

Chuyên đề 5. TỈ LỆ THUẬN- NGHỊCH VÀ THỰC TẾ LIÊN QUAN

PHẦN I. TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT

Chủ đề 1. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k .

2. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ thuận với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ thuận với nhau.

* Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k (khác 0) thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số $\frac{1}{k}$.

* Nếu z tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k_1 , y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k_2 thì z tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1.k_2$.

3. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:

* Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k.$$

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3}; \dots$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Dưới đây là bảng giá trị tương ứng của thời gian t (giờ) và quãng đường s (km) trong một chuyển động:

Thời gian t (giờ)	0,8	1,2	1,5	2,5	4
Quãng đường s (km)	20	30	37,5	62,5	100

a) Hai đại lượng quãng đường s (km) và thời gian t (giờ) có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

b) Tính quãng đường đi ứng với thời gian 6 giờ 30 phút?

c) Nếu quãng đường là 90 km thì thời gian đi là bao nhiêu ?

✓ *Tìm cách giải:* Dựa vào tính chất để kết luận: ta nhận thấy:

$$\frac{20}{0,8} = \frac{30}{1,2} = \frac{37,5}{1,5} = \frac{62,5}{2,5} = \frac{100}{4} = 25$$

Nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi. Từ đó tìm ra công thức và tính s với $t = 6$ giờ 30 phút = 6,5 giờ và tính t với $s = 90$ km.

Giải

a) Ta có: $\frac{s}{t} = \frac{20}{0,8} = \frac{30}{1,2} = \frac{37,5}{1,5} = \frac{62,5}{2,5} = \frac{100}{4} = 25.$

Ta thấy tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi $\frac{s}{t} = 25 \Rightarrow s = 25t$ nên đại lượng s tỉ lệ thuận với đại lượng t .

b) Với $t = 6,5$ (giờ) thì $s = 25.6,5 = 162,5(km)$.

c) Với $s = 90(km)$ thì $t = 90 : 25 = 3,6(\text{giờ}) = 3 \text{ giờ } 36 \text{ phút}.$

✓ **Chú ý:** Đây chính là bài toán thể hiện quan hệ giữa ba đại lượng quãng đường (s), thời gian (t) và vận tốc (v) của một động tử mà quan hệ là $s = vt$. Trong bài toán chuyển động đều cùng vận tốc v thì s và t là hai đại lượng tỉ lệ thuận (nếu cùng thời gian t thì s và v cũng là hai đại lượng tỉ lệ thuận).

Ví dụ 2: Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I

x	1	2	3	4	6
y	2	3	5	6	10

Bảng II

x	-2	-3	-4	-6	1
y	6	9	12	18	-3

a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?

b) Trong trường hợp hai đại lượng tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y = -18$; tìm y biết $x = 15$.

✓ **Tìm cách giải:**

a) Ta tìm tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y nếu chúng luôn không đổi thì y tỷ lệ thuận với x . Còn nếu xét hai tỷ số giữa hai cặp giá trị tương ứng nào đó của hai đại lượng mà khác nhau ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Ta tìm hệ số tỷ lệ k , tìm công thức $y = kx$ rồi tính ra số cần tìm.

Giải

a) Trong bảng I ta có $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$; nên y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Trong bảng II ta có $\frac{6}{-2} = \frac{9}{-3} = \frac{12}{-4} = \frac{18}{-6} = \frac{-3}{1} = -3$ nên y và x tỉ lệ thuận với nhau. Suy ra $k = -3$ và $y = -3x$.

+ Với $y = -18$ thì $-18 = -3x \Rightarrow x = (-18) : (-3) = 6$

+ Với $x = 15$ thì $y = -3.15 \Rightarrow y = -45$.

Ví dụ 3: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết hiệu hai giá trị nào đó của x là 2 và hiệu hai giá trị tương ứng của y là 12. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0				
y				0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biết hiệu hai giá trị của x giả sử $x_1 - x_2 = 2$ và hiệu hai giá trị tương ứng của y là $y_1 - y_2 = 12$ ta nghĩ đến sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm hệ số tỉ lệ $k \Rightarrow y = kx$.

b) Từ công thức $y = kx \Rightarrow x = y : k$ rồi tính ra số cần điền vào ô trống.

Giải

a) Gọi hai giá trị của x là x_1 và x_2 với $x_1 - x_2 = 2$ và hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2 . Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = 6x$.

b) Từ công thức $y = 6x \Rightarrow x = y : 6$.

Kết quả các số điền vào bảng như sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	1	3
y	-30	-15	-3	0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

Ví dụ 4: 15 lít dầu hỏa có khối lượng 12kg. Hỏi 1 thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng bao nhiêu kg? (không kể khối lượng vỏ thùng)

* *Tìm cách giải:* Đại lượng dung tích dầu hỏa (x) tỉ lệ thuận với khối lượng dầu hỏa (y). Đại lượng x có hai giá trị $x_1 = 15$ (lít); $x_2 = 55$ (lít). Đại lượng y có hai giá trị tương ứng là $y_1 = 12$ (kg) và y_2 là giá trị cần tìm. Dựa vào tính chất $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ để tính khối lượng dầu cần tìm.

Giải

Gọi khối lượng dầu cần tìm là y_2 kg; ($y_2 > 0$). Do khối lượng dầu hỏa tỉ lệ thuận với dung tích của nó nên ta có:

$$\frac{12}{15} = \frac{y_2}{55} \Rightarrow y_2 = 55 \cdot \frac{12}{15} = 44(kg).$$

Vậy thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng 44 kg.

Ví dụ 5: Cho y tỉ lệ thuận với x . Biết hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 1216 và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 19.

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x .

b) Tính $y_3^3 + y_4^3$ biết $x_3 = 2$ và $x_4 = -3$

✓ *Tìm cách giải:* Ta biết nếu $\frac{y_i}{x_i} = k$ thì $\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^3 = \frac{y_i^3}{x_i^3} = k^3$. Hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là $y_1^3 - y_2^3 = 1216$ và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là $x_1^3 - x_2^3 = 19$. Sử dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có cách giải sau:

Giải

a) Theo đầu bài vì y tỉ lệ thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$. Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$k^3 = \frac{y_1^3}{x_1^3} = \frac{y_2^3}{x_2^3} = \frac{y_1^3 - y_2^3}{x_1^3 - x_2^3} = \frac{1216}{19} = 64 = 4^3$$

$\Rightarrow k = 4$. Do đó ta có công thức $y = 4x$.

b) Với $x_3 = 2$ thì $y_3 = 4 \cdot 2 = 8$; với $x_4 = -3$ thì $y_4 = 4 \cdot (-3) = -12$

Do đó $y_3^3 + y_4^3 = 8^3 + (-12)^3 = 512 - 1728 = -1216$.

Ví dụ 6: Một ô tô chạy từ A lúc 5 giờ sáng đến B lúc 9 giờ. Một xe máy chạy từ B cũng vào lúc 5 giờ sáng và đến A lúc 13 giờ. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

✓ *Tìm cách giải:* Ta có thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 9 giờ - 5 giờ = 4 giờ thì 1 giờ xe ô tô đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường AB. Xe máy đi quãng đường BA hết 13 giờ - 5 giờ = 8 giờ thì 1 giờ xe máy đi

được $\frac{1}{8}$ quãng đường AB. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ

thuận. Nên nếu gọi t là thời gian hai xe gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; v_1 là vận tốc ô tô; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô; v_2 là vận tốc xe máy. Ta có

$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$ và $s_1 + s_2$ chính là quãng đường AB. Từ đó có cách giải sau:

Giải

Coi quãng đường AB là đơn vị quy ước ($=1$). Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là $9 - 5 = 4$ (giờ) thì vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB/giờ). Xe máy đi quãng đường BA hết $13 - 5 = 8$ (giờ) thì vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{1}{8}$ (quãng đường AB/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô ta có $s_1 + s_2 = 1$.

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 40 \text{ phút.}$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 7 giờ 40 phút.

✓ *Chú ý:* Ta có cách giải khác: Nếu gọi độ dài quãng đường AB là a (km) thì vận tốc của vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{a}{4}$ (km/giờ); vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{a}{8}$ (km/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô, ta có: $s_1 + s_2 = a$.

$$\text{Ta có: } t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{a}{\frac{a}{4} + \frac{a}{8}} = \frac{a}{\frac{3a}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 40 \text{ phút.}$$

Ví dụ 7: Cho $\triangle ABC$ có số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$. Tính số đo các góc của $\triangle ABC$.

✓ *Tìm cách giải:* Ta có: $A + B + C = 180^\circ$ và do số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$ nghĩa là

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5}. \text{ Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải sau:}$$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$$

$$\text{Suy ra } A = 2.18^\circ = 36^\circ; B = 3.18^\circ = 54^\circ; C = 5.18^\circ = 90^\circ$$

✓ *Chú ý:* Bài toán trên thuộc dạng chia một số thành những phần tỉ lệ thuận với các số cho trước.

Phương pháp chung để giải các bài toán dạng đó là: Giả sử phải chia một số t thành n phần $t_1, t_2, \dots, t_n$

tỉ lệ thuận với các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ (khác 0) với $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta làm như sau:

$$\frac{t_1}{a_1} = \frac{t_2}{a_2} = \dots = \frac{t_n}{a_n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{t}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = k$$

Từ đó có $t_1 = ka_1; t_2 = ka_2; \dots; t_n = ka_n$.

Ví dụ 8: Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D tham gia lao động trồng cây. Số cây mỗi lớp trồng tỉ lệ lần lượt với 5; 4; 3; 2. Biết rằng 5 lần số cây của lớp 7A trồng cộng với 4 lần số cây lớp 7B trồng nhiều hơn ba lần tổng số cây của 7C và 7D trồng là 520 cây. Tìm số cây mỗi lớp đã trồng.

✓ *Tìm cách giải:* Nếu số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là x, y, z, t ta có $5x + 4y - 3(z + t) = 520$.

Mặt khác $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4z}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6}$

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta tìm được hệ số tỉ lệ. Từ đó tìm được $x; y; z; t$.

Giải

Gọi số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: x, y, z, t ($x, y, z, t \in N^*$) thì

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4z}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6} = k.$$

Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$k = \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{5x}{25} = \frac{4z}{16} = \frac{3y}{9} = \frac{3t}{6} = \frac{5x + 4y - 3(y + t)}{25 + 16 - (9 + 6)} = \frac{520}{26} = 20$$

Suy ra $x = 5k = 100; y = 4k = 80; z = 3k = 60; t = 2k = 40$.

Vậy số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: 100 cây; 80 cây; 60 cây; 40 cây.

Ví dụ 9:

a) Một số A được chia làm 4 phần a, b, c, d biết rằng a và b tỉ lệ với 5 và 6; b và c tỉ lệ với 8 và 9; c và d tỉ lệ với 3 và 2 và c hơn d là 27. Tìm A?

b) Một số B được chia làm năm phần $x; y; z; t; u$ biết rằng $x : y : z : t : u = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$ và

$$\frac{x}{4} = \frac{135 - z}{3}. \text{ Tìm B?}$$

✓ *Tìm cách giải:*

a) a và b tỉ lệ với 5 và 6 nghĩa là $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$; hay $\frac{a}{5} = \frac{b}{6}$;

b và c tỉ lệ với 8 và 9 nghĩa là $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$ hay $\frac{b}{8} = \frac{c}{9}$.

Để có thể lập được thành dãy tỉ số bằng nhau, ta nhận thấy BCNN $(6; 8) = 24$ do đó ta biến đổi

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{24};$$

Tương tự $\frac{b}{c} = \frac{8}{9} = \frac{24}{27} \Rightarrow \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$ từ đó suy ra $\frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$.

Tiếp tục với c và d ta lập được dãy tỉ số bằng nhau.

$$b) \text{ Từ } x:y:z:t:u = \frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6} = \frac{30}{60}:\frac{40}{60}:\frac{45}{60}:\frac{48}{60}:\frac{50}{60}$$

$$= 30:40:45:48:50 \text{ và } \frac{x}{4} = \frac{135-z}{3} \Rightarrow 3x+4z=540. \text{ Ta áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.}$$

Giải

$$a) \text{ Theo bài ra, ta có: } \frac{a}{b} = \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{b}{24} \quad (1)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{8}{9} = \frac{24}{27} \Rightarrow \frac{b}{24} = \frac{c}{27} \quad (2)$$

$$\text{và } \frac{c}{d} = \frac{3}{2} = \frac{27}{18} \Rightarrow \frac{c}{27} = \frac{d}{18} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3) suy ra: } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27} = \frac{d}{18} = \frac{c-d}{27-18} = \frac{27}{9} = 3.$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27} = \frac{d}{18} = \frac{a+b+c+d}{20+24+27+18} = \frac{A}{89} = 3 \Rightarrow A = 267.$$

$$b) \frac{x}{4} = \frac{135-z}{3} \Rightarrow 3x+4z=540.$$

$$\text{Ta có } x:y:z:t:u = \frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6} = \frac{30}{60}:\frac{40}{60}:\frac{45}{60}:\frac{48}{60}:\frac{50}{60}$$

$$= 30:40:45:48:50$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45} = \frac{t}{48} = \frac{z}{50} = \frac{3x}{90} = \frac{4z}{180} = \frac{3x+4z}{90+180} = \frac{540}{270} = 2$$

$$\Rightarrow x=60; y=80; z=90; t=96; u=100.$$

$$\text{Vậy } B = 60+80+90+96+100 = 426.$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Dưới đây là bảng giá trị tương ứng của thể tích $V \text{ (cm}^3\text{)}$ với khối lượng $m \text{ (g)}$ của sắt:

Thể tích $V \text{ (cm}^3\text{)}$	2	2,4	4	5	6
Khối lượng $m \text{ (g)}$	15,7	18,84	31,4	39,25	47,1

a) Chứng tỏ hai đại lượng khối lượng $m \text{ (g)}$ và thể tích $V \text{ (cm}^3\text{)}$ là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Viết công thức?

b) Tính khối lượng của 3cm^3 sắt.

c) Một khối lượng 125,6 g sắt có thể tích bao nhiêu?

2. Cùng năng suất lao động thì số lượng sản phẩm K (chiếc áo) và thời gian t (ngày) của một xưởng may là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền vào ô trống các số thích hợp trong bảng sau:

Thời gian t (ngày)		4	5		15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720		1440	

3. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I						
			5			

Bảng II						
	,5				5	

a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?

b) Trong trường hợp có tương quan tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y = -60$; tìm y biết $x = 0,8$.

4. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết tổng hai giá trị nào đó của x là 673 và tổng hai giá trị tương ứng của y là 2019. Hỏi hai đại lượng x và y liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (với $a \neq 0$):

x	-3			$\frac{3}{4}$		2		$\frac{a}{-3}$
y		6	$-\frac{3}{2}$		-3		-3b	

5. Cho x tỉ lệ thuận với y theo hệ số k_1 ; y tỉ lệ thuận với z theo hệ số k_2 ; z tỉ lệ thuận với t theo hệ số k_3 . Chứng minh x tỉ lệ thuận với t. Tìm hệ số tỉ lệ của t với x.

6. Một đoạn dây đồng dài 2,5 m có khối lượng 8,4 kg. Hỏi 80 m dây đồng như thế nặng bao nhiêu kg?

7. Một thửa ruộng hình chữ nhật có 2 cạnh tỉ lệ với 5 và 8. Biết chiều dài hơn chiều rộng là 18m.

a) Tìm diện tích của thửa ruộng hình chữ nhật đó.

b) Người ta trồng lúa trên thửa ruộng đó, biết rằng cứ $25m^2$ thu hoạch được 20kg thóc. Hỏi thửa ruộng thu hoạch được bao nhiêu kg thóc?

8. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận; x_1 và x_2 là hai giá trị khác nhau của x và y_1 và y_2 là các giá trị tương ứng của y.

a) Tìm x_1 biết $x_2 = 5$; $y_1 = \frac{-2}{3}$ và $y_2 = \frac{5}{9}$;

b) Tính x_2 và y_2 biết $y_2 - x_2 = -8$; $x_1 = -6, 2$; $y_1 = 3, 8$.

9. Cho $x; y; z$ tỉ lệ thuận với $3; 4; 5$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = 2018(x - y)(y - z) - 504,5 \left(\frac{x + y + z}{6} \right)^2.$$

10. Cho $24a - 30b$; $40c - 24a$; $30b - 40c$ tỉ lệ thuận với 2018 ; 2019 ; 2020 . Biết $a + b + c = 2016$.
Tìm $a; b; c$.

11. Cho y tỉ lệ thuận với x . Biết hiệu hai bình phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 128 và hiệu hai bình phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 8 .

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x ;

b) Tính $y_3^2 - y_4^2$ biết $x_3 = 3$ và $x_4 = -8$.

12. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ M và N cách nhau 55 km và đến P cùng một lúc (ba địa điểm M, N, P nằm trên một đường thẳng). Vận tốc của ô tô đi từ M là 50 km/h, vận tốc ô tô đi từ N là 60 km/h. Tính quãng đường mà hai ô tô đã đi.

13. Cùng lúc 7 giờ sáng một ô tô chạy từ A và đến B lúc 8 giờ 30 phút, một xe đạp điện chạy từ B đến A lúc 10 giờ. Một xe đạp khởi hành từ A lúc 6 giờ và đến B lúc 12 giờ. Hỏi:

a) Xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau lúc mấy giờ?

b) Xe ô tô gặp xe đạp lúc mấy giờ?

14. Lúc 6 giờ sáng trên quãng đường AB dài 93 km, người đi xe máy thứ nhất đi từ A đến B có vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc người đi xe máy thứ hai đi từ B đến A. Đến lúc gặp nhau thời gian người đi xe máy thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ thời gian người đi xe máy thứ hai.

Tính quãng đường mỗi người đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

15. Một ca nô khi nước yên lặng có vận tốc là 30 km/h. Với cùng thời gian ca nô xuôi dòng 99 km thì ca nô ngược dòng được bao nhiêu km biết một cụm bè trôi trên dòng sông 9 km trong 3 giờ.

16. Một ô tô khách và một ô tô tải cùng khởi hành lúc 8 giờ sáng từ hai đầu quãng đường AB dài 100 km. Ô tô khách đi từ A đến B với vận tốc 750 m/phút. Ô tô tải đi từ B đến A sau 2 giờ đi được 70 km. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Hỏi đến mấy giờ thì ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M?

b) Nếu đi tiếp với vận tốc ấy thì sau mấy giờ nữa thì ô tô khách đến B?

17. Ba tổ sản xuất của một xí nghiệp cùng sản xuất một loại sản phẩm với năng suất lao động của mỗi công nhân đều như sau. Tổ một có 12 người trong 9 ngày sản xuất được 540 sản phẩm. Tổ hai có 18

người trong 8 ngày; tổ ba có 10 người làm trong 4 ngày. Hỏi tổ hai và ba mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

18. Một số dương A được chia làm bốn phần đều dương tỉ lệ với $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$ và tổng các bình phương của bốn phần ấy là 23716. Tìm số A.

19. Bốn túi đường có tổng cộng 375 kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1kg ở túi thứ nhất; 2kg ở túi thứ hai; 3kg ở túi thứ ba; 4kg ở túi thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy tiếp đi $\frac{1}{5}$ số kg đường còn lại của túi thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số kg đường còn lại của túi thứ hai; $\frac{1}{3}$ số kg đường còn lại của túi thứ ba, $\frac{1}{2}$ số kg đường còn lại của túi thứ tư thì số kg đường còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn túi bằng nhau. Tìm số kg đường mỗi túi lúc đầu.

20. Cho ba số x, y, z tỉ lệ thuận lần lượt với 2009; 2010; 2011

a) Chứng minh rằng $(x - z)^3 = 8(x - y)^2(y - z)$;

b) Cho biết $\frac{x}{26} + \frac{y}{4} = \frac{z}{2012}$. Tính x, y, z .

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) Ta nhận thấy: $\frac{m}{V} = \frac{15,7}{2} = \frac{18,84}{2,4} = \frac{31,4}{4} = \frac{39,25}{5} = \frac{47,1}{6} = 7,85(g/cm^3)$

nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi nên hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau. Từ đó $m = 7,85.V$.

b) Với $V = 3(cm^3)$ thì $m = 7,85.3 = 23,55(g)$.

c) Với $m = 125,6(g)$ thì $V = 125,6 : 7,85 = 16(cm^3)$.

2. Ta có $k = \frac{720}{4} = 180$ (chiếc áo/ngày) $\Rightarrow K = kt$ và $t = K : k$. Ta sẽ có

Thời gian t (ngày)	2	4	5	8	15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720	900	1440	2700

3.

a) Trong bảng I hai giá trị tương ứng của hai đại lượng là $\frac{-6}{-3} \neq \frac{2,5}{2}$ ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

Trong bảng II tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y và x luôn không đổi

$$\frac{-1,5}{-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2,5}{5} = 0,5 \text{ nên ta có } y \text{ tỷ lệ thuận với } x.$$

b) Trong bảng II ta suy ra $k = 0,5$ và $y = 0,5x$.

Với $y = -60$ thì $-60 = 0,5x \Rightarrow x = (-60) : 0,5 = -120$.

Với $x = 0,8$ thì $y = 0,8 \cdot 0,5 \Rightarrow y = 0,4$.

4.

a) Biết tổng hai giá trị của x giả sử $x_1 + x_2 = -673$ và tổng hai giá trị tương ứng của y là $y_1 + y_2 = 2019$. Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2019}{-673} = -3.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = -3x$.

b) Từ công thức $y = -3x \Rightarrow x = y : (-3)$.

Kết quả điền số:

x	-3	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	b	$\frac{a}{-3}$
y	9	6	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-3	-6	-3b	a

5. Ta có $x = k_1y; y = k_2z; z = k_3t \Rightarrow x = k_1k_2k_3t$.

Nghĩa là x tỉ lệ thuận với t theo hệ số $k_1k_2k_3$.

Do đó t tỉ lệ thuận với x theo hệ số $\frac{1}{k_1k_2k_3}$.

6. Gọi khối lượng dây đồng cần tìm là y_2 . Do khối lượng dây đồng tỉ lệ thuận với chiều dài của nó nên ta có:

$$\frac{8,4}{y_2} = \frac{2,5}{80} \Rightarrow y_2 = (8,4 : 80) : 2,5 = 268,8$$

Vậy 80m dây đồng nặng 268,8 kg.

7.

a) Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), chiều rộng là y (m) ($x, y > 0$) thì $x - y = 18$. Ta có

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x - y}{8 - 5} = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow x = 48; y = 15.$$

Diện tích thửa ruộng là $48 \cdot 15 = 720 (m^2)$.

b) Số thóc thu hoạch và số m^2 ruộng là hai đại lượng tỷ lệ thuận. Do đó nếu gọi số thóc thu hoạch là x kg ($x > 0$).

Ta có: $\frac{25}{720} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 720.20 : 25 = 576(kg)$.

8.

$$a) \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{y_1 \cdot x_2}{y_2} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot 5}{\frac{5}{9}} = -6.$$

$$b) \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1} = \frac{-8}{3,8 + 6,2} = -0,8.$$

Vậy: $x_2 = (-0,8) \cdot (-6,2) = 4,96$

$$y_2 = (-0,8) \cdot 3,8 = -3,04.$$

9*. Do $x; y; z$ tỉ lệ thuận với 3; 4; 5 nên ta đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$

$\Rightarrow x = 3k; y = 4k; z = 5k$. Ta có:

$$A = 2018(3k - 4k)(4k - 5k) - 504,5 \cdot \left(\frac{3k + 4k + 5k}{6} \right)^2$$

$$= 2018(-k)(-k) - 504,5 \cdot \left(\frac{12k}{6} \right)^2$$

$$= 2018k^2 - 504,5 \cdot 4k^2 = 2018k^2 - 2018k^2 = 0$$

10*. $24a - 30b; 40c - 24a; 30b - 40c$ tỉ lệ thuận với 2018; 2019; 2020 nên:

$$\frac{24a - 30b}{2018} = \frac{40c - 24a}{2019} = \frac{30b - 40c}{2020} = \frac{24a - 30b + 40c - 24a + 30b - 40c}{2018 + 2019 + 2020} = 0$$

Do đó $24a - 30b = 0 \Rightarrow 4a = 5b$ hay $\frac{a}{5} = \frac{b}{4}$ (1)

$$40c - 24a = 0 \Rightarrow 5c = 3a \text{ hay } \frac{a}{5} = \frac{c}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{5+4+3} = \frac{2016}{12} = 168.$

Vậy $a = 840; b = 672; c = 504.$

11.

a) Ta biết nếu $\frac{y_i}{x_i} = k$ thì $\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 = \frac{y_i^2}{x_i^2} = k^2$. Ta có: $y_1^2 - y_2^2 = 128$ và $x_1^2 - x_2^2 = 8$. Theo đầu bài vì y tỉ

lệ thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{y_2^2}{x_2^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{128}{8} = 16 = (\pm 4)^2$$

$\Rightarrow k = -4$ hoặc $k = 4$. Do đó ta có công thức $y = -4x$ hoặc $y = 4x$.

b) Với $x_3 = 3$ thì $y_3 = \pm 4.3 = \pm 12$;

Với $x_4 = -8$ thì $y_4 = \pm 4.(-8) = \mp 32$.

Do đó $y_3^2 - y_4^2 = (\pm 12)^2 - (\mp 32)^2 = 144 - 1024 = -880$.

12. Gọi quãng đường đi được của hai xe là S_M và S_N .

Có hai trường hợp xảy ra:

1) Địa điểm P nằm giữa M và N.

Do thời gian đi của hai xe bằng nhau nên quãng đường đi và vận tốc của hai xe là tỉ lệ thuận. Ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M + S_N}{50 + 60} = \frac{55}{110} = 0,5.$$

Vậy $S_M = 0,5.50 = 25 (km)$; $S_N = 0,5.60 = 30 (km)$.

2) Địa điểm P không nằm giữa M và N.

* Trường hợp N nằm giữa M và P không xảy ra vì nếu như vậy người đi từ N sẽ đến trước người đi từ M.

* Trường hợp M nằm giữa N và P. Tương tự 1) ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M - S_N}{60 - 50} = \frac{55}{10} = 5,5.$$

Do đó $S_M = 5,5.50 = 275 (km)$; $S_N = 5,5.60 = 330 (km)$.

13.

a) Gọi quãng đường AB dài a km ($a > 0$).

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ thì vận tốc xe ô tô là

$$v_1 = a : \frac{3}{2} = \frac{2a}{3} \text{ (km/giờ)}.$$

Xe đạp điện đi quãng đường BA hết 3 giờ thì vận tốc xe đạp điện là: $v_2 = \frac{a}{3}$ (km/giờ).

Gọi t_1 là thời gian hai xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp điện; s_2 là quãng đường xe đạp điện đi từ B đến chỗ gặp ô tô ($t_1; s_1; s_2 > 0$) ta có: $s_1 + s_2 = a$

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{a}{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}} = \frac{a}{a} = 1.$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 8 giờ.

b) Gọi t_2 là thời gian xe ô tô khởi hành từ A đến lúc gặp xe đạp; s_3 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp, vận tốc của ô tô $v_3 = v_1$; s_4 là quãng đường xe đạp đi từ A lúc 7 giờ đến chỗ gặp ô tô ($t_2; s_3; s_4 > 0$).

Vận tốc xe đạp là $v_4 = \frac{a}{6}$ km/giờ. Lúc 7 giờ xe đạp cách xe ô tô quãng đường là $\frac{a}{6}$ km. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$\text{Do đó } t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{a}{6}}{\frac{2a}{3} - \frac{a}{6}} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \text{ (giờ)} = 20 \text{ phút.}$$

Ô tô và xe đạp gặp nhau lúc 7 giờ 20 phút.

✓ Chú ý: Bài toán có thể giải theo cách coi đoạn đường AB là đơn vị quy ước ($=1$)

$$\text{Thì } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1 \text{ (giờ) và}$$

$$t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{3} \text{ (giờ)}, \text{ Bạn đọc tự giải.}$$

14. Gọi v_1, v_2 là vận tốc; t_1, t_2 là thời gian đi; s_1, s_2 là quãng đường đi được của xe máy thứ nhất và xe máy thứ hai từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

$$\text{Ta có: } v_1 = \frac{3}{4}v_2; \quad t_1 = \frac{5}{4}t_2 \text{ nên } v_1t_1 = \frac{15}{16}v_2t_2 \text{ hay } s_1 = \frac{15}{16}s_2$$

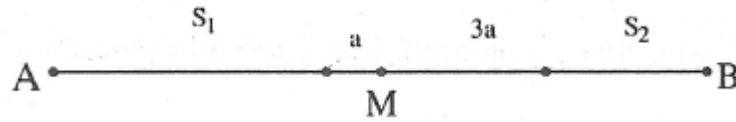
$$\text{Ta có } \frac{s_1}{15} = \frac{s_2}{16} = \frac{s_1 + s_2}{15 + 16} = \frac{93}{31} = 3$$

$$\Rightarrow s_1 = 45(\text{km}) \text{ và } s_2 = 48(\text{km}).$$

15. Vận tốc trôi của bè chính là vận tốc dòng nước bằng $9:3=3$ (km/giờ). Gọi x km là quãng đường ca nô ngược dòng ($x > 0$). Vận tốc ca nô xuôi dòng là $30 + 3 = 33$ (km/h); Vận tốc ca nô khi

ngược dòng là $30 - 3 = 27$ (km/h). Cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó ta có $\frac{33}{27} = \frac{99}{x} \Rightarrow x = \frac{99 \cdot 27}{33} = 81$ (km).

16. Nửa quãng đường AB dài 50km; Vận tốc ô tô khách 750m/phút = 45km/giờ. Vận tốc ô tô tải là $70 : 2 = 35$ (km/giờ).



a) Gọi quãng đường ô tô khách và ô tô tải đã đi là s_1 và s_2 và t là thời gian mỗi xe đã đi. Trong cùng một thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc do đó: $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$.

$$\text{Ta có: } t = \frac{50 - a}{45} = \frac{50 - 3a}{35} = \frac{150 - 3a}{135} = \frac{150 - 3a - 50 + 3a}{135 - 35} = 1.$$

Vậy thời điểm mà ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M là 8 giờ + 1 giờ = 9 giờ (sáng).

b) Thời gian ô tô khách đi tiếp đến B là: $(100 - 45 \cdot 1) : 45 = 1\frac{2}{9}$ (giờ)

17. Gọi x là số sản phẩm tổ hai làm; y là số sản phẩm tổ ba làm ($x, y \in \mathbb{N}^*$). Tổ một có 12 người làm 9 ngày được $12 \cdot 9 = 108$ ngày công. Tổ hai có 18 người làm 8 ngày được $18 \cdot 8 = 144$ ngày công. Tổ ba có 10 người làm 4 ngày được $10 \cdot 4 = 40$ ngày công. Cùng năng suất lao động thì số sản phẩm làm được tỷ lệ thuận với số ngày công.

$$\text{Do đó: } \frac{108}{144} = \frac{540}{x} \Rightarrow x = \frac{540 \cdot 144}{108} = 720 \text{ (sản phẩm).}$$

$$\frac{108}{40} = \frac{540}{y} \Rightarrow y = \frac{540 \cdot 40}{108} = 200 \text{ (sản phẩm).}$$

18. Gọi bốn phần của A là $x; y; z; t$ ($x; y; z; t > 0$)

$$\text{thì } A = x + y + z + t \text{ và } x : y : z : t = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = 30 : 40 : 45 : 48.$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45} = \frac{t}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{900} = \frac{y^2}{1600} = \frac{z^2}{2025} = \frac{t^2}{2304} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{900 + 1600 + 2025 + 2304} = \frac{27316}{6829} = 4 = (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow x = 60; y = 80; z = 90; t = 96 \text{ và } A = 60 + 80 + 90 + 96 = 326.$$

19. Gọi số kg đường bốn túi lúc đầu lần lượt là: $x + 1; y + 2; z + 3; t + 4$ ($x, y, z, t > 0$).

Sau khi lấy đi lần thứ nhất thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là $x; y; z; t$ và tổng số kg đường còn lại của 4 túi là $375 - (1 + 2 + 3 + 4) = 365 (kg)$

Sau khi lấy đi lần thứ hai thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là: $\frac{4}{5}x; \frac{3}{4}y; \frac{2}{3}z; \frac{1}{2}t$.

Ta có:

$$\frac{4x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{2z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{12x}{15} = \frac{12y}{16} = \frac{12z}{18} = \frac{12t}{24} = \frac{12(x+y+z+t)}{73} = \frac{12 \cdot 365}{73} = 60$$

Suy ra $x = 75; y = 80; z = 90; t = 120$.

Số kg đường mỗi túi lúc đầu là:

+ Túi thứ nhất: $75 + 1 = 76 (kg)$

+ Túi thứ hai: $80 + 2 = 82 (kg)$

+ Túi thứ ba: $90 + 3 = 93 (kg)$

+ Túi thứ tư: $120 + 4 = 124 (kg)$

20.

a) Ta có: $\frac{x}{2009} = \frac{y}{2010} = \frac{z}{2011} = \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1}$

Với ba tỉ số bằng nhau, lập phương tỉ số thứ nhất sẽ bằng bình phương tỉ số thứ hai nhân với tỷ số thứ ba nên:

$$\left(\frac{x-z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1}\right) \Leftrightarrow \frac{(x-z)^3}{-8} = \frac{(x-y)^2(y-z)}{-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z).$$

b) $\frac{x}{26} + \frac{y}{4} = \frac{z}{2012} \Leftrightarrow \frac{2x+13y}{52} = \frac{z}{2012} \Leftrightarrow 2x+13y = \frac{52z}{2012} \quad (1)$

$$\frac{x}{2009} = \frac{y}{2010} = \frac{z}{2011} = \frac{2x}{2 \cdot 2009} = \frac{13y}{13 \cdot 2010} = \frac{2x+13y}{2 \cdot 2009 + 13 \cdot 2010} = \frac{z}{2011} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{52z}{2012 \cdot (2 \cdot 2009 + 13 \cdot 2010)} = \frac{z}{2011} \Rightarrow z = 0.$

Ta suy ra $x = y = z = 0$.

Chủ đề 2. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a .

2. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì:

* Tích của một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số: $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots = a$.

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1}, \dots$

3. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ nghịch với nhau.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a thì x cũng tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a .

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$.

* Nếu z tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a_1 và y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong hai bảng:

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75		22,5	-7,5	
y	-15	10	-9	-60	-2,5			-8

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95		0,35	$-\frac{2}{5}$	
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5			1975

a) Xác định xem hai đại lượng y và x trong bảng nào tỉ lệ thuận? tỉ lệ nghịch? Tìm các hệ số tỉ lệ (biết các giá trị tương ứng còn lại cùng có quan hệ tỉ lệ như các giá trị đã cho trong bảng).

b) Điền tiếp các giá trị vào ô trống.

✓ *Tìm cách giải:*

- Ta tìm quan hệ tất cả các giá trị tương ứng đã cho của y và x . Nếu có $y = kx$ thì y và x tỉ lệ thuận. Nếu có $x.y = a$ thì y tỉ lệ nghịch với x .
- Dựa vào các mối tương quan điền tiếp các số vào ô trống.

Giải

Tại bảng I: Ta có $3.(-15) = -4,5.10 = 5.(-9) = -0,75.60 = -45$.

Nên y tỉ lệ nghịch với x . Hệ số tỉ lệ -45 . Công thức $x.y = -45$.

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75	18	22,5	-7,5	5,625
y	-15	10	-9	-60	-2,5	-2	6	-8

Tại bảng II: $\frac{15}{3} = \frac{-2,5}{-0,5} = \frac{-30}{-6} = \frac{4,75}{0,95} = 5$.

Nên y tỉ lệ thuận với x . Hệ số tỉ lệ 5. Công thức $y = 5x$.

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95	-1,5	0,35	$-\frac{2}{5}$	395
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5	1,75	-2	1975

Ví dụ 2: Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y ; x_1 và x_2 là hai giá trị của x và y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y .

Biết $y_1 = 3,5$; $y_2 = 2,5$ và $8x_2 - 5x_1 = 31$.

Tính x_1, x_2 và hệ số tỉ lệ a của hai đại lượng tỉ lệ nghịch này.

✓ *Tìm cách giải:* Ta sử dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch: Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, để xuất hiện

$8x_2 - 5x_1$ ta biến đổi $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$ và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau. Từ đó tìm x_1 và x_2 và hệ số tỉ lệ a .

Giải

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{8y_1}{8x_2} = \frac{5y_2}{5x_1} = \frac{8y_1 - 5y_2}{8x_2 - 5x_1} = \frac{8.3,5 - 5.2,5}{31} = \frac{15,5}{31} = 0,5.$$

Do đó $x_1 = y_2 : 0,5 = 2,5 : 0,5 = 5$

Và $x_2 = y_1 : 0,5 = 3,5 : 0,5 = 7$.

Hệ số tỉ lệ của hai đại lượng là: $a = x_1 \cdot y_1 = 5 \cdot 3,5 = 17,5$.

✓ *Chú ý:* Ta có thể dùng định nghĩa của đại lượng tỉ lệ nghịch để giải:

Từ $xy = a$

$$\text{Ta có } x_1 = \frac{a}{y_1}; x_2 = \frac{a}{y_2} \Rightarrow 8x_2 - 5x_1 = \frac{8a}{y_2} - \frac{5a}{y_1} = a \left(\frac{8}{y_2} - \frac{5}{y_1} \right) = a \left(\frac{8y_1 - 5y_2}{y_1 \cdot y_2} \right)$$

$$\text{Thay } y_1 = 3,5; y_2 = 2,5 \text{ và } 8x_2 - 5x_1 = 31 \text{ vào ta có: } 31 = a \left(\frac{28 - 12,5}{3,5 \cdot 2,5} \right)$$

$$\text{Hay } 31 = a \cdot \frac{15,5}{8,75} \Rightarrow a = \frac{31 \cdot 8,75}{15,5} = 17,5$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{17,5}{3,5} = 5; x_2 = \frac{17,5}{2,5} = 7.$$

Ví dụ 3: Năm máy cày cùng loại, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong 12 ngày cày xong một cánh đồng.

a) Nếu có 10 máy cày cùng loại trên, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong mấy ngày cày xong cánh đồng trên.

b) Cần bao nhiêu máy cày, mỗi máy làm 6 giờ mỗi ngày để 5 ngày cày xong cánh đồng ấy ?

✓ *Tìm cách giải:*

a) Cùng một công việc và số giờ làm việc mỗi ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch; hoặc cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

b) Cùng một khối lượng công việc (cày xong cánh đồng) số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta cần tìm số giờ làm của số máy cày trong mỗi trường hợp.

Giải

a) Gọi số ngày cần tìm là z ngày ($z > 0$). Cùng một công việc và số giờ làm việc một ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

$$\text{Ta có: } \frac{5}{10} = \frac{z}{12} \Rightarrow z = 5 \cdot 12 : 10 = 6 \text{ (ngày)}.$$

* Có thể lý luận cách khác :

Một ngày 5 máy cày với tổng số giờ là $5 \cdot 8 = 40$ (giờ)

Một ngày 10 máy cày với tổng số giờ là $10 \cdot 8 = 80$ (giờ)

Cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Do đó $\frac{40}{80} = \frac{z}{12} \Rightarrow z = 40.12 : 80 = 6$ (ngày).

b) Gọi số máy cày cần tìm là t (cái).

Số giờ năm máy cày xong cánh đồng là $8.12 = 96$ (giờ).

Số giờ x máy cày xong cánh đồng là $6.5 = 30$ (giờ).

Trên cùng một cánh đồng số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có :

$$\frac{96}{30} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 96.5 : 30 = 16.$$

Vậy số máy cày cần tìm là 16 cái.

Ví dụ 4: Ba cạnh a, b, c của $\triangle ABC$ có $4a + 6b - 5c = 220cm$. Ba đường cao tương ứng là $h_a; h_b; h_c$ tỉ lệ thuận với 3; 4; 5. Tính chu vi của tam giác.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng diện tích 1 tam giác thì độ dài cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

Gọi diện tích của $\triangle ABC$ là S . Ta biết rằng $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ nên trong một tam giác cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau.

$$\text{Biết } h_a : h_b : h_c = 3 : 4 : 5 \text{ nên } a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12.$$

$$\text{Tức là } \frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{4a}{80} = \frac{6b}{90} = \frac{5c}{60} = \frac{4a + 6b - 5c}{80 + 90 - 60} = \frac{220}{110} = 2.$$

Vậy chu vi tam giác là $20.2 + 15.2 + 12.2 = 94(cm)$.

Ví dụ 5: Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 40km/h thì đến B muộn hơn so với dự định là 30 phút. Nếu xe chạy với vận tốc 60km/h thì đến B sớm hơn so với dự định là 45 phút. Tính thời gian dự định đi và quãng đường AB.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài quãng đường và thời gian dự định.

Giải

Ta có 45 phút = 0,75 giờ; 30 phút = 0,5 giờ.

Gọi thời gian dự định là t (giờ); ($t > 0$) ; Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 40km/h là $t_1 = (t + 0,5)$ (giờ). Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 60km/h là $t_2 = (t - 0,75)$. Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Do đó theo tính chất của tương quan tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{40}{60} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{t_1}{60} = \frac{t_2}{40} = \frac{t_1 - t_2}{60 - 40} = \frac{t + 0,5 - t + 0,75}{20} = \frac{1,25}{20} = \frac{1}{16}.$$

$$\frac{t_1}{60} = \frac{1}{16} \Rightarrow t_1 = 3,75 \text{ (giờ)}.$$

Thời gian dự định là: $3,75 - 0,5 = 3,25$ (giờ) = 3 giờ 15 phút.

Quãng đường AB dài là: $3,75 \cdot 40 = 150$ (km).

Ví dụ 6: Bốn người mua cùng một số mét vuông vải để may quần áo lần lượt theo bốn loại khổ rộng 1,5m; 1,2m; 1,0m; 0,8m. Tổng số vải bốn người đã mua là 22,5m. Tính số mét vải và diện tích vải mỗi người đã mua.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một diện tích, số mét vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Từ định nghĩa và sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải:

Giải

Cùng một diện tích, số m vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Gọi số mét vải mỗi người mua lần lượt là x, y, z, t ($x, y, z, t > 0$) ta có:

$$1,5x = 1,2 = z = 0,8t \text{ hay } 15x = 12y = 10z = 8t$$

$$\Rightarrow \frac{15x}{120} = \frac{12y}{120} = \frac{10z}{120} = \frac{8t}{120} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{12} = \frac{t}{15} = \frac{x+y+z+t}{8+10+12+15} = \frac{22,5}{45} = 0,5$$

$$\text{Vậy: } x = 8 \cdot 0,5 = 4(m); y = 10 \cdot 0,5 = 5(m);$$

$$z = 12 \cdot 0,5 = 6(m); t = 15 \cdot 0,5 = 7,5(m).$$

Diện tích vải mỗi người mua là: $4 \cdot 1,5 = 6m^2$.

Ví dụ 7*: Tại một bến xe có 610 xe ô tô chở khách gồm 4 loại: Xe chở 50 khách; xe chở 45 khách; xe chở 30 khách và xe chở 25 khách. Biết rằng $\frac{2}{3}$ số xe chở khách 50 khách bằng $\frac{3}{4}$ xe chở 45 khách, bằng $\frac{4}{5}$ số xe chở 30 khách và bằng $\frac{5}{6}$ xe chở 25 khách. Hỏi bến xe có bao nhiêu xe mỗi loại

✓ *Tìm cách giải:* Đây là bài toán chia số 610 thành bốn phần tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$ tức là tỉ lệ

thuận với $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}$.

Giải

Gọi số xe các loại chở 50 khách; chở 45 khách; chở 30 khách và chở 25 khách lần lượt là $x; y; z; t$ ($x; y; z; t \in N$) ta có:

$$x + y + z + t = 610 \text{ và } \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} = \frac{5t}{6}$$

$$\Rightarrow x : y : z : t = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} : \frac{5}{4} : \frac{6}{5} = 90 : 80 : 75 : 60.$$

$$\text{Hay } \frac{x}{90} = \frac{y}{80} = \frac{z}{75} = \frac{t}{60} = \frac{x+y+z+t}{90+80+75+60} = \frac{610}{305} = 2.$$

Suy ra $x = 180; y = 160; z = 150; t = 120$.

Ví dụ 8: Một bộ máy truyền chuyển động có ba bánh xe răng được khớp vào nhau: bánh xe thứ nhất khớp với bánh xe thứ hai; bánh xe thứ hai khớp với bánh xe thứ ba.

a) Nếu bánh xe thứ nhất có 90 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 72 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút?

b) Muốn bánh xe thứ ba quay 180 vòng/phút thì bánh xe thứ ba cần thiết kế có bao nhiêu răng?

✓ *Tìm cách giải:* Do hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Giải

Ta có hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Vì thế:

$$\text{a) Gọi số vòng quay của bánh xe thứ hai là } x (x > 0) \text{ thì } \frac{90}{72} = \frac{x}{36}$$

Suy ra $x = 90.36 : 72 = 45$ (vòng).

$$\text{b) Gọi số răng của bánh xe thứ ba là } y (y \in \mathbb{N}) \text{ thì } \frac{45}{180} = \frac{y}{72}$$

Suy ra $y = 45.72 : 180 = 18$ (răng).

Ví dụ 9: Để làm xong một công việc 48 công nhân cần làm trong 30 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Nếu số công nhân tăng thêm 25% và năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 20% thì cần làm bao lâu để xong công việc đó?

✓ *Tìm cách giải:* Thực chất bài toán trên được chia thành hai bài toán nhỏ:

Bài toán 1: Trước hết giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Ta tìm được số ngày làm của số công nhân mới theo năng suất cũ.

Bài toán 2: Giữ nguyên số công nhân mới. Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Ta tìm được số ngày cần tìm.

Giải

Số công nhân sau khi tăng có $48 + 48.25\% = 48 + 12 = 60$ (người)

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 60 công nhân theo năng suất cũ là x ta có:

$$\frac{60}{48} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 48.30 : 60 = 24 \text{ (ngày)}.$$

Năng suất lao động mới là: $100\% + 20\% = 120\%$.

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày 60 công nhân làm theo năng suất mới là y thì ta có $\frac{100\%}{120\%} = \frac{y}{24} \Rightarrow y = 100.24 : 120 = 20 \text{ (ngày)}.$

C. Bài tập vận dụng

1. Cho biết hai đại lượng x và y tỷ lệ nghịch với nhau. Tìm công thức liên hệ giữa y và x . Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau;

X	-40		-8	-0,5		16		6,4
Y		4		-160	20		-3,2	

2. Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch z và t ; z_1 và z_2 là hai giá trị của z , t_1 và t_2 là hai giá trị tương ứng của t .

Biết $z_2 = 8$; $2z_1 - 3t_2 = 10$ và $t_1 = 4$. Tính z_1, t_2 .

3. Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25.

4. Một số dương M được chia làm bốn phần đều là các số dương tỷ lệ nghịch với 2; 3; 4; 5. Biết hiệu giữa tổng các bình phương của phần thứ nhất và phần thứ hai với tổng các bình phương của phần thứ ba và thứ tư là 3724. Tìm số M .

5.

a) Tìm ba số a, b, c tỷ lệ nghịch với 2; 3; 5. Biết $a^3 - 2b^3 - 3c^3 = -5816$;

b) Cho ba số a, b, c tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{2017}$; $\frac{1}{2018}$; $\frac{1}{2019}$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{2020(a-b)(b-c)}{(c-a)^2}$.

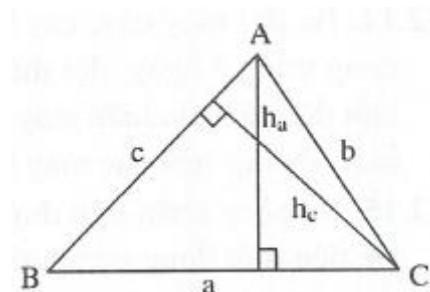
6.

Một tam giác ABC có chu vi 105cm. Các đường cao trong tam giác ABC ứng với cạnh là $BC = a$ là $h_a = 28\text{cm}$ ứng với cạnh $AB = c$ là

$h_c = 32\text{cm}$. Biết $\frac{a+c}{b} = \frac{5}{2}$ với $AC = b$.

Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác nói trên.

7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành một lúc từ A đến B. Vận tốc của ô tô là 60km/h. Vận tốc của xe máy là 45km/h. Ô tô đến B trước xe máy là 30 phút. Tính quãng đường AB.



8. Một ô tô chạy trên đoạn đường AB gồm bốn chặng đường dài bằng nhau với tốc độ lần lượt là 50km/h; 40km/h; 60km/h và 30km/h. Biết tổng thời gian đi cả bốn chặng là 19 giờ. Tính quãng đường AB.

9. Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B. Biết tỷ số vận tốc ô tô thứ hai và ô tô thứ nhất là 3: 5. Ô tô thứ nhất đến B sớm hơn 1 giờ 30 phút so với ô tô thứ hai. Tính thời gian mỗi xe đi từ A đến B.

10. Trên đoạn đường AB lúc 7 giờ sáng một xe tải đi từ A với vận tốc 45km/h đến B lúc 11 giờ. Cùng lúc 7 giờ một ô tô khởi hành từ A đi đến B và một xe máy khởi hành từ B đi đến A. Ô tô và xe máy gặp nhau tại C trên AB. Tính độ dài đoạn AC. Biết rằng thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5.

11. Một động tử (vật chuyển động) chạy trên 3 cạnh của một tam giác đều (có ba cạnh bằng nhau) với vận tốc lần lượt là 6m/s; 5m/s; 4m/s. Tính chu vi tam giác biết tổng số thời gian động tử chuyển động trên ba cạnh là 111 giây.

12. Để làm xong một công việc 42 công nhân dự định làm trong 14 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Khi tiến hành công việc $\frac{1}{3}$ số công nhân được điều đi làm việc khác. Số công nhân còn lại năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 50%. Hỏi đội công nhân có hoàn thành đúng thời gian dự định?

13. Ba đội công nhân đào ba con mương như nhau với năng suất lao động mỗi người như nhau. Đội I hoàn thành trong 5 ngày; đội II hoàn thành trong 6 ngày; đội III hoàn thành trong 8 ngày. Số người của đội I nhiều hơn số người của đội III là 18 người. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu người?

14. Ba đội máy cày, cày ba cánh đồng cùng diện tích. Đội thứ nhất cày xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày, đội thứ ba trong 6 ngày; Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy, biết rằng đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba 1 máy. (Năng suất các máy như nhau).

15. Ba công nhân tiện được tất cả 860 dụng cụ trong cùng một thời gian. Để tiện một dụng cụ người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số dụng cụ mỗi người tiện được?

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2009 – 2010)

16. Ba đội máy san đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày. Hỏi đội thứ ba hoàn thành trong mấy ngày, biết rằng tổng số máy của đội một và đội hai gấp 10 lần số máy đội ba (giả thiết năng suất của các máy như nhau)?

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

17.

a) Tìm ba số a, b, c biết rằng $\frac{a}{12} = \frac{b}{9} = \frac{c}{5}$ và $abc = 20$;

b) Tìm ba số có tổng 420, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

18. Tìm x, y, z biết rằng x và y tỉ lệ nghịch với 3 và 2; y và z tỉ lệ nghịch với 4 và 5 và $3x^2 - y^2 + z^2 = 1971$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. Công thức $x.y = 80$ hay $y = \frac{80}{x}$

x	-40	20	-8	-0,5	4	16	-25	6,4
y	-2	4	-10	-160	20	5	-3,2	12,5

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{2z_1}{2z_2} = \frac{3t_2}{3t_1} = \frac{2z_1 - 3t_2}{2z_2 - 3t_1} \Rightarrow \frac{z_1}{8} = \frac{10}{16 - 12} \Rightarrow z_1 = \frac{10 \cdot 8}{4} = 20.$$

$$\text{Và từ } \frac{z_1}{z_2} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow t_2 = \frac{z_1 t_1}{z_2} = \frac{20 \cdot 4}{8} = 10.$$

3. Gọi hai số phải tìm là $x; y (x > 0; y > 0)$. Tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25

nghĩa là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{50}; \frac{1}{125}; \frac{1}{25}$.

$$(x + y) : (x - y) : xy = \frac{1}{50} : \frac{1}{125} : \frac{1}{25} = 5 : 2 : 10. \text{ Hay } \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{10}$$

$$\text{Từ } \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{x + y + x - y}{5 + 2} = \frac{2x}{7}$$

$$\text{Và } \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{2} = \frac{x + y - x + y}{5 - 2} = \frac{2y}{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{2xy}{20} = \frac{2x}{7} = \frac{2y}{3} = \frac{2xy}{7y} = \frac{2xy}{3x}.$$

$$\text{Suy ra } 7y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{7} \text{ và } 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}.$$

4. Gọi bốn phần của M là $x; y; z; t (x; y; z; t > 0)$

$$\text{Ta có: } x : y : z : t = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 30 : 20 : 15 : 12$$

$$\text{Hay } \frac{x}{30} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{t}{12} = k$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{x^2}{900} = \frac{y^2}{400} = \frac{z^2}{225} = \frac{t^2}{144} = \frac{x^2 + y^2 - z^2 - t^2}{900 + 400 - 225 - 144} = \frac{3724}{931} = 4 = (\pm 2)^2$$

Do các phân đều dương nên $k = 2$

$$\Rightarrow x = 60; y = 40; z = 30; t = 24 \text{ và } M = 154.$$

5.

$$a) a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 15 : 10 : 6.$$

$$\text{Hay } \frac{a}{15} = \frac{b}{10} = \frac{c}{6} = k$$

$$\Rightarrow k^3 = \frac{a^3}{3375} = \frac{2b^3}{2000} = \frac{3c^3}{648} = \frac{a^3 - 2b^3 - 3c^3}{3375 - 2000 - 648} = \frac{-5816}{727} = -8 = (-2)^3$$

$$\text{Vậy } k = -2 \Rightarrow a = -30; b = -20; c = -12.$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{a}{2017} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2019} = k$$

$$\Rightarrow a = 2017k; b = 2018k; c = 2019k.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2020(2017k - 2018k)(2018k - 2019k)}{(2019k - 2017k)^2} = \frac{2020(-k)(-k)}{(2k)^2} = 505.$$

$$6. \text{ Do đó } \frac{a+c}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a+c+b}{b} = \frac{5+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{105}{b} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = \frac{105 \times 2}{7} = 30(\text{cm})$$

$$\text{và } a + c = 105 - 30 = 75\text{cm}.$$

Cùng một diện tích, thì cạnh đáy tỉ lệ nghịch với chiều cao tương ứng

$$\text{Do đó ta có: } \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{a}{32} = \frac{c}{28} = \frac{a+c}{32+28} = \frac{75}{60} = \frac{5}{4}.$$

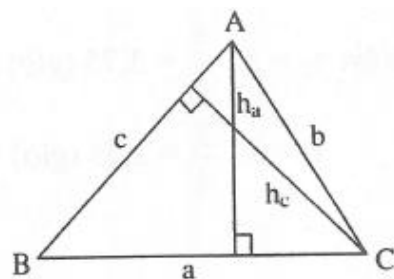
$$\text{Vậy } BC = a = 32 \cdot \frac{5}{4} = 40(\text{cm}); AB = c = 28 \cdot \frac{5}{4} = 35(\text{cm}).$$

7. Ta có 30 phút = 0,5 giờ. Cùng một quãng đường AB thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Gọi t_1 là thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB, t_2 là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB,

$$\text{Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có: } \frac{60}{45} = \frac{t_2}{t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{60} = \frac{t_1}{45} = \frac{t_2 - t_1}{60 - 45} = \frac{0,5}{15} = \frac{1}{30}. \text{ Ta có: } \frac{t_2}{60} = \frac{1}{30} \Rightarrow t_2 = 2 \text{ (giờ).}$$

Quãng đường AB dài là: $2.45 = 90(\text{km})$.



8. Với quãng đường như nhau thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian. Gọi thời gian đi trên bốn đoạn đường lần lượt là $x; y; z; t$ (giờ) ($x; y; z; t > 0$).

$$\text{Ta có: } 50x = 40y = 60z = 30t = s \Rightarrow \frac{50x}{600} = \frac{40y}{600} = \frac{60z}{600} = \frac{30t}{600}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{t}{20} = \frac{x+y+z+t}{57} = \frac{19}{57} = \frac{1}{3}.$$

$$x = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ (giờ)}. \text{ Mỗi chặng dài } 4.50 = 200 \text{ (km)}.$$

Quãng đường AB dài $4.200 = 800 \text{ (km)}$.

9. Gọi v_1 là vận tốc ô tô thứ nhất, v_2 là vận tốc ô tô thứ hai ($v_1; v_2 > 0$) ta có $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5}$. Cùng quãng

đường thì vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi t_1 là thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB; t_2 là thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB ($t_1; t_2 > 0$) ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{t_2}{5} = \frac{t_1}{3} = \frac{t_2 - t_1}{5 - 3} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy: } t_2 = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3,75 \text{ (giờ)} = 3 \text{ giờ } 45 \text{ phút;}$$

$$t_1 = 3 \cdot \frac{3}{4} = 2,25 \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 15 \text{ phút.}$$

10. Quãng đường AB dài: $45 \cdot (11 - 7) = 180 \text{ km}$. Gọi $s_1 = AC, s_2 = BC$; và $v_1 \text{ km/h}$ là vận tốc của xe ô tô; $v_2 \text{ km/h}$ là vận tốc của xe máy ($s_1; s_2; v_1; v_2 > 0$).

Cùng một quãng đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5 nên $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{3}$. Từ lúc

khởi hành đến lúc gặp nhau hai xe đi trong cùng một thời gian nên quãng đường đi được và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

$$\text{Do đó } \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{3}. \text{ Từ } \frac{s_1}{s_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{3} = \frac{s_1 + s_2}{5 + 3} = \frac{140}{8} = 22,5$$

$$\Rightarrow s_1 = 5 \cdot 22,5 = 112,5 \text{ (km)}.$$

11. Ba cạnh tam giác bằng nhau. Cùng đoạn đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi thời gian động tử trên 3 cạnh lần lượt là $t_1; t_2; t_3$ (giây); ($t_1; t_2; t_3 > 0$).

$$\text{Ta có: } t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{5} : \frac{1}{4} = 10 : 12 : 15$$

$$\text{Hay } \frac{t_1}{10} = \frac{t_2}{12} = \frac{t_3}{15} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{10 + 12 + 15} = \frac{111}{37} = 3.$$

Ta có $t_1 = 30$ giây và cạnh tam giác dài là $30.6 = 180(m)$.

Chu vi tam giác là: $180.3 = 540(m)$.

12. Số người còn lại làm công việc là $42 - 42 : 3 = 28$ (công nhân). Năng suất lao động mới là: $100\% + 50\% = 150\%$

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 28 công nhân theo năng suất cũ là x ($x > 0$) ta có:

$$\frac{28}{42} = \frac{14}{x} \Rightarrow x = 42.14 : 28 = 21 \text{ (ngày)}$$

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày 28 công nhân làm theo năng suất mới là y ($y > 0$)

$$\text{Thì ta có: } \frac{100\%}{150\%} = \frac{y}{21} \Rightarrow y = 100.21 : 150 = 14 \text{ (ngày)}.$$

Đáp số: Đúng dự định 14 ngày.

13. Cùng khối lượng công việc (ba con mương như nhau), năng suất lao động mỗi người như nhau thì số người làm và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x, y, z là số công nhân của mỗi đội ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Ta có: $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = 24 : 20 : 15$

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{x - y}{24 - 15} = \frac{18}{9} = 2.$$

Vậy $x = 48$ (người); $y = 40$ (người); $z = 30$ (người).

14. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là x, y, z ; ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Vì cùng diện tích cày, số máy và số ngày cày xong cánh đồng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 10 : 6 : 5$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{y - z}{6 - 5} = 1$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ (máy); } y = 6 \text{ (máy); } z = 5 \text{ (máy)}.$$

15. Gọi số dụng cụ của ba công nhân tiện được theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Vì cùng thời gian số dụng cụ tiện được của mỗi người và thời gian tiện xong một dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$x:y:z = \frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{9} = 18:15:10$$

$$\Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{18+15+10} = \frac{860}{43} = 20$$

$$\Rightarrow x = 360 \text{ (dụng cụ); } y = 300 \text{ (dụng cụ); } z = 200 \text{ (dụng cụ).}$$

16. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là x, y, z và t là số ngày đội thứ ba cần dùng để hoàn thành công việc ($x, y, z \in \mathbb{N}^*; t > 0$).

Vì cùng công việc số máy và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$x:y:z = \frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{t}} = \frac{x+y}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{10z}{\frac{5}{12}} = 24z$$

$$\Rightarrow zt = 24z \Rightarrow t = 24 \text{ (ngày).}$$

17.

a) Đặt $\frac{a}{12} = \frac{b}{9} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow k^3 = \frac{a.b.c}{12.9.5} = \frac{20}{540} = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$.

Từ đó tìm được $a = 4; b = 3; c = \frac{5}{3}$.

b) Gọi x, y, z là ba số cần tìm thì $x + y + z = 420$.

Ta có $\frac{6}{7}x = \frac{9}{11}y = \frac{2}{3}z = \frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{y}{\frac{11}{9}} = \frac{z}{\frac{3}{2}} = \frac{x+y+z}{\frac{7}{6}+\frac{11}{9}+\frac{3}{2}} = 108$

$$\Rightarrow x = 126; y = 132; z = 162.$$

18. Ta có: $3x = 2y$ và $4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = k$

$$\Rightarrow x = 10k; y = 15k; z = 12k. \text{ Thay vào } 3x^2 - y^2 + z^2 = 1971$$

$$\Rightarrow 300k^2 - 225k^2 + 144k^2 = 1971 \Rightarrow k^2 = 9 \text{ vậy } k = \pm 3.$$

+ Với $k = 3 \Rightarrow x = 30; y = 45; z = 36$.

+ Với $k = -3 \Rightarrow x = -30; y = -45; z = -36$.

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Bài 1: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27m$. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24m$. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải:

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng.

Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12m \\ r_B = 15m = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài.

Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(m) = d_A$$

$$\text{Do đó: } S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(m^2)$$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315(m^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360(m^2)$$

Bài 2: Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải:

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5; 4; 6

$$\text{Do đó ta có: } x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{35} = 15$$

$$\Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150

Bài 3: Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A_1$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7A_2$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7A_3$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K .

Lời giải:

Gọi tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3 \Rightarrow a = 54, b = 48, c = 45$$

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54; 48; 45

Bài 4: Ba đội cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải:

Gọi số người tham gia làm việc của đội 1, đội 2, đội 3 lần lượt là x, y, z (giờ)

ĐK: $x, y, z > 0$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỉ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \frac{y-z}{1-1} = \frac{5}{1-1} = 60 \Rightarrow y = 20, z = 15, x = 30$$

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Bài 5: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5;6;7, nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4,5,6 nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.

Lời giải:

Gọi tổng số gói tẩy 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu là a, b, c

Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Số gói tẩy sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15}$$
 (2)

$$a > a'; b = b'; c < c'$$

So sánh (1) và (2) ta có nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu, Vậy $c - c' = 4$ hay

$$\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tẩy 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 6: Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải:

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5;4;6

Do đó ta có: $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{35} = 15$$

$$\Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150

Bài 7: Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó

Lời giải:

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là

$d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12\text{cm}, r_2 = 15\text{cm}$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(\text{cm})$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315\text{cm}^2$

Diện tích hình thứ nhất: $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252\text{cm}^2$

Diện tích hình thứ ba: $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360\text{cm}^2$

Bài 8: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tẩy 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tẩy sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc ban đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tẩy 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 9: Bốn con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 1 ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (Ngựa, Dê và Cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày ?

Lời giải

Vì bốn con ngựa cùng ăn hết xe cỏ trong 1 ngày, do đó một con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 4 ngày
 Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày. Hai con cừu ăn hết hai xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 12 ngày.

Trong một ngày:

Một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ (xe cỏ), một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ (xe cỏ), một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết 1 xe cỏ trong 2 ngày nên ăn hết 2 xe cỏ trong 4 ngày.

Bài 10: Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên 4 cạnh là 59 giây

Lời giải

Cùng một đoạn đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

Gọi x, y, z là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc 5m/s, 4m/s, 3m/s

Ta có: $5x = 4y = 3z$ và $x + x + y + z = 59$

Hay $\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = \frac{x + x + y + z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{59}{\frac{47}{60}} = 60$

Do đó: $x = 60 \cdot \frac{1}{5} = 12$; $x = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$; $x = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$

Vậy cạnh hình vuông là $5 \cdot 12 = 60\text{m}$

Bài 11: Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$a = 32,5\%(a + b + c)$

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây.

Bài 12: Hiện nay hai kim đồng hồ chỉ 10 giờ. Sau ít nhất bao lâu thì 2 kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi x, y là số vòng quay của kim phút và kim giờ khi 10 giờ đến lúc 2 kim đối nhau trên một đường thẳng, ta có:

$$x - y = \frac{1}{3} \text{ (ứng với từ số 12 đến số 4 trên đồng hồ)}$$

Và $x : y = 12$ (do kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ)

$$\text{Do đó } \frac{x}{y} = \frac{12}{1} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{1} = \frac{x-y}{11} = \frac{1}{3} : 11 = \frac{1}{33} \Rightarrow x = \frac{12}{33} \text{ (vòng)} \Rightarrow x = \frac{4}{11} \text{ (giờ)}$$

Vậy thời gian ít nhất để 2 kim đồng hồ từ lúc khi 10 giờ đến lúc nằm đối diện nhau trên một đường thẳng là $\frac{4}{11}$ giờ

Bài 13: Ba đội san đất làm ba khối công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành công việc trong 6 ngày và đội thứ ba hoàn thành công việc trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (có cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ hai 2 máy.

Lời giải

Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là a, b, c (các máy có cùng năng suất)

Vì số máy và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, do đó ta có:

$$4a = 6b = 8c \text{ hay } \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{8}}, \text{ theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{8}} = \frac{a-b}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy số máy của ba đội theo thứ tự là 6; 4; 3 máy

Bài 14: Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 13$

$$\text{Và } 2x = 3y = 4z = 2S_{ABC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1 \Rightarrow x = 6, y = 4, z = 3$$

Bài 15: Trên bảng có ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2008, người ta làm như sau: lấy ra hai số bất kỳ và thay vào bằng hiệu của chúng, cứ làm như vậy đến khi còn một số trên bảng thì dừng lại. Hỏi có thể làm để trên bảng chỉ còn lại số 1 được không? Giải thích?

Lời giải

Gọi S là tổng tất cả các số được ghi trên bảng

Ta có $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2008 = \frac{2008 \cdot 2009}{2} = 1004 \cdot 2009$ là một số chẵn. Khi lấy ra hai số a, b và thay

vào bằng hiệu của hai số thì tổng S bớt đi $(a+b) - (a-b) = 2b$ là số chẵn.

Nên tổng mới phải là một số chẵn

Vậy trên bảng không thể còn lại số 1

Bài 16: Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng

24309. Tìm số A.

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

Theo đề bài ta có: $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z$ cùng dấu

$$\text{Và } \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$$

$$\text{Học sinh tính tương tự: } y = \pm 135; z = \pm 30$$

$$\text{Vậy } A = 237 \text{ hoặc } A = -237$$

Bài 17: Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

Theo bài ra ta có: $a + b + c = 5\frac{25}{63}$

$$a:b:c = \frac{1}{1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{7} = \frac{1}{20} = \frac{1}{12} = \frac{1}{35} = 21:35:12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Bài 18: Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3,4,5, các mẫu của chúng tỉ lệ với

5;1;2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Các phân số cần tìm là a, b, c ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$ và $a:b:c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6:40:25$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}, b = \frac{12}{7}, c = \frac{15}{14}$$

Bài 19: Có 16 tờ giấy bạc loại 20000đ, 50 000đ, 100 000đ. Trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi mỗi loại có mấy tờ?

Lời giải

Gọi số tờ giấy bạc 20 000đ, 50 000đ, 100 000đ theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 16$ và $20000x = 50000y = 100000z$

$$\Rightarrow \frac{20000x}{100000} = \frac{50000y}{100000} = \frac{100000z}{100000} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\Rightarrow x = 10; y = 4; z = 2$$

Vậy số tờ giấy bạc loại 20 000đ, 50 000đ, 100 000đ theo thứ tự là 10;4;2

Bài 20: Tìm số đo các góc của ΔABC , biết rằng số đo các góc này tỉ lệ với 2,3,4

Lời giải

Trong ΔABC ta có: $A + B + C = 180^\circ$

Theo giả thiết ta có: $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A+B+C}{2+3+4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} = 20^\circ \Rightarrow A = 40^\circ \\ \frac{B}{3} = 20^\circ \Rightarrow B = 60^\circ \\ \frac{C}{4} = 20^\circ \Rightarrow C = 80^\circ \end{cases}$$

Vậy $A = 40^\circ, B = 60^\circ, C = 80^\circ$

Bài 21: Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A và B, cách nhau $11km$ để đi đến C (ba địa điểm A, B, C ở cùng trên một đường thẳng). Vận tốc của người đi từ A là $20km/h$. Vận tốc của người đi từ B là $24km/h$. Tính quãng đường mỗi người đã đi. Biết họ đến C cùng một lúc

Lời giải

Gọi quãng đường đi được của 2 người lần lượt là a, b

+TH1: C nằm giữa hai điểm A và B

$$\text{Lập luận được: } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{a+b}{20+24} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 5; b = 6$$

+TH2: C không nằm giữa hai điểm A và B

Lập luận được B không nằm giữa A và C

$$\frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{b-a}{24-20} = \frac{11}{4} \Rightarrow a = 55; b = 66$$

Bài 22: Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số $1; 0$ hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5 . Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; \dots; 0; 1; \dots; 5$

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau (đpcm)

Bài 23: Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 114 học sinh. Biết số học sinh lớp 7A bằng $\frac{5}{6}$ số học sinh lớp 7B, số học sinh lớp 7B bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh lớp 7C. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c

Theo đề bài ta có: $a = \frac{5}{6}b, b = \frac{3}{4}c$ và $a + b + c = 114$

$$a = \frac{5}{6}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6}$$

$$b = \frac{3}{4}c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+6+8} = \frac{114}{19} = 6$

Do đó $a = 5.6 = 30; b = 6.6 = 36; c = 8.6 = 48$

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 30, 36, 48 học sinh

Bài 24: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà 3 lớp đã mua

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là $x (x \in \mathbb{N}^*)$

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói

Bài 25: Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1,2,3?

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có 3 chữ số cần tìm

Vì mỗi chữ số không vượt quá 9 và không thể đồng thời bằng 0 nên $1 \leq a + b + c \leq 27$. Mặt khác, số

$$\text{đó là bội của 18 nên } \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 18 \\ a + b + c = 27 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$, do đó: $(a+b+c):6$

$$\text{Nên } a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là chữ số chẵn

Vậy các số phải tìm là 396; 936

Bài 26: Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường xấu tốt khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng lần lượt bằng 40; 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB?

Lời giải

Gọi vận tốc và thời gian xe tải đi trên ba chặng đường lần lượt là $v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3$. Khi đó:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 5$$

Vì ba chặng đường dài bằng nhau, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỷ lệ nghịch, do đó:

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : \frac{1}{v_3} = \frac{1}{40} : \frac{1}{24} : \frac{1}{60} = 3 : 5 : 2$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: } \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{Suy ra: } t_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5(\text{h});$$

$$\text{Quãng đường AB là: } 3 \cdot (40 \cdot 1,5) = 180(\text{km})$$

Bài 27: Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5 cm/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4 cm/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3 cm/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Lời giải

Giả sử thời gian chuyển động trên cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lần lượt là x, y, z (giây)

$\Rightarrow$ thời gian chuyển động trên cạnh thứ hai là x (giây).

Quãng đường mà vật chuyển động trên các cạnh thứ nhất, thứ ba, thứ tư lần lượt là $5x$, $4y$, $3z$. Mà độ dài các cạnh của hình vuông bằng nhau nên ta có : $5x = 4y = 3z$ (1)

Tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây nên có : $x + x + y + z = 59$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5}, \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

$$\text{Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : } \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{2x+y+z}{24+15+20} = \frac{59}{59} = 1$$

$$\Rightarrow x=12, y=15, z=20$$

KL : Độ dài cạnh hình vuông là : $5.12 = 60(\text{cm})$

Bài 28: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27m$. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24m$. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng.

Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12m \\ r_B = 15m = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài.

Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7.24}{8} = 21(m) = d_A$$

$$\text{Do đó: } S_A = d_A.r_A = 21.12 = 252(m^2)$$

$$S_B = d_B.r_B = 21.15 = 315(m^2)$$

$$S_C = d_C.r_C = 24.15 = 360(m^2)$$

Bài 29: Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5;4;6

$$\text{Do đó ta có: } x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{35} = 15$$

$$\Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150

Bài 30: Ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích. Chiều rộng của 3 thửa ruộng

A, B, C lần lượt tỉ lệ với 3;4;5. Chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét. Tính chiều dài mỗi thửa ruộng.

Lời giải

Gọi chiều dài của 3 thửa ruộng là A, B, C lần lượt là $x, y, t (m) (x, y, t > 0)$

$$\text{Và } y + t - x = 35$$

Gọi chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt là $a, b, c (m) (a, b, c > 0)$

Ta có: $ax = by = ct (1)$ (do diện tích bằng nhau) và $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$

Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 3k; b = 5k; c = 4k$, thay vào (1) ta được

$$2kx = 5ky = 4kt \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{12} = \frac{t}{15} = \frac{y+t-x}{12+15-20} = \frac{35}{7} = 5$$

Từ đó tính được: $x = 100; y = 60; t = 75$

Bài 31: Ba đội cùng chuyển một khối gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải

Gọi số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là x, y, z (giờ), ĐK:

$$x, y, z > 0$$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỉ lệ nghịch

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\frac{y}{1} = \frac{z}{1} = \frac{y-z}{1-1} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow y = 20, z = 15, x = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện bài toán)}$$

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Bài 32: Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng

24309. Tìm số A .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$$

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z \text{ cùng dấu}$$

$$\text{Và } \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$$

$$\text{tính tương tự: } y = \pm 135; z = \pm 30$$

$$\text{Vậy } A = 237 \text{ hoặc } A = -237$$

Bài 33: Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15; 60 và 8

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a > b > 0)$, theo đầu bài ta có:

$$15(a+b) = 60(a-b) = 8ab \text{ hay } \frac{a+b}{8} = \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15} = k \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

Bài 34: Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

$$\text{a) } x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6 > 0 (\forall x)$$

Do đó $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Bài 35: Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1, 2, 3?

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có 3 chữ số cần tìm

Vì mỗi chữ số không vượt quá 9 và không thể đồng thời bằng 0 nên $1 \leq a + b + c \leq 27$. Mặt khác, số

$$\text{đó là bội của } 18 \text{ nên } \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 18 \\ a + b + c = 27 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$, do đó: $(a+b+c):6$

$$\text{Nên } a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là chữ số chẵn

Vậy các số phải tìm là 396; 936

Bài 36: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số tăm của ba lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Leftrightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói

Bài 37: Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$$a = 32,5\% a + b + c$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1,5} = \frac{c}{1,2} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$

$$\frac{a}{325} = \frac{a + b + c}{100}$$

.....

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây

Bài 38 : Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có : $x + y + z = 13$

$$\text{và } 2x = 3y = 4z = 2S_{ABC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + y + z}{6 + 4 + 3} = \frac{13}{13} = 1$$

$$\text{suy ra } x = 6; y = 4; z = 3$$

Vậy 3 cạnh của tam giác có độ dài là 6cm; 4cm; 3 cm

Câu 40. Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là

$d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\text{Suy ra chiều rộng } r_1 = 12\text{cm}, r_2 = 15\text{cm}$$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(cm)$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315 cm^2$

Diện tích hình thứ nhất : $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 cm^2$

Diện tích hình thứ ba : $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 cm^2$

Câu 41. Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ với 35;210;12

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35,210,12

Ta có: $(x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 = 12 \cdot xy$

$$\text{Từ } (x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5} \text{ thay vào đẳng thức } (x+y) \cdot 35 = 12xy \text{ ta được}$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0;5\} \text{ mà } y > 0 \Rightarrow y = 5$$

Với $y = 5$ thì $x = 7$

Câu 42. Số A được chia thành 3 số theo tỉ lệ $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó

bằng 24309. Tìm số A .

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A .

Theo đề bài ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$$

$$(2) \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$$

Do đó $\Rightarrow k = 180$; $k = -180$

$$+) k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$+) k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = a + b + c = -237$$

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$, khi đó: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(b+a)} = \frac{a}{b}$

Câu 43. Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3;4;5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5;1;2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi các phân số phải tìm là : a, b, c , ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$

$$\text{Và } a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25 \Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

Câu 44. Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên

$$a + b + c = 74$$

$$\text{Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$$

$$\text{Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên } \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$$

$$\text{Suy ra } a = 20; b = 24; c = 30$$

Câu 45. Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là $x (x \in \mathbb{N}^*)$

Số gói tằm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tằm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360(tm)$$

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 46: Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7;6;5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6;5;4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3)$, DK: $x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$, DK: $a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. DK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 47. Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương

của ba số đó là 4660

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0,5 : 1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 10 : 27$$

Giả sử M được chia ra thành 3 số x, y, z . Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Bài 47: Ba đội máy ủi đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành trong 6 ngày, đội thứ ba hoàn thành trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (cùng công suất), biết rằng đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ hai 2 máy.

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là số máy ủi của đội thứ nhất, thứ hai, thứ ba

Do các máy có cùng công suất, khối lượng công việc của ba đội như nhau

$\Rightarrow$ Số máy và thời gian hoàn thành công việc là tỉ lệ nghịch với nhau (1đ)

Ta có: $\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$ và $x - y = 2$ (1đ)

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x - y}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24 \quad (1đ)$$

Từ đó: $\frac{x}{\frac{1}{4}} = 24 \Rightarrow x = 6$ (số máy của đội thứ nhất)

$$\frac{y}{\frac{1}{6}} = 24 \Rightarrow y = 4$$
 (số máy của đội thứ hai)

$$\frac{z}{\frac{1}{8}} = 24 \Rightarrow z = 3$$
 (số máy của đội thứ ba)

Bài 48: Hai lớp 7A và 7B đi lao động trồng cây. Biết rằng tỉ số giữa số cây trồng được của lớp 7A và 7B là 0,8. Lớp 7B trồng nhiều hơn lớp 7A là 20 cây. Tính số cây mỗi lớp trồng được

Lời giải:

Gọi x, y theo thứ tự là số cây trồng được của lớp 7A, 7B. Ta có:

$$y - x = 20 \text{ và } \frac{x}{y} = 0,8 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

Từ (1) ta có tỉ lệ thức $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{y-x}{5-4} = \frac{20}{1} = 20 \Rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 100 \end{cases}$

Kết luận

Bài 49: Tìm các góc của một tam giác. Biết rằng số đo của chúng tỉ lệ với 2,3,4

Lời giải:

Gọi số đo độ của ba góc của tam giác là x, y, z . Khi đó ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{9} = 20 \left(x+y+z = 180^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 20^\circ \Rightarrow x = 40^\circ; \frac{y}{3} = 20^\circ \Rightarrow y = 60^\circ; z = 80^\circ$$

Bài 50: Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải:

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$$a = 32,5\%(a + b + c)$$

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây

Bài 51: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua?

Lời giải:

Gọi tổng số gói tẩy 3 lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Số gói tẩy sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{5x}{15} = 4 \Rightarrow x = 360(tm)$$

Bài 52: Học sinh lớp 7A được chia thành ba loại giỏi, khá, trung bình. Biết rằng $\frac{1}{2}$ số học sinh khá bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh giỏi và bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh trung bình, số học sinh giỏi ít hơn số học sinh khá là 4 em. Tính số học sinh giỏi, khá, trung bình của lớp 7A?

Lời giải:

Gọi số học sinh giỏi, khá, trung bình của lớp 7A lần lượt là a, b, c , ta có:

$$a - b = 4 \text{ và } \frac{3a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{2c}{5} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{b-a}{12-8} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1.8 = 8 \\ b = 1.12 = 12 \\ c = 1.15 = 15 \end{cases}$$

Vậy số học sinh giỏi, khá, trung bình lớp 7A lần lượt là 8; 12; 15 em

Bài 53: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27m$. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24m$. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải:

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng.

Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12m \\ r_B = 15m = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài.

Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(m) = d_A$$

$$\text{Do đó: } S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(m^2)$$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315(m^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360(m^2)$$

Bài 54: Ba đội máy ủi đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành trong 6 ngày, đội thứ ba hoàn thành trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất nhiều hơn đội thứ hai 2 máy.

Lời giải:

Gọi x, y, z theo thứ tự là số máy ủi của đội 1, 2, 3

Do các máy có cùng công suất, khối lượng công việc của ba đội như nhau

$\Rightarrow$ Số máy và thời gian hoàn thành công việc là tỉ lệ nghịch với nhau.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \text{ và } x - y = 2$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x - y}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Bài 55. Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số tăm của ba lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Leftrightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 56. Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$$a = 32,5\%(a + b + c)$$

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây

Bài 57. Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

1) Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360(tm)$$

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 58. Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15; 60 và 8.

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a > b > 0)$, theo đầu bài ta có:

$$15(a+b) = 60(a-b) = 8ab \text{ hay } \frac{a+b}{8} = \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15} = k \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

Bài 58: Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ với 6; 5; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$ đất. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x (m^3)$ ĐK: $x > 0$.

Số đất dự định chia cho ba đội I, II, III lần lượt là $a, b, c (m^3)$ ĐK: $a, b, c > 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho ba đội I, II, III lần lượt là $a', b', c' (m^3)$ ĐK: $a', b', c' > 0$.

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a'; b = b'; c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất

Bài 59: Ba đội cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải

+ Gọi số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là $x; y; z$ (giờ).

ĐK: $x; y; z > 0$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỷ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

$y = 20, z = 15, x = 30$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Bài 60: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.

Lời giải

+ Gọi tổng số gói tẩy 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tẩy sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b=b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tẩy 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 61: Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A₁, $\frac{1}{4}$ số học sinh

của lớp 7A₂ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7A₃ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba

lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Lời giải

+ Gọi tổng số học sinh của 7A₁, 7A₂, 7A₃ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có : $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3.$$

Suy ra : $a = 54, b = 48, c = 45$

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54, 48 và 45.

Bài 62: Có sáu túi lần lượt chứa 18, 19, 21, 23, 25 và 34 bóng. Một túi chỉ chứa bóng đỏ trong khi năm túi kia chỉ chứa bóng xanh. Bạn Toán lấy ba túi, bạn Học lấy hai túi. Túi còn lại chứa bóng đỏ. Biết lúc này bạn Toán có số bóng xanh gấp đôi số bóng xanh của bạn Học. Tìm số bóng đỏ trong túi còn lại.

Lời giải

+ Tổng số bóng trong 6 túi là : $18 + 19 + 21 + 23 + 25 + 34 = 140$

Vì số bóng của Toán gấp hai lần số bóng của học nên tổng số bóng của hai bạn là bội của 3. Ta có : 140 chia 3 bằng 46 dư 2. Do đó số bóng đỏ cũng là số chia 3 dư 2.

Trong sáu số đã cho chỉ có 23 chia 3 dư 2, đó chính là số bóng đỏ trong túi còn lại. Từ đó ta tìm được số bóng của Toán là : $18 + 21 = 39$. Số bóng của học là : $19 + 25 + 34 = 78$.

Bài 63: Một cửa hàng có ba cuộn vải, tổng chiều dài ba cuộn vải đó là 186m, giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn là như nhau. Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba. Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2. Tính xem trong ngày đó cửa hàng đã bán được bao nhiêu mét vải mỗi cuộn.

Lời giải

+ Gọi chiều dài cuộn vải thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là x, y, z (m) ĐK: $0 < x, y, z < 186$

+) Tổng chiều dài ba cuộn vải đó là 186m $\Rightarrow x + y + z = 186$

+ Sau khi bán được một ngày cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ cuộn thứ nhất, $\frac{1}{3}$ cuộn thứ hai, $\frac{3}{5}$ cuộn thứ ba

$\Rightarrow$ Trong ngày đó cửa hàng đã bán được số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là

$$\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}, \frac{2z}{5} \text{ (mét)}$$

+) Số tiền bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2 và giá tiền mỗi mét vải của ba cuộn như nhau.

$\Rightarrow$ Số mét vải bán được của ba cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt tỉ lệ với 2; 3; 2

$$\Rightarrow \frac{x}{3} : \frac{2y}{3} : \frac{2z}{5} = 2 : 3 : 2 \Rightarrow \frac{2x}{12} = \frac{2y}{9} = \frac{2z}{10}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+9+10} = \frac{186}{31} = 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 72 \\ y = 54 \\ z = 60 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy trong ngày đó cửa hàng đã bán số mét vải ở cuộn thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là : 24; 36; 24 (mét).

Bài 64: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật: A; B và C. Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là 24m. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất đó.

Lời giải

+ Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là $S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$.

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} ; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} ; d_A = d_B ; r_A + r_B = 27(\text{m}) ; r_B = r_C ; d_C = 24(\text{m})$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng.

Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4+5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\Rightarrow r_A = 12(\text{m}) ; r_B = 15(\text{m}) = r_C$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài.

Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21 (\text{m}) = d_A$$

$$\text{Do đó: } S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252 (\text{m}^2)$$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315 (\text{m}^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360 (\text{m}^2)$$

Bài 65: Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm.

Lời giải

+ Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có : $x + y + z = 13$

và $2x = 3y = 4z = 2 S_{ABC}$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

suy ra $x = 6, y = 4; z = 3$

KL: $x = 6, y = 4, z = 3$.

Bài 66: Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

Ta có $(x + y).35 = (x - y).210 = 12. xy$

Từ $(x + y).35 = (x - y).210$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$$

thay vào đẳng thức $(x + y).35 = 12. xy$ ta được

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y - 5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\} \text{ mà } y > 0 \text{ nên } y = 5$$

Với $y = 5$ thì $x = 7$.

Bài 67: Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó $\frac{2}{3}$

số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh của nhóm III. Biết

rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (x, y, z nguyên dương)

Theo đề bài ta có:

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \text{ chia các tỉ số trên cho BCNN}(2,4,8)=8 \text{ ta được}$$

$$\frac{2.x}{3.8} = \frac{8.y}{11.8} = \frac{4.z}{5.8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$$

$$\text{Mặt khác : } y + z - x = 18$$

Áp dụng tính chất dãy các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y+z-x}{11+10-12} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 12.2 = 24 \\ y = 11.2 = 22 \\ z = 10.2 = 20 \end{cases}$$

Vậy số học sinh: Nhóm I là 24; nhóm II là 22, nhóm III là 20

Bài 68: Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Giải

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5;4;6

$$\text{Do đó ta có: } x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{35} = 15 \\ \Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150

Bài 69: Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Giải:

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b : c = 1,5 : 1,2$ và $b - a = 120$

$$a = 32,5\% a + b + c$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1,5} = \frac{c}{1,2} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$

$$\frac{a}{325} = \frac{a + b + c}{100}$$

.....

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là 2400 cây

Bài 70: Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Giải:

+ Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên

$$a + b + c = 74$$

+ Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

+ Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

+ Từ đó ta có $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a + b + c}{10 + 12 + 15} = \frac{74}{37} = 2$

+ Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$

Bài 71: Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số tăm mà ba lớp đã mua

Giải:

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

Ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a + b + c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a' + b' + c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}$$
 (2)

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Vậy $c' - c = 4$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 72: Có 16 tờ giấy bạc loại 20000đ, 50000đ, 100000đ. Trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau.

Hỏi mỗi loại có mấy tờ

Giải

Gọi số tờ giấy bạc loại 20 000đ, 50 000đ, 100 000đ theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 16$ và $20000x = 50000y = 100000z$

Biến đổi $20000x = 50000y = 100000z$

$$\Rightarrow \frac{20000x}{100000} = \frac{50000y}{100000} = \frac{100000z}{100000} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

Suy ra $x = 10, y = 4, z = 2$

Vậy số tờ giấy bạc loại 20000đ, 50 000đ, 100 000đ theo thứ tự là 10; 4; 2

Bài 73: Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27m$. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là $24m$. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải:

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A, S_B, d_B, r_B, S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$

Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng.

Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12m \\ r_B = 15m = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài.

Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(m) = d_A$$

Do đó: $S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(m^2)$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315(m^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360(m^2)$$

Bài 74: Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải:

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5; 4; 6

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$$

Do đó ta có:

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{35} = 15$$

$$\Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150

Bài 75: Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên

$$a + b + c = 74$$

Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

Từ đó ta có: $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$

Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$

Bài 76. Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27cm$, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là $24cm$. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

a) Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là

$d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12cm, r_2 = 15cm$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(cm)$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315cm^2$

Diện tích hình thứ nhất : $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252cm^2$

Diện tích hình thứ ba : $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360cm^2$

Bài 77: (Đề thi HSG 7 thành phố Thái Bình 2016-2017)

$x = \frac{m}{n+2017} = \frac{n}{m+2017} = \frac{2017}{m+n}$ (m, n là hai số thực khác -2017 và $m+n \neq 0$).

Lời giải

$$x = \frac{m}{n+2017} = \frac{n}{m+2017} = \frac{2017}{m+n}$$

Nếu $m+n+2017 \neq 0$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$x = \frac{m}{n+2017} = \frac{n}{m+2017} = \frac{2017}{m+n} = \frac{m+n+2017}{2(m+n+2017)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nếu } m+n+2017=0 \Rightarrow \begin{cases} m+n=-2017 \\ m+2017=-n \\ n+2017=-m \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m}{-m} = \frac{n}{-n} = \frac{2017}{-2017} = -1$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2} \text{ khi } m+n+2017 \neq 0$$

$$x = -1 \text{ khi } m+n+2017 = 0.$$

Bài 78: (Đề thi HSG 7 Huyện Sơn Tịnh)

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian dự định với vận tốc 40km/h. Sau khi đi được 1/2 quãng đường AB thì ô tô tăng vận tốc lên 50km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến B sớm hơn dự định 18 phút. Tính quãng đường AB.

Lời giải

$$\text{18 phút} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}(\text{h})$$

Gọi vận tốc và thời gian dự định đi nửa quãng đường trước là v_1 ; t_1 , vận tốc và thời gian đã đi nửa quãng đường sau là v_2 ; t_2 .

Cùng một quãng đường vận tốc và thời gian là 2 đại lượng TLN do đó:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 \Leftrightarrow \frac{v_2}{t_1} = \frac{v_1}{t_2} = \frac{v_2 - v_1}{t_1 - t_2} = \frac{100}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2} (\text{giờ})$$

$\Rightarrow$ thời gian dự định đi cả quãng đường AB là 3 giờ

Quãng đường AB dài $40 \cdot 3 = 120$ (km)

Bài 79: (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2017-2018)

Hãy chia số $\frac{213}{70}$ thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{3}{5}$; 4; $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Gọi 3 phần cần tìm lần lượt là x , y , z

$$\text{Theo bài ra ta có } x+y+z = \frac{213}{70} \text{ và } x:y:z = \frac{3}{5}:4:\frac{5}{2}$$

$$\text{hay } x+y+z = \frac{213}{70} \text{ và } x:y:z = 6:40:25$$

$$\text{suy ra } \frac{x}{6} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{6+40+25} = \frac{\frac{213}{70}}{71} = \frac{3}{70}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{35}; y = \frac{12}{7}; z = \frac{15}{14}$$

$$\text{Vậy 3 phần cần tìm là } \frac{9}{35}; \frac{12}{7}; \frac{15}{14}$$

Bài 80: (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016 - 2017)

Hãy chia số 26 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 2; 3; 4.

Lời giải

Giả sử số 26 được chia thành ba phần x , y , z .

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3}$
 $= \frac{26}{13} = 2$

$\Rightarrow x = 12, y = 8, z = 6.$

Bài 81: (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2007-2008)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng

a) $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$

b) $\frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$

Lời giải

a) Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}.$$

b) Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$

Suy ra $\frac{3ab}{3cd} = \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{11a^2}{11c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{3ab + 7a^2}{3cd + 7c^2} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2}$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 82: (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -6)

Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15; 60 và 8.

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là a, b ($a > b > 0$), theo đầu bài ta có: $15(a + b) = 60(a - b) = 8ab$.

Hay: $\frac{a+b}{8} = \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15} = k$. Giải ra được $k = 1$.

$$\Rightarrow a = 5; b = 3$$

Bài 83: (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 7)

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A.

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 24309 \text{ và (2)}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$$

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow k^2 \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$$

$$\Rightarrow k = 180 \text{ và } k = -180$$

$$+ \text{ Với } k = 180, \text{ ta được: } a = 72; b = 135; c = 30.$$

$$\text{Khi đó ta có số } A = a + b + c = 237$$

$$+ \text{ Với } k = -180, \text{ ta được: } a = -72; b = -135; c = -30$$

$$\text{Khi đó ta có số } A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

Bài 84: (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 2)

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c .

$$\text{Theo bài ra ta có: } a + b + c = 5\frac{25}{63}$$

$$a : b : c = \frac{1}{20} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{1}{20} : \frac{1}{12} : \frac{1}{35} = 21 : 35 : 12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3} \Rightarrow b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9} \Rightarrow c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}$ và $\frac{20}{21}$.

Bài 85: (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 4)

Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 30; 120; 16.

Lời giải

Gọi 2 số đó là a, b . Ta có :

$$30(a+b) = 120(a-b) = 16ab$$

$$\text{Từ điều kiện : } 30(a+b) = 120(a-b), \text{ tìm được } \frac{a}{5} = \frac{b}{3}$$

$$\text{Từ điều kiện : } 120(a-b) = 16ab, \text{ tìm được } \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15}$$

$$\text{Từ đó tìm được: } a = 5; b = 3.$$

Bài 86: (Đề HSG Lâm Thao 1016-2017).

Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây.

Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi số cây ba lớp trồng lần lượt là a, b, c (cây, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có $b:c = 1,5:1,2$ và $b-a = 120$; $a = 32,5\%(a+b+c)$

Vì $a = 32,5\%(a+b+c) \Rightarrow 40.a = 13(a+b+c)$ (1) mà $b-a = 120 \Rightarrow a = b-120$ (2) Mặt khác

$b:c = 1,5:1,2 \Rightarrow c = 0,8.b$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $b = 900 \Rightarrow c = 720, a = 780$ (t / m)

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là $900 + 720 + 780 = 2400$ cây.

Bài 87: (Đề thi HSG 7 huyện Ngọc Lặc 20.. -20...)

Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y ; $x_1; x_2$ là hai giá trị bất kì của $x, y_1; y_2$ là hai giá trị tương ứng của y . Tính $y_1; y_2$ biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$ và $x_1 = 2; x_2 = 3$.

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = \frac{y_2^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{9+4} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\Rightarrow y_1^2 = 36 \Rightarrow y_1 = \pm 6$$

Với $y_1 = -6$ thì $y_2 = -4$

Với $y_1 = 6$ thì $y_2 = 4$

Bài 88: (Đề thi HSG 7 huyện Ý Yên 2015-2016)

Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M .

Lời giải

Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z , ta được $x + y + z = M$

Theo đề bài ta có $x:y:z = \frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$ (1)

Hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$

Suy ra $x^3 = 10^3.k^3$; $y^3 = 6^3.k^3$; $z = 5^3.k^3$

Thay vào (1), được $1341k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

suy ra $x = 20; y = 12; z = 10$ Vậy $M = 42$.

Bài 89: (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

Ta có $(x+y).35 = (x-y).210 = 12.xy$

$$\text{Từ } (x+y).35 = (x-y).210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$$

thay vào đẳng thức $(x+y).35 = 12.xy$ ta được

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\} \text{ mà } y > 0 \text{ nên } y = 5$$

Với $y = 5$ thì $x = 7$.

Bài 90: (Đề thi HSG Toán 7 Trường 039 năm học 2016-2017)

Hiện nay hai kim đồng hồ chỉ 10 giờ. Sau ít nhất bao lâu thì 2 kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi x, y là số vòng quay của kim phút và kim giờ khi 10 giờ đến lúc 2 kim đối nhau trên một đường thẳng, ta có:

$$x - y = \frac{1}{3} \text{ (ứng với từ số 12 đến số 4 trên đồng hồ)}$$

Và $x : y = 12$ (do kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ)

$$\text{Do đó } \frac{x}{y} = \frac{12}{1} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{1} = \frac{x-y}{11} = \frac{1}{3} : 11 = \frac{1}{33} \Rightarrow x = \frac{12}{33} \text{ (vòng)} \Rightarrow x = \frac{4}{11} \text{ (giờ)}$$

Vậy thời gian ít nhất để 2 kim đồng hồ từ lúc khi 10 giờ đến lúc nằm đối diện nhau trên một đường thẳng là $\frac{4}{11}$ giờ

Bài 91: (Đề thi HSG 7 MỸ HƯNG 2016-2017)

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

$$\text{Theo bài ra ta có: } a + b + c = 5\frac{25}{63}$$

$$a : b : c = \frac{1}{20} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{1}{20} : \frac{1}{12} : \frac{1}{35} = 21 : 35 : 12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Bài 92: (Đề HSG huyện Bến Lức 2018 – 2019)

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6; 5; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3)$, DK: $x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$, DK: $a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. DK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Bài 93: (Đề thi HSG 7 – Huyện Ý Yên 2015 – 2016)

Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

Lời giải

Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z, ta được $x + y + z = M$

$$\text{Theo đề bài ta có } x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} \text{ và } x^3 + y^3 + z^3 = 10728 \quad (1)$$

$$\text{Hay } \frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \text{ và } x^3 + y^3 + z^3 = 10728$$

$$\text{Suy ra } x^3 = 10^3 \cdot k^3; y^3 = 6^3 \cdot k^3; z^3 = 5^3 \cdot k^3$$

$$\text{Thay vào (1), được } 1341k^3 = 10728 \Rightarrow k = 2 \text{ suy ra } x = 20; y = 12; z = 10$$

$$\text{Vậy } M = 42.$$

Bài 94: (Đề thi HSG 7 huyện Sơn Dương 2017-2018)

Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1, x_2 là hai giá trị bất kỳ của x, y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y

Tính y_1, y_2 biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$, và $x_1 = 2; x_2 = 3$

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = \frac{y_2^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\Rightarrow y_1^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \Rightarrow y_2 = 4 \\ y_1 = -6 \Rightarrow y_2 = -4 \end{cases}$$

Bài 94: (Đề thi HSG 7 huyện Đăk Cầu 2018-2019)

Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1, x_2 là hai giá trị bất kỳ của x; y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

Tính y_1, y_2 biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$ và $x_1 = 2; x_2 = 3$.

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = \frac{y_2^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{9+4} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\Rightarrow y_1^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Với } y_1 = -6 \Rightarrow y_2 = -4$$

Với $y_1 = 6 \Rightarrow y_2 = 4$

Bài 95: (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2018-2019)

Tìm ba số tự nhiên, biết rằng bội chung nhỏ nhất của chúng bằng 360 và số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ nghịch với 3 và 2, số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ thuận với 2 và 3.

Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a, b, c (đk $a; b; c \in \mathbb{N}$)

Vì số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ nghịch với 3 và 2 nên ta có: $3a = 2b \Rightarrow 9a = 6b$

số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ thuận với 2 và 3 nên ta có: $\frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Rightarrow 3b = 2c \Rightarrow 6b = 4c$

suy ra $9a = 6b = 4c \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9}$

Đặt $\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = k \Rightarrow a = 4k; b = 6k; c = 9k$

$\Rightarrow BCNN(a; b; c) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot k = 36k$ mà theo bài ra $\Rightarrow BCNN(a; b; c) = 360$

Suy ra: $\Rightarrow 36k = 360 \Rightarrow k = 10$

$\Rightarrow a = 4 \cdot 10 = 40; b = 6 \cdot 10 = 60; c = 9 \cdot 10 = 90$

Vậy 3 số cần tìm là 40; 60; 90