d+a} + \frac{a+b+c+d}{d+a+b} + \frac{a+b+c+d}{a+b+c}$$

$$\text{Do đó } S = -4 + 2000 \cdot \frac{1}{40} = 46$$

Câu 31. (Đề thi HSG 7 huyện Lâm Thao 2016-2017)

Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

Lời giải

$$M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$M = 25.(4-1).(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$M = 25[4.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25$$

$$M = 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$M = 25.4^{2018} - 25 + 25$$

$$M = 25.4^{2018} = 25.4.4^{2017} = 100.4^{2017} : 100$$

$$\text{Vậy } M : 10^2$$

Câu 32. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017-2018)

Tìm tỉ số của A và B , biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n.(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m.(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{n(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right) ; \frac{1}{m(25+m)} = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right)$$

Áp dụng tính A và B ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1980} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{1980} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{25} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{1}{1980} : \frac{1}{25} = \frac{5}{396}$$

Câu 33. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho $120 (x \in \mathbb{N})$

Lời giải

$$\begin{aligned} &3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \end{aligned}$$

Câu 34. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

$$A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}; B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000} \\ &= 2011. \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} \right) \\ &= 2011. \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1999} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] \\ &= 2011. \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) \right] - 2. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \\ &= 2011. \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} \right) \right] \\ &= 2011. \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \\ B &= 2012. \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \Rightarrow A < B \end{aligned}$$

Câu 35. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

Cho $A = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2015} - 1 \right) \left(\frac{1}{2016} - 1 \right)$. So sánh A với $\frac{-1}{2015}$

Lời giải

$$A = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-2014}{2015} \cdot \frac{-2015}{2016} = \frac{-1}{2016} > \frac{-1}{2015}$$

Câu 36. (Đề thi HSG 7 – Đề 073)

a) Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55

b) Tính $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$

Lời giải

a) $7^4 \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 = 55 \cdot 7^4$

b) $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50} \quad (1)$

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{50} + 5^{51} \quad (2)$$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $4A = 5^{51} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{51} - 1}{4}$

Câu 37. (Đề thi HSG 7 Huyện Lục Nam 2018-2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

$$A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2003.2004.2005}$$

$$A < \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.5} - \dots + \frac{1}{2003.2004} - \frac{1}{2004.2005} \right) \right)$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2004.2005} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} = \frac{1}{40}$$

Câu 38. (Đề thi HSG 7 trường Hồng Dương 2017-2018)

a) Tính : $B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$

b) Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

a) Ta có:

$$B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$$

$$\Rightarrow 3B = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}} \right)$$

$$\Rightarrow 3B = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{3^{49}} - \frac{1}{3^{50}}$$

$$\Rightarrow 3B + B = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{3^{49}} - \frac{1}{3^{50}} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}} \right)$$

$$\Rightarrow 4B = -1 - \frac{1}{3^{51}}$$

$$\Rightarrow B = \left(-1 - \frac{1}{3^{51}} \right) : 4$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 - \frac{1}{3^{51}} \right)$$

b) Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$\Rightarrow A > \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Câu 39. (Đề HSG huyện Bến Lức 2018 – 2019)

Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

Lời giải

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$= \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \frac{4^2-1}{4^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (1+1+1+\dots+1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow S < n-1 \quad (1)$$

Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > -1$$

$$\Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n-1) - 1 = n-2$$

$$\Rightarrow S > n-2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $n-2 < S < n-1$ hay S không là số nguyên

Câu 40. (Đề thi HSG 7 PGD huyện Châu Đức 2018-2019)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 3.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+1}$

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n. \text{ Tính được: } T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

Câu 41. (Đề thi HSG 7 huyện QUẾ SƠN 2018-2019)

Thực hiện tính:

$$\text{a) } S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$$

$$\text{b) } P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

Lời giải

a)

$$2S = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} - \dots - 2^2 - 2$$

$$2S - S = 2^{2011} - 2^{2010} + 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} - \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 - 1$$

$$S = 2^{2011} - 2.2^{2010} + 1 = 1$$

b)

$$P = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+17-1) = 76$$

Câu 42. (Đề thi HSG 7 trường TÀO SƠN huyện ANH SƠN 2017-2018)

$$\text{Chứng minh rằng: } A = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2} < 1$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2}$$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2.4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2.10^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Câu 43. (Đề thi HSG 7 huyện HÒA BÌNH 2016-2017)

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$

b) Tính: $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$

Lời giải

a) $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

b) $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 27$

Câu 44. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2015-2016)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1.8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (1+3+5+7+\dots+49)}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (12.50 + 25)}{217} = \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5 - 625}{7.31} = \frac{7.7.2.2.5.31}{7.2.5.5.7.31} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Câu 45. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S-P)^{2013}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2013} = 0$

Câu 46. (Đề thi HSG 7 BÍCH HÒA 2017-2018)

Chúng minh rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Câu 47. (Đề thi HSG 7 Thanh Thùy 2018-2019)

Chúng minh rằng:

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B < \frac{1}{2}$$

Câu 48. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) = 49 - M$$

$$\text{Trong đó } M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

$$\text{Áp dụng tính chất } \frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49} \right)$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lại có:

$$M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

Câu 49. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2017 - 2018)

Chứng minh: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$ là số chính phương

Lời giải

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$

Số số hạng của tổng: $(2n - 1 - 1) : 2 + 1 = n$

Tổng: $S = (1 + 2n - 1).n : 2 = n^2$ là số chính phương.

Câu 50. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \frac{4 - 3 - 5 - 7 - \dots - 49}{217}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \cdot \frac{4 - 3 - 5 - 7 - \dots - 49}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49)}{217} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (12.50 + 25)}{217} = \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5 - 625}{7.31} = -\frac{7.7.2.2.5.31}{7.2.5.5.7.31} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Câu 51.

Tìm tỉ số của A và B, biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n.(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m.(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Lời giải

Ta có :

$$\frac{1}{n(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right)$$

$$\frac{1}{m(25+m)} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right)$$

Áp dụng tính A và B ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{1980} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{25} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1980} \right) - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{A}{B} = \frac{1}{1980} : \frac{1}{25} = \frac{5}{396}$$

Câu 52. (Đề thi HSG 7 - Huyện Vĩnh Bảo 2017 - 2018)

$$\text{Cho } S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad (\text{với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n > 1)$$

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Có } S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Do $A > 0$ nên $S_n < n-1$

$$\text{Mặt khác } A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - (1 - \frac{1}{n}) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (\text{do } \frac{1}{n} > 0)$$

$$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1 \text{ nên } S_n \text{ không là số nguyên}$$

Câu 53. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

a) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

b) Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại

$$x = \frac{1}{2}$$

Lời giải

a) Ta có: $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$

$$+) f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$+) f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3 \quad (1)$$

$$+) f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $(a + b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \quad 2B = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\text{Vậy } B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Câu 54. (Đề thi HSG – Huyện Hiệp Hòa 2019 – 2020)

a. Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} \dots - 2^2 - 2$. Tính 2010^H

b. Thực hiện tính

$$M = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} \dots - 2^2 - 2$$

$$2H - H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 + 1$$

$$H = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1$$

$$H = 2^{2011} - 2^{2011} + 1 = 1 \Rightarrow 2010^H = 2010$$

b, Thực hiện tính:

$$\begin{aligned} M &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 17 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{17.18}{2} - 1 \right) = 76 \end{aligned}$$

Câu 55. (Đề thi HSG 7 Sơn Tĩnh)

a/ Tính tổng: $S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2007}$

b/ Thực hiện phép tính:

$$M = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

Lời giải

a/

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots - \frac{1}{7^{2007}} \quad ; \quad 7S = 7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \dots - \frac{1}{7^{2006}} \quad .8S = 7 - \frac{1}{7^{2007}} \\ \Rightarrow S &= \frac{7 - \frac{1}{7^{2007}}}{8} \end{aligned}$$

b/

$$\begin{aligned} M &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2} \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 17 - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{17.18}{2} - 1 \right) = 76 \end{aligned}$$

Câu 56. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2016-2017)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}$; $B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1} \quad B = \\ &\left(\frac{1}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{2}{2015} + 1 \right) + \left(\frac{3}{2014} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1 \right) + 1 \\ B &= \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1} \\ B &= 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} \right) \end{aligned}$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$

Câu 57. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2017-2018)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}$$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2018}$$

$$A = \frac{2017}{2018}$$

Câu 58.

Tính $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

Lời giải

$$S = (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + \dots + (-3)^{2015}.$$

$$-3S = (-3) \cdot [(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2015}]$$

$$= (-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2016}]$$

$$-3S - S = [(-3)^1 + (-3)^2 + \dots + (-3)^{2016}] - (3^0 - (-3)^1 - \dots - (-3)^{2015}).$$

$$-4S = (-3)^{2016} - 1$$

$$S = \frac{(-3)^{2016} - 1}{-4} = \frac{3^{2016} - 1}{-4} = \frac{1 - 3^{2016}}{4}$$

Câu 59. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

1) Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

2) Xét tổng $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2015}{2^{2014}}$. Hãy so sánh T với 3.

Lời giải

1) Ta có: $B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500}\right)$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) = 49 - M$$

Trong đó $M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right)$

Áp dụng tính chất $\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$

Ta có: $\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49}\right)$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lại có: $M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0.$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1$, Do đó $B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

2) Ta có: $T = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2015}{2^{2014}}$ nên $2T = 2 + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2015}{2^{2013}}$

$$2T - T = T = 2 + \frac{3}{2^1} - \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2015}{2^{2013}} - \frac{2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}}$$

Error! Digit expected.

Trong đó $N = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}$

Ta lại có $2N = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2012}}$

$$2N - N = 1 - \frac{1}{2^{2013}} \Rightarrow N < 1$$

Từ đó suy ra $T < 2 + 1 - \frac{2015}{2^{2014}} < 3$.

Câu 60. (Đề thi HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S - P)^{2013}$.

Lời Lời giải

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$ và

$$P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}. \text{ Tính } (S - P)^{2013}.$$

+ Ta có:

$$P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S.$$

Do đó $(S - P)^{2013} = 0$.

Câu 61. (Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn 2012 - 2013)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{99}{2^{99}} + \frac{100}{2^{100}}$. So sánh A với 2.

Lời Lời giải

$$2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$$

$$2A - A = A = \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{99}{2^{99}} + \frac{100}{2^{100}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$

Có $2B = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{98}}$

$$2B - B = B = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{98}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) = 2 - \frac{1}{2^{99}}$$

Câu 62. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2018 - 2019)

Cho biểu thức $C = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$.

Chứng minh rằng $C < \frac{3}{16}$.

Lời Lời giải

Biến đổi: $3C = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$

Ta có

$$3C + C = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right)$$

$$4C = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4C = 1 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2} \right) + \left(-\frac{4}{3^3} + \frac{3}{3^3} \right) + \dots + \left(-\frac{100}{3^{99}} + \frac{99}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } D = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\text{Ta có: } 3D = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right) = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}}$$

Khi đó

$$4D = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$3D + D = \left(3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right)$$

$$4D = 3 + (-1 + 1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{98}} \right) - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4D = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\text{Suy ra } D = \frac{1}{4} \cdot \left(3 - \frac{1}{3^{99}} \right)$$

$$D = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}}$$

$$\text{Nên ta có } 4C = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4C = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right)$$

$$C = \frac{3}{16} - \frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} - \frac{25}{3^{100}}$$

$$C = \frac{3}{16} - \left(\frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} > 0 \text{ nên } \frac{3}{16} - \left(\frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} \right) < \frac{3}{16}. \text{ Vậy } C < \frac{3}{16}.$$

Câu 63. (Đề thi HSG 7 Huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

$$1) \text{ Cho biểu thức: } A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}.$$

$$2) \text{Cho } M = \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \frac{1}{315} + \dots + \frac{1}{9177}$$

So sánh M với $\frac{1}{12}$.

Lời Lời giải

$$1) A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4 \cdot |A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

$$2) M = \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots + \frac{1}{19.21.23}$$

$$\Rightarrow 4M = \frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + \dots + \frac{4}{19.21.23}$$

$$4M = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{19.21} - \frac{1}{21.23} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21.23} = \frac{160}{483}$$

$$\Rightarrow M = \frac{40}{483}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{12} = \frac{40}{480} > \frac{40}{483} \text{ nên } M < \frac{1}{12}.$$

Câu 64. (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2019-2020)

Tính giá trị biểu thức $\frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$

Lời Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$$

$$= \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}$$

$$= 1 - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{99}{100}.$$

Câu 65. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN 2019-2020)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa}$

Lời Lời giải

Ta có: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

Do đó, từ $1+2+3+\dots+n = \overline{aaa} \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999 \Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hoặc $n = 37$, hoặc $n+1 = 37$

Với $n = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa)

Với $n+1 = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn)

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 66. (Đề thi HSG 7 huyện QUỲNH PHỤ 2019-2020)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{Z}$)

Lời Lời giải

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+99} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x.120 + 3^{x+4}.120 + \dots + 3^{x+96}.120 \\ &= 120.(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 67. (Đề thi HSG 7 huyện VĨ NHƯ 2019-2020)

Chúng tỏ rằng $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{29}$ chia hết cho 31.

Lời Lời giải

$$\begin{aligned} 1+5+5^2+5^3+\dots+5^{29} &= (1+5+5^2) + (5^3+5^4+5^5) + \dots + (5^{27}+5^{28}+5^{29}) \\ &= (1+5+5^2) + 5^3.(1+5+5^2) + \dots + 5^{27}.(1+5+5^2) \end{aligned}$$

$$= 31 + 5^3 \cdot 31 + \dots + 5^{27} \cdot 31$$

$$= 31 \cdot (1 + 5^3 + \dots + 5^{27}) \text{ chia hết cho } 31.$$

Câu 68. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ NHƯ 2019-2020)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ với $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

Lời Lời giải

+ Với $n=5$ dễ dàng tính được giá trị biểu thức là $\frac{1669}{3600} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ và BĐT luôn đúng

+. Với $n > 5$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ và có } \forall k \in \mathbb{N}; k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

$$A = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1669}{3600} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$A < \frac{1669}{3600} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$A < \left(\frac{1669}{3600} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{n} < \left(\frac{1669}{3600} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2389}{3600} < \frac{2}{3}.$$

Câu 69. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2019 - 2020)

Lời giải bằng máy tính cầm tay

a) Tính giá trị của đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ tại $x = 2,13$

(kết quả ghi dưới dạng số thập phân lấy trên màn hình).

b) Tìm 2 chữ số cuối của: $A = 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012} + 2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016}$.

Lời Lời giải

a) Cách 1: Ta có thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10} = \frac{x^{11} - 1}{x - 1}$

Thay $x = 2,13$ ta được kết quả $P(2,13) = \frac{2,13^{11} - 1}{2,13 - 1} \approx 3622,355813$.

Cách 2: Nhập vào máy: $\sum_{x=0}^{10} (2,13^x)$ ta được kết quả $P(2,13) \approx 3622,355813$.

b) $A = 2^{2000} (210 + 211 + 212 + 213 + 214 + 215 + 216)$

$$= (2^{20})^{100} \cdot 130048$$

$$\text{Mà } 2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 = 1048576$$

Ta nhận thấy bất kỳ một số có đuôi là 76 thì lũy thừa luôn luôn có đuôi là 76 (dùng máy để kiểm tra)

Do đó: $A = 130048(\dots 76) = \dots 48$.

Vậy 2 số cuối của A có giá trị là 48.

Câu 70. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Bảo 2017-2018)

Cho $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên

Lời Lời giải

$$\text{Có } S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Do $A > 0$ nên $S_n < n-1$

$$\text{Mặt khác } A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n-2 + \frac{1}{n} > n-2 \text{ (do } \frac{1}{n} > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow n-2 < S_n < n-1 \text{ nên } S_n \text{ không là số nguyên}$$

Câu 71. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 1)

Chứng minh rằng : $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Lời Lời giải

$$\text{a) Chứng minh rằng : } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}.$$

$$\text{Đặt : } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta có :

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Vậy: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Câu 72. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 3)

Tính $\left(\frac{3}{4} - 81\right)\left(\frac{3^2}{5} - 81\right)\left(\frac{3^2}{6} - 81\right) \dots \left(\frac{3^{2015}}{2018} - 81\right)$

Lời Lời giải

Trong dãy số có $\frac{3^6}{9} - 81 = \frac{3^6}{3^2} - 81 = 81 - 81 = 0$ Do đó tích bằng 0

Câu 73. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2019-2020)

1) Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1} - \frac{1}{2.1}$

2) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

Lời Lời giải

1) Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1} - \frac{1}{2.1}$

$$= \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right)$$

$$= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right)$$

$$= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{100} - 1 + \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{50} - 1$$

$$= -\frac{49}{50} = \frac{2}{100} - 1$$

2) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt $B = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n$

$$\text{Suy ra } 2B = 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$= 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1}$$

$$2B - B = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1).2^n + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2$$

$$= -(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Đặt } C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$$

$$\text{Suy ra } 2C = 2.(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$= 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}$$

$$2C - C = (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$C = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó: } B = -(2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$= -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có: } (n-1).2^{n+1} = 2^{n+34}$$

$$2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} \cdot [2^{33} - (n-1)] = 0$$

$$\text{Do đó } 2^{33} - n + 1 = 0 \text{ (Vì } 2^{n+1} \neq 0 \text{ với mọi } n)$$

$$n = 2^{33} + 1.$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

Câu 74. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2019-2020)

Chứng minh rằng : $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời Lời giải

$$\text{Đặt } D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \text{ (có 100 số hạng)}$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96}.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2.31 + 2^6.31 + \dots + 2^{96}.31$$

$$D = 31.(2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho 31}$$

Vậy $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 75. (Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Cho biểu thức: $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị của biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời Lời giải

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}}$$

$$A = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Câu 76. (Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}$; $B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời Lời giải

$$B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$$

$$B = \left(\frac{1}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{2}{2015} + 1 \right) + \left(\frac{3}{2014} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1 \right) + 1$$

$$B = \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1}$$

$$B = 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} \right)$$

$$\text{Do đó } \frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$$

Câu 77. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN 2018)

a) Tìm tất cả các cặp số (x; y) thỏa mãn: $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

b) Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Lời Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số (x; y):

Ta có: 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$ và $|x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

suy ra: $(2x - y + 7)^{2012} = 0$ và $|x - 3|^{2013} = 0$

$\Rightarrow 2x - y + 7 = 0$ (1) và $x - 3 = 0$ (2) $x - 3 = 0$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow x = 3$

Từ (1) $\Rightarrow y = 2x + 7 = 2.3 + 7 = 13$

Vậy cặp số (x; y) cần tìm là (3; 13)

b) số tự nhiên n và chữ số a

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

Do đó, từ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa} \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999 \Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hoặc $n = 37$, hoặc $n+1 = 37$

- Với $n = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{37.38}{2} = 703$ (không thỏa)

- Với $n+1 = 37$ thì $\overline{aaa} = \frac{36.37}{2} = 666$ (thỏa mãn)

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 78. (Đề thi HSG 7 huyện KRÔNG ANA năm 2013)

Cho 2 biểu thức P và Q, so sánh giá trị của hai biểu thức đó.

$$P = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2009.2011} + \frac{2}{2011.2013} \quad Q = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2^{1006}}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2^{503}}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2013}}$$

Lời Lời giải

a) Ta có $P = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2009.2011} + \frac{1}{2011.2013}\right)$

Áp dụng: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$

$$P = \frac{2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}$$

$$b) Q = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2013}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{11}{6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \cdot \frac{-1}{6}} = \frac{11}{6} \cdot \frac{-6}{1} = -11$$

Vì $P = \frac{2012}{2013} > 0$ và $Q = -11 < 0$. Vậy $P > Q$

Câu 79. (Đề thi HSG 7 huyện KINH MÔN 2019)

1) Tính $M = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

2) Tính $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019}$; $B = \frac{1}{2018} + \frac{2}{2017} + \frac{3}{2016} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2018}{1}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời Lời giải

$$a) A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$A = \frac{3}{5} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1. \text{ Vậy } A = 1$$

$$b) B = \frac{1}{2018} + \frac{2}{2017} + \frac{3}{2016} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2018}{1}$$

$$B = \left(\frac{1}{2018} + 1\right) + \left(\frac{2}{2017} + 1\right) + \left(\frac{3}{2016} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2017}{2} + 1\right) + 1$$

$$B = \frac{2019}{2018} + \frac{2019}{2017} + \frac{2019}{2016} + \dots + \frac{2019}{2} + \frac{2019}{2019}$$

$$B = 2019 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019}\right)$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{1}{2019}$. Vậy $\frac{A}{B} = \frac{1}{2019}$

Câu 80. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2018)

Cho $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời Lời giải

Có $S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$

$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Do $A > 0$ nên $S_n < n-1$

Mặt khác $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n-2 + \frac{1}{n} > n-2$ (do $\frac{1}{n} > 0$)

$\Rightarrow n-2 < S_n < n-1$ nên S_n không là số nguyên

Câu 81. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI 2018)

a) Tìm số tự nhiên n biết rằng: $3^n + 3^{n+2} = 270$

b) Cho biểu thức: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}$

Chứng tỏ rằng $A < 1$.

Lời Lời giải

Ta có: $3^n + 3^{n+2} = 270 \Rightarrow 3^n(1+3^2) = 270$

$\Rightarrow 3^n \cdot 10 = 270$

$\Rightarrow 3^n \cdot 10 = 270$

$\Rightarrow 3^n = 27$

$\Rightarrow 3^n = 3^3$

$\Rightarrow n = 3$

Vậy $n = 3$

b) Ta có:

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{9.10}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A < \frac{9}{10} < 1$$

Vậy $A < 1$

Câu 82. (Đề thi HSG 7 cấp huyện tỉnh BẮC GIANG 2018)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} -$ và $P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}$. Tính $(S-P)^{2013}$.

Lời Lời giải

$$\text{Cho } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \text{ và}$$

$$P = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}. \text{ Tính } (S-P)^{2013}.$$

+ Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} = S \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (S-P)^{2013} = 0$$

Câu 83. (Đề thi HSG 7 huyện NGA SƠN, 2017 – 2018)

$$1. \text{ Tính giá trị biểu thức: } A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} - \frac{-4}{33} - \frac{5}{44} \right) : \left(38\frac{1}{22} - 39\frac{7}{22} \right)$$

$$2. \text{ Tính } \left(\frac{M}{N} \right)^{2018}, \text{ nếu biết: } M = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2018}; N = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018}.$$

3. So sánh $C = \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2017}} + \frac{1}{5^{2018}}$ với $\frac{1}{4}$

4. Có bao nhiêu phân số có tử số bằng 9, lớn hơn $-\frac{3}{5}$ và nhỏ hơn $-\frac{4}{9}$

Lời Lời giải

1. có: $A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} + \frac{4}{33} - \frac{5}{44}\right) : \left(38 + \frac{1}{22} - 39 - \frac{7}{22}\right) = \frac{-17}{132} : \frac{-14}{11} = \frac{17}{168}$

2. Ta có $M = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2018}$;

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2018}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1009}\right)$$

$$= \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018} = N$$

Suy ra: $\frac{M}{N} = 1 \Rightarrow \left(\frac{M}{N}\right)^{2018} = 1^{2018} = 1$

Vậy $\left(\frac{M}{N}\right)^{2018} = 1$

3. có $4C = 5C - C = \left(1 + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2017}}\right) - \left(\frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2017}} + \frac{1}{5^{2018}}\right)$

suy ra $4C = 1 - \frac{1}{5^{2018}} < 1$ nên $C < \frac{1}{4}$

ta có $\frac{4}{9} < \frac{9}{x} < \frac{3}{5}$ với $x \in \mathbb{N}^*$ quy đồng tử số ta được $\frac{36}{81} < \frac{36}{4x} < \frac{36}{60}$

suy ra $60 < 4x < 81$ suy ra $15 < x < 20,25$ nên $x \in \{16; 17; 18; 19; 20\}$

vậy ta có 5 PS thỏa mãn $\frac{9}{-16}, \frac{9}{-17}, \frac{9}{-18}, \frac{9}{-19}, \frac{9}{-20}$

Câu 84. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH LỘC)

Tìm tỉ số của A và B, biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Lời Lời giải

Ta có :

$$\frac{1}{n(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right)$$

$$\frac{1}{m(25+m)} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right)$$

Áp dụng tính A và B ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{1980} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{25} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1980} \right) - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \\ &= \frac{1}{25} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

Vậy $\frac{A}{B} = \frac{1}{1980} : \frac{1}{25} = \frac{5}{396}$

Câu 85. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH LỘC)

Cho $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời Lời giải

Có $S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$

$$= (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Do $A > 0$ nên $S_n < n-1$

Mặt khác $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n-2 + \frac{1}{n} > n-2 \text{ (do } \frac{1}{n} > 0 \text{)}$$

$\Rightarrow n-2 < S_n < n-1$ nên S_n không là số nguyên

Câu 86. (Đề thi HSG 7 Trường ĐỨC THẮNG)

a). Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} \dots - 2 - 1$. Tính 2010^H

b. Thực hiện tính

$$M = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

Lời giải

a) Ta có $2H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} \dots - 2^2 - 2$

$$2H - H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2009} \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 + 1$$

$$H = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 2010^H = 2010$$

b) $M = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2} = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+17-1)$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{17.18}{2} - 1 \right) = 76$$

Câu 87. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN LẠC)

a/ Tính $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2012^2} - 1 \right)$

Lời giải

a/ Ta có $A = \left(\frac{1-2^2}{2^2} \right) \cdot \left(\frac{1-3^2}{3^2} \right) \dots \left(\frac{1-2012^2}{2012^2} \right) = \left(\frac{-1.3}{2^2} \right) \cdot \left(\frac{-2.4}{3^2} \right) \dots \left(\frac{-2011.2013}{2012^2} \right)$

$$= \frac{1.2.3 \dots 2011}{2.3 \dots 2012} \cdot \frac{3.4 \dots 2013}{2.3.4 \dots 2012} = \frac{1}{2012} \cdot \frac{2013}{2} = \frac{2013}{4024}$$

Câu 88. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ THU' 2015-2016 – NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên.}$$

Lời giải

S Có (n-1) số hạng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < n - 1$$

Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$S > n-1-1+\frac{1}{n} = n-2+\frac{1}{n} > n-2$$

Từ (1) và (2) ta có $n-2 < S < n-1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Câu 89. (Đề thi HSG 7 huyện SƠN DƯƠNG 2015-2016)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (Đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 90. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN HỒNG LỄ 2017-2018)

Cho $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017}$ và

$$B = \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017}.$$

Tính $\frac{A}{B}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \dots + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1008} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \dots + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2016} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} = A. \end{aligned}$$

Do đó $\frac{A}{B} = 1$.

