

Chuyên đề 6. TỈ LỆ THỨC. TÍNH CHẤT CỦA DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

PHẦN I. TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số

- Dạng tổng quát : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a : b = c : d$

Các số a và d gọi là ngoại tỉ ; các số b và c gọi là trung tỉ.

2. Tính chất của tỉ lệ thức

- Tính chất cơ bản : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \ (b, d \neq 0)$
- Tính chất hoán vị: Từ một tỉ lệ thức ta có thể:
 - + Đổi chỗ hai ngoại tỉ cho nhau;
 - + Đổi chỗ hai trung tỉ cho nhau;
 - + Vừa đổi chỗ hai ngoại tỉ, vừa đổi chỗ hai trung tỉ.

3. Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

4. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5.

Ta cũng viết $a : b : c = 2 : 3 : 5$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $2x + 3y = 36$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để tìm x, y trong dãy tỉ số bằng nhau và biết thêm điều kiện ràng buộc. Ta có thể:

- Cách 1. Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ
- Cách 2. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau
- Cách 3. Biểu diễn x theo y từ tỉ lệ thức (hoặc y theo x)

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1 :** (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ suy ra : $x = 3k, y = 4k$

Theo giả thiết : $2x + 3y = 36 \Rightarrow 6k + 12k = 36 \Rightarrow 18k = 36 \Rightarrow k = 2$

Do đó : $x = 3.2 = 6; y = 4.2 = 8$

Kết luận $x = 6, y = 8$

+ **Cách 2:** (sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau):

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2x + 3y}{2.3 + 3.4} = \frac{36}{18} = 2$

Do đó : $\frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6$

$$\frac{y}{4} = 2 \Rightarrow y = 8$$

Kết luận : $x = 6, y = 8$

+ **Cách 3:** (phương pháp thế)

Từ giả thiết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{3y}{4}$

Mà $2x + 3y = 36 \Rightarrow \frac{3y}{2} + 3y = 36 \Rightarrow 9y = 72 \Rightarrow y = 8$

Do đó : $x = \frac{3.8}{4} = 6$

Kết luận $x = 6, y = 8$

Ví dụ 2: Tìm x, y, z biết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Từ hai tỉ lệ thức của giả thiết ,ta cần nối lại tạo thành dãy tỉ số bằng nhau. Quan sát hai tỉ lệ thức ta thấy chúng có chung y vì vậy khi nối cần tạo thành phân chứa y giống nhau. Sau đó vẫn ý tưởng như ví dụ trên, chúng ta có 3 cách giải.

- *Cách 1.* Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ. Biểu thị x, y, z theo hệ số tỉ lệ k.
- *Cách 2.* Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.
- *Cách 3.* Biểu diễn x, y theo z từ dãy tỉ số bằng nhau.

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1.** Từ giả thiết : $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1)$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} (*)$

Ta đặt $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = k$ suy ra $x = 9k; y = 12k; z = 20k$

Theo giả thiết : $2x - 3y + z = 6 \Rightarrow 18k - 26k + 20k = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$

Do đó: $x = 27, y = 36, z = 60$.

+ **Cách 2.** Chúng ta biến đổi giả thiết như cách 1 đến (*)

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó: $\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

Kết luận : $x = 27, y = 36, z = 60$.

+ **Cách 3.** (phương pháp thế : ta tính x, y theo z)

$$\text{Từ giả thiết : } \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow y = \frac{3z}{5}; \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow x = \frac{3y}{4} = \frac{3 \cdot \frac{3z}{5}}{4} = \frac{9z}{20}$$

$$\text{Mà } 2x - 3y + z = 6 \Rightarrow 2 \cdot \frac{9z}{20} - 3 \cdot \frac{3z}{5} + z = 6 \Rightarrow \frac{z}{10} = 6 \Rightarrow z = 60$$

$$\text{Suy ra : } y = \frac{3 \cdot 60}{5} = 36, x = \frac{9 \cdot 60}{20} = 27$$

Kết luận : $x = 27, y = 36, z = 60$

Ví dụ 3: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $xy = 24$

Giải

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k \text{ suy ra : } x = 2k, y = 3k$$

$$\text{Theo giả thiết : } xy = 24 \Rightarrow 2k \cdot 3k = 24 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

+ Với $k = 2$ thì $x = 4; y = 6$

+ Với $k = -2$ thì $x = -4; y = -6$

Kết luận. Vậy $(x; y)$ là $(-4; -6), (4; 6)$.

✓ **Nhận xét.** Trong ví dụ này có thể chúng ta mắc sai lầm sau :

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ – TRƯỜNG THCS TÂY HỒ

+ Thứ nhất trong lời giải trên thiếu trường hợp $k = -2$

+ Thứ hai chúng ta vận dụng tính chất : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{xy}{2.3} = \frac{24}{6} = 4$! Chúng ta lưu ý rằng tính chất dãy tỉ số bằng nhau không cho phép nhân (hoặc chia) tử thức với nhau. Do vậy gặp điều kiện về phép nhân hoặc lũy thừa giữa các biến, chúng ta nên đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ

Ví dụ 4: Với a, b, c, x, y, z khác 0, biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Quan sát phần kết luận ta cần biến đổi đưa về : $ay = bx, bz = cy, az = cx$ hay cần chứng minh $ay - bx = 0, bz - cy = 0, az - cx = 0$. Vì vậy từ giả thiết ta cần chứng minh $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = 0$. Với suy nghĩ đó, chúng ta cần nhân mỗi tỉ số với một số thích hợp vào tử và mẫu số sao cho khi vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau thì được kết quả bằng 0. Quan sát tỉ số $\frac{bz - cy}{a}$ và $\frac{cx - az}{b}$ ta thấy bz và $-az$; để triệt tiêu được, chúng ta cần nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ nhất với a ; nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ hai với b . Tương tự như vậy với tỉ số thứ ba.

✓ *Trình bày lời giải*

Từ đề bài ta có : $\frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - abz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

Suy ra $ay - bx = 0, bz - cy = 0, az - cx = 0$

$$\Rightarrow ay = bx, bz = cy, az = cx \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ví dụ 5: Một khu đất hình chữ nhật có chiều rộng và chiều dài tỉ lệ với 5 và 8. Diện tích bằng $1960m^2$. Tính chu vi hình chữ nhật đó.

Giải

✓ *Trình bày lời giải*

Đặt chiều rộng và chiều dài khu đất là x và y (mét; $x, y > 0$)

Theo đề bài, ta có : $\frac{x}{5} = \frac{y}{8}$ và $xy = 1960$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = k$ (điều kiện $k > 0$), suy ra : $x = 5k, y = 8k$

Theo giả thiết : $xy = 1960 \Rightarrow 5k.8k = 1960 \Rightarrow k^2 = 49 \Rightarrow k = 7$ (vì $k > 0$)

Từ đó ta tìm được : $x = 35; y = 56$

Suy ra chu vi hình chữ nhật là : $(35 + 56).2 = 182(m)$

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d khác 0 và không đôi nhau từng đôi một, thỏa mãn dãy tỷ số bằng nhau :

$$\frac{2020a+b+c+d}{a} = \frac{a+2020b+c+d}{b} = \frac{a+b+2020c+d}{c} = \frac{a+b+c+2020d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Giải

Từ giả thiết suy ra :

$$2019 + \frac{a+b+c+d}{a} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{b} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{c} = 2019 + \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

+ Trường hợp 1: Xét $a+b+c+d = 0 \Rightarrow a+b = -(c+d); b+c = -(d+a)$

$$\text{Suy ra } M = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{c+d}{-(c+d)} + \frac{d+a}{-(d+a)}$$

$$M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

+ Trường hợp 2: Xét $a+b+c+d \neq 0$

$$\text{Suy ra } a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} = 1+1+1+1 = 4$$

Ví dụ 7: Cho a, b, c, d khác 0, thỏa mãn tỉ lệ thức $\frac{21a+10b}{a-11b} = \frac{21c+10d}{c-11d}$

Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Giải

Từ $\frac{21a+10b}{21c+10d} = \frac{a-11b}{c-11d}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\text{Từ } \frac{21a+10b}{21c+10d} = \frac{a-11b}{c-11d} = \frac{21a-231b}{21c-231d} = \frac{21a+10b-(21a-231b)}{21c+10d-(21c-231d)} = \frac{241b}{241d} = \frac{b}{d} \quad (1)$$

$$\text{Từ } \frac{231a+110b}{231c+110d} = \frac{10a-110b}{10c-110d} = \frac{231a+110b+10a-110b}{231c+110d+10c-110d} = \frac{241a}{241c} = \frac{a}{c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ví dụ 8: Độ dài các cạnh của một tam giác tỉ lệ với nhau như thế nào, biết nếu cộng lần lượt từng độ dài hai đường cao của tam giác đó thì các tổng này tỉ lệ với 7; 6; 5.

Giải

Đặt độ dài ba cạnh tam giác là a, b, c . Độ dài ba đường cao tương ứng là $h_a; h_b; h_c$. Theo đề bài ta

$$\text{có : } \frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} = \frac{h_c + h_a}{5} \text{ và } ah_a = bh_b = ch_c \quad (1)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} = \frac{h_c + h_a}{5} = \frac{h_a + h_b - h_b - h_c}{7 - 6} = h_a - h_c$$

$$\Rightarrow h_c + h_a = 5h_a - 5h_c \Rightarrow 2h_a = 3h_c \Rightarrow \frac{h_a}{3} = \frac{h_c}{2} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{2h_a + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{3h_c + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6}$$

$$\Rightarrow 3(3h_c + 2h_b) = 7(h_b + h_c) \Rightarrow 9h_c + 6h_b = 7h_b + 7h_c \Rightarrow 2h_c = h_b \Rightarrow \frac{h_c}{2} = \frac{h_b}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2),(3) suy ra : } \frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2} = k \quad (k > 0) \Rightarrow h_a = 3k; h_b = 4k; h_c = 2k$$

$$\text{Kết hợp với (1), ta có : } 3a = 4b = 2c \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$$

Vậy độ dài ba cạnh tỉ lệ với 4; 3; 6.

C. Bài tập vận dụng

1. Tìm x, y biết :

$$\text{a) } \frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x};$$

$$\text{b) } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$$

$$\text{2. Cho x, y thỏa mãn } \frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}. \text{ Tìm x, y}$$

3. Tìm các số x, y, z biết rằng:

$$\text{a) } x : y : z = 3 : 4 : 5 \text{ và } 5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594$$

$$\text{b) } 3(x-1) = 2(y-2); 4(y-2) = 3(z-3) \text{ và } 2x + 3y - z = 50$$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y - z = 38$

4. Tìm x, y, z biết rằng:

a) $7x = 10y = 12z$ và $x + y + z = 685$;

b) $\frac{x+y}{3} = \frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5}$;

c) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = x+y+z$

d) $\frac{x}{y+z+2} = \frac{y}{x+z+5} = \frac{z}{x+y-7} = x+y+z$;

e) $\frac{xy+1}{9} = \frac{xz+2}{15} = \frac{yz+3}{27}$ và $xy + yz + zx = 11$

5. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $(a+2c).(b+d) = (a+c).(b+2d)$;

b) $\frac{a^{2020} + b^{2020}}{c^{2020} + d^{2020}} = \frac{(a+b)^{2020}}{(c+d)^{2020}}$

6. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Các số x, y, z, t thỏa mãn $xa + yb \neq 0$ và $zc + td \neq 0$

Chứng minh $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$

7. Cho tỉ lệ thức $\frac{3x-y}{x+y} = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$

8. Chứng minh rằng : Nếu $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

9. Cho a, b, c, d khác 0, thỏa mãn $b^2 = ac; c^2 = bd$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d} \right)^3$; b) $\frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{a}{d}$.

10. Chứng minh nếu $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ trong đó a, b, c khác nhau và khác 0 thì ta có

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

11. Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2016} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2020}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$$

12. Cho $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$ và $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Chứng minh rằng :

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$$

13. Cho $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị

nguyên $A=\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z}$

14. Cho dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\dots=\frac{a_{2019}}{a_{2020}}=\frac{a_{2020}}{a_1}$

Tính giá trị biểu thức $B=\frac{(a_1+a_2+\dots+a_{2020})^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2020}^2}$

15. Cho $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0$. Tính $P=\frac{a^{49}b^{51}}{c^{100}}$

16. Cho a, b, c là ba số dương, thỏa mãn điều kiện : $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$.

17. Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$ và $b \neq 0$. Chứng minh rằng : $c=0$

18. Cho x, y, z khác 0, thỏa mãn $\frac{x-y}{x+y}=\frac{z-x}{z+x}$. Chứng minh rằng $x^2=yz$

19. Cho $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$ (giả thiết A có nghĩa)

20. Cho các số a; b; c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b}=\frac{bc}{b+c}=\frac{ca}{c+a}$

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^3+b^3+c^3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.

a) Vì $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} \Rightarrow 24(1+2y) = 18(1+4y) \Rightarrow 24 + 48y = 18 + 72y$

$\Rightarrow 24y = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$. Thay vào đề bài ta có :

$$\frac{1+2 \cdot \frac{1}{4}}{18} = \frac{1+6 \cdot \frac{1}{4}}{6x} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{18} = \frac{\frac{5}{2}}{6x} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 6x = 18 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5$$

b) Ta có : $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{4+20y}{20x} = \frac{5+35y}{20x} =$
 $= \frac{1+3y+4+20y-5-35y}{12+20x-20x} = \frac{-12y}{12} = -y$

$\Rightarrow 1+3y = -12y \Rightarrow y = -\frac{1}{15}$

Thay vào đề bài ,ta được : $\frac{1+5 \cdot \frac{-1}{15}}{5x} = \frac{1}{15} \Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ và $y = -\frac{1}{15}$

2. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+1+3y-2}{5+7} = \frac{2x+3y-1}{12}$$

Kết hợp với đề bài suy ra: $\frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

✓ Trường hợp 1: Xét $2x+3y-1=0$

suy ra: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = 0 \Rightarrow 2x+1=0; 3y-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}; y = \frac{2}{3}$

✓ Trường hợp 2: Xét $2x+3y-1 \neq 0$ suy ra $6x=12 \Rightarrow x=2$

Thay vào đề bài ta có : $\frac{2 \cdot 2+1}{5} = \frac{3y-2}{7} \Rightarrow \frac{3y-2}{7} = 1 \Leftrightarrow 3y-2=7 \Leftrightarrow y=3$

Vậy $x=2; y=3$

Nhận xét. bài này dễ bỏ sót trường hợp 1

3.

a) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x=3k; y=4k; z=5k$

$$\text{Mà } 5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594 \Rightarrow 5.25k^2 - 3.9k^2 - 2.16k^2 = 594$$

$$\Leftrightarrow 66k^2 = 594 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$$

$$+ \text{ Với } k = 3 \text{ suy ra } x = 9; y = 12; z = 15$$

$$+ \text{ Với } k = -3 \text{ suy ra } x = -9; y = -12; z = -15$$

$$\text{b) } 3(x-1) = 2(y-2) \Rightarrow 6(x-1) = 4(y-2) \text{ suy ra } 6(x-1) = 4(y-2) = 3(z-3)$$

$$\Rightarrow \frac{6(x-1)}{12} = \frac{4(y-2)}{12} = \frac{3(z-3)}{12} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

$$\text{Đặt } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = k \Rightarrow x = 2k + 1; y = 3k + 2; z = 4k + 3$$

$$\text{Mà } 2x + 3y - z = 50 \Rightarrow 2(2k + 1) + 3(3k + 2) - (4k + 3) = 50$$

$$\Leftrightarrow 4k + 2 + 9k + 6 - 4k - 3 = 50 \Leftrightarrow 9k = 45 \Leftrightarrow k = 5$$

$$\text{Vậy } x = 2.5 + 1 = 11; y = 3.5 + 2 = 17; z = 4.5 + 3 = 23$$

$$\text{c) Ta có: } \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{3y}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{4z}{5} \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y-z}{18+16-15} = \frac{38}{19} = 2$$

$$\text{suy ra : } x = 36; y = 32; z = 30$$

4.

$$\text{a) Từ } 7x = 10y = 12z \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{60+42+35} = \frac{685}{137} = 5$$

$$\text{Từ đó suy ra : } x = 120; y = 210; z = 175$$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5} = \frac{5-z+y+z-9-y}{1+2-5} = 2$$

$$\Rightarrow 5-z = 2 \Rightarrow z = 3; 9+y = 10 \Rightarrow y = 1; X + y = 6 \Rightarrow x = 5$$

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{x} = \frac{x+z+1+z+x+2+x}{x+y+z} = 2$$

Kết hợp với đề bài, suy ra : $x + y + z = 2$

Suy ra : $y + z + 1 = 2x \Rightarrow x + y + z + 1 = 3x \Rightarrow 1 + 2 = 3x \Rightarrow x = 1$

$z + x + 2 = 2y \Rightarrow x + y + z + 2 = 3y \Rightarrow 4 = 3y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$x + y - 3 = 2z \Rightarrow x + y = z - 3 = 3z \Rightarrow 2 - 3 = 3z \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

b) Giải tương tự câu c, ta được : $x = \frac{5}{6}; y = \frac{11}{6}; z = \frac{-13}{6}$

c) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy + 1}{9} = \frac{zx + 2}{15} = \frac{yz + 3}{27} = \frac{xy + 1 + zx + 2 + yz + 3}{9 + 15 + 27} = \frac{17}{51}$$

Suy ra : $xy + 1 = 3 \Rightarrow xy = 2(1)$

$$zx + 2 = 5 \Rightarrow zx = 3(2)$$

$$yz + 3 = 9 \Rightarrow yz = 6(3)$$

Từ (1), (2) và (3) nhân vế với vế : $(xyz)^2 = 36 \Rightarrow xyz = \pm 6$

+ Trường hợp $xyz = 6$

Kết hợp với (1), (2) và (3) ta có : $x = 1; y = 2; z = 3$

+ Trường hợp $xyz = -6$

Kết hợp với (1), (2) và (3) ta có: $x = -1; y = -2; z = -3$

5. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$

a) Xét $(a + 2c)(b + d) = (bk + 2dk)(b + d) = k.(b + 2d).(b + d)(1)$

Xét $(a + c)(b + 2d) = (bk + dk)(b + 2d) = k(b + d)(b + 2d)(2)$

Từ (1) và (2), suy ra : $(a + 2c)(b + d) = (a + c)(b + 2d)$

b) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$

$$\text{Xét } \frac{a^{2020} + b^{2020}}{c^{2020} + d^{2020}} = \frac{b^{2020}.k^{2020} + b^{2020}}{d^{2020}.k^{2020} + d^{2020}} = \frac{b^{2020}(k^{2020} + 1)}{d^{2020}(k^{2020} + 1)} = \frac{b^{2020}}{d^{2020}}(1)$$

$$\text{Xét } \frac{(a + b)^{2020}}{(c + d)^{2020}} = \frac{(bk + b)^{2020}}{(dk + d)^{2020}} = \frac{b^{2020}(k + 1)^{2020}}{d^{2020}(k + 1)^{2020}} = \frac{b^{2020}}{d^{2020}}(2)$$

Từ (1) và (2) , suy ra điều phải chứng minh

6. Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk ; c = dk$

Xét $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xbk + yb}{zbk + tb} = \frac{b(xk + y)}{b(zk + t)} = \frac{xk + y}{zk + t} (1)$

Xét $\frac{xc + yd}{zc + td} = \frac{xdk + yd}{zdk + td} = \frac{d(xk + y)}{d(zk + t)} = \frac{xk + y}{zk + t} (2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$, điều phải chứng minh

7. Từ $\frac{3x - y}{x + y} = \frac{3}{4}$ suy ra : $4(3x - y) = 3(x + y) \Rightarrow 12x - 4y = 3x + 3y$

$$\Rightarrow 12x - 3x = 3y + 4y \Rightarrow 9x = 7y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{9}$$

8. Từ $2(x + y) = 5(y + z) = 3(z + x)$ suy ra :

$$\frac{2(x + y)}{30} = \frac{5(y + z)}{30} = \frac{3(z + x)}{30} \Rightarrow \frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10} = \frac{(x + y) - (z + x)}{15 - 10} = \frac{y - z}{5} (1)$$

$$\frac{x + y}{15} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{10} = \frac{(z + x) - (y + z)}{10 - 6} = \frac{x - y}{4} (2)$$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x - y}{4} = \frac{y - z}{5}$, điều phải chứng minh.

9. Từ $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} ; c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$.

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk ; b = ck ; c = dk$

a) Xét $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \frac{b^3 k^3 + c^3 k^3 - d^3 k^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \frac{k^3(b^3 + c^3 - d^3)}{b^3 + c^3 - d^3} = k^3 (1)$

$$\text{Xét } \left(\frac{a + b - c}{b + c - d} \right)^3 = \left(\frac{bk + ck - dk}{b + c - d} \right)^3 = \left(\frac{k(b + c - d)}{b + c - d} \right)^3 = k^3 (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a + b - c}{b + c - d} \right)^3$ điều phải chứng minh.

b) Xét $\frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{b^3 k^3 + 8c^3 k^3 + 27d^3 k^3}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = \frac{k^3 (b^3 + 8c^3 + 27d^3)}{b^3 + 8c^3 + 27d^3} = k^3 \quad (3)$

Xét $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = k \cdot k \cdot k = k^3 \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh

10. Từ $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ suy ra

$$\frac{a(y+z)}{abc} = \frac{b(z+x)}{abc} = \frac{c(x+y)}{abc} \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{(z+x) - (y+z)}{ac - bc} = \frac{x-y}{c(a-b)} \quad (1)$$

$$\frac{y+z}{bc} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(y+z) - (x+y)}{bc - ab} = \frac{z-x}{b(c-a)} \quad (2)$$

$$\frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(x+y) - (z+x)}{ab - ac} = \frac{y-z}{a(b-c)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) , suy ra $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$, điều phải chứng minh

11. Áp dụng tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{a}{2016} = \frac{b}{2018} = \frac{c}{2020} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = \frac{a-c}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-c)^2}{16} = \left(\frac{a-b}{-2} \right) \left(\frac{b-c}{-2} \right) = \frac{(a-b)(b-c)}{4}$$

Do đó $\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$

12. Áp dụng tính chất tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x+y+z \quad (\text{Vì } a+b+c=1)$$

$$\text{Suy ra : } (x+y+z)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2+y^2+z^2$$

(vì $a+b+c=1$)

Vậy $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$

13. Từ $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z}$$

✓ Trường hợp 1: Xét $x+y+z+t=0$

$$\Rightarrow x+y=-(z+t); y+z=-(t+x)$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{-(z+t)}{z+t} + \frac{-(t+x)}{t+x} + \frac{z+t}{-(z+t)} + \frac{t+x}{-(t+x)}$$

$$A = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

✓ Trường hợp 2: Xét $x+y+z+t \neq 0$

$$\text{Suy ra } y+z+t=z+t+x=t+x+y=x+y+z \Rightarrow x=y=z=t$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} = 1+1+1+1=4$$

Vậy biểu thức A luôn có giá trị là số nguyên

14. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2019}}{a_{2020}} = \frac{a_{2020}}{a_1} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{2019}+a_{2020}}{a_2+a_3+\dots+a_{2020}+a_1}$$

$$\text{Suy ra : } a_1 = a_2 = \dots = a_{2019} = a_{2020}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{(a_1+a_1+\dots+a_1)^2}{a_1^2+a_1^2+\dots+a_1^2} = \frac{2020^2 a_1^2}{2020 a_1^2} = 2020$$

15. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a=b=c. \text{Do đó } P = \frac{a^{49} \cdot a^{51}}{a^{100}} = 1$$

16. Từ đề bài suy ra :

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

Mà $a, b, c > 0$ nên $a+b+c > 0$, suy ra $a=b=c$

$$\text{Từ đó, ta có : } B = \left(1 + \frac{a}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{a}\right) = 8$$

17. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c} = \frac{(a+b+c)-(a-b+c)}{(a+b-c)-(a-b-c)} = \frac{2b}{2b} = 1$$

$$\Rightarrow a+b+c = a+b-c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

18. Từ $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-x}{z+x}$ suy ra $\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y+x+y}{z-x+z+x} = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z} \quad (1)$$

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y-x-y}{z-x-z-x} = \frac{-2y}{-2x} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\frac{x}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = yz$

19. Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$

Đặt $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k; y = 20k; z = 24k$

Do đó $A = \frac{30k + 60k + 96k}{45k + 80k + 120k} = \frac{186k}{250k} = \frac{93}{125}$

20. Với $a, b, c \neq 0$ ta có : $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = 1$$

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI VÀO 10

Câu 1. (Đề thi HSG 7 Lê Hồng Phong 2016-2017)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0 \Rightarrow 2y + 4z = 0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra :

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0) \text{ thì } \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}$$

Suy ra : $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 28k(3)$

Thay $x = 2k, y = 4k, z = 6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$
$$\Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \text{ (ktm)} \\ k = \frac{1}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\text{Với } k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$

Vậy $x = 1, y = 2, z = 3$

Câu 2. (Đề thi HSG 7 Minh An 2016-2017)

Cho $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Lời giải

$$\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2abz-3acy}{a^2} = \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2}$$
$$= \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Câu 3. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

$$\text{Cho } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y) + 3(2z-4x) + 2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1); \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Câu 4. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2017-2018)

Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} \text{ thì } \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab+ac}{2} &= \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} \\ &= \frac{ab+ac+bc+ba+ca+cb}{2+3+4} \\ &= \frac{ab+bc+ca-bc-ba}{4,5-3} = \frac{ca}{1,5} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{ab}{0,5} = \frac{ac}{1,5} = \frac{bc}{2,5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,5ab = 0,5ac \\ 1,5bc = 2,5ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = c \\ 5a = 3b \end{cases} \quad (a, b, c \neq 0)$$

$$\Rightarrow 5a = 3b = c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Câu 5. (Đề thi HSG 7 Huyện Thái Thụy năm 2017-2018)

Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $b^2 = ac, c^2 = bd$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ $b^2 = ac$ và $c^2 = bd$ ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$ (2)

Mà $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh

Câu 6. (Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Cày năm 2017-2018)

Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0 \Rightarrow x = y = z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$ (dpcm)

Câu 7. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

Nếu $a+b+c \neq 0$, Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{a+b}{c}\right) = 8$$

+) Nếu $a+b+c = 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{b+c}{a}\right) = 1$$

Câu 8. (Đề thi HSG 7 Trường thực hành Sài Gòn 2017-2018)

Biết rằng : $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh : $x:y:z = a:b:c$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{bz-cy}{a} &= \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcz}{c^2} \\ &= \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b}; \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow x:y:z = a:b:c$$

Câu 9. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 154 – 2017-2018)

Cho 3 số x, y, z là 3 số khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$.

$$\text{Hãy tính giá trị biểu thức : } B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

Lời giải

$$\text{b) Ta có: } \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z} \Rightarrow \frac{y+z}{x} - 1 = \frac{z+x}{y} - 1 = \frac{x+y}{z} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{z+x}{x}$$

$$= \frac{x+y}{z} \cdot \frac{z+x}{y} \cdot \frac{y+z}{x} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{Vậy } B = 8$$

Câu 10. (Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Trách 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

Ta có : $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

Suy ra $\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x = 4; y = 6; z = 8$$

Câu 11. (Đề thi HSG 7 Huyện Vị Thanh 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y$; $4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

Lời giải

$$2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

Câu 12. (Đề thi HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

Cho các số $a, b, c \neq 0$; $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Lời giải

Nhân cả tử và mẫu của mỗi tỉ số với mẫu của chính nó rồi áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và tính được tỉ số bằng 0 từ đó:

$$bz - cx = cx - az = ay - bx = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 13. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 159 – 2016-2017)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

Nếu $a+b+c \neq 0$, Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+) Nếu $a+b+c=0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

Câu 14. (Đề thi HSG 7 THCS Hiền Quan 2018-2019)

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a+2b-3c=-20$

Lời giải

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2b}{6} = \frac{3c}{12} = \frac{a+2b-3c}{2+6-12} = \frac{-20}{-4} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=15 \\ c=20 \end{cases}$$

Câu 15. (Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lặc 2015-2016)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3-3=29$. Tính $x-2y+3z$

Lời giải

Ta có: $4x^3-3=29 \Leftrightarrow x=2$

Thay vào tỷ lệ thức ta được: $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$

$$\Rightarrow y=-7; z=1$$

$$\text{Vậy } x-2y+3z=2-2.(-7)+3.1=19$$

Câu 16. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x=0 \Rightarrow y=0, z=0 \Rightarrow 2y+4z=0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra :

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0) \text{ thì } \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}$$

$$\text{Suy ra : } x = 2k; y = 4k; z = 6k \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 28k \quad (3)$$

Thay $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$

$$\Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \text{ (ktm)} \\ k = \frac{1}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\text{Với } k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$

$$\text{Vậy } x = 1; y = 2; z = 3$$

Câu 17. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Tạo 2018-2019)

Tìm x, y, z biết : $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

$$\text{Từ } 2x = 3y; 4y = 5z; 8x = 12y = 15z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x-3y+5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$$

Câu 18. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Tạo 2018-2019)

$$\text{Cho } \frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}. \text{ Chứng minh : } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Câu 19. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Nông 2018-2019)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ đều có nghĩa)

a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ta có : $a = kb$; $c = kd$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{kb}{kb+b} = \frac{kb}{(k+1)b} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{kd}{kd+d} = \frac{kd}{(k+1)d} = \frac{k}{k+1}$$

Vậy $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{(kb+b)^2}{(kd+d)^2} = \frac{(k+1)^2 \cdot b^2}{(k+1)^2 \cdot d^2} = \frac{b^2}{d^2} \quad (1)$

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(kb)^2+b^2}{(kd)^2+d^2} = \frac{k^2b^2+b^2}{k^2d^2+d^2} = \frac{(k^2+1)b^2}{(k^2+1)d^2} = \frac{b^2}{d^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Câu 20. (Đề thi HSG 7 2018-2019)

Cho 3 số x, y, z là 3 số khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$

Hãy tính giá trị biểu thức : $B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z} \Rightarrow \frac{y+z}{x} - 1 = \frac{z+x}{y} - 1 = \frac{x+y}{z} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{z+x}{x}$$

$$= \frac{x+y}{z} \cdot \frac{z+x}{y} \cdot \frac{y+z}{x} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Vậy $B = 8$

Câu 21. (Đề thi HSG 7 THCS Trần Hưng Đạo 2018-2019)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a+c=2b$ và $c(b+d)=2bd$.

$$\text{Chứng minh } \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$$

Lời giải

$$\text{Từ } c(b+d)=2bd \Rightarrow b+d = \frac{2bd}{c}$$

$$\text{Viết } \frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$$

Câu 22. (Đề thi HSG 7 Huyện Nam Sách 2017-2018)

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ và } 4x^3-3=29. \text{ Tính } x-2y+3z$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4x^3-3=29 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Thay vào tỷ lệ thức ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

$$\Rightarrow y = -7; z = 1$$

$$\text{Vậy } x-2y+3z = 2 - 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 = 19$$

Câu 23. (Đề thi HSG 7 2018-2019)

$$\text{Cho } \frac{a}{c} = \frac{c}{b}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b}$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab \Rightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} = \frac{a}{b}$$

Câu 24. (Đề thi HSG 7 huyện Sơn Dương 2017-2018)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Câu 25. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên

$$a + b + c = 74$$

Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$$

$$\text{Suy ra } a = 20; b = 24; c = 30$$

Câu 26. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$

Lời giải

$$\text{Từ } 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x-y-z}{15-10-8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\Rightarrow x = -150; y = -100; z = -80$$

Câu 27. (Đề thi HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018-2019)

$$\text{a) Tìm } a, b, c \text{ biết } \frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11} \text{ và } a+b+c=48$$

b) Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6; 5; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11} = \frac{12a-15b+20c-12a+15b-20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{12a-15b}{7} = 0 &\Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c-12a}{9} = 0 &\Rightarrow 20c = 12a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

Và $a+b+c=48$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a+b+c}{12+15+20} = \frac{48}{5} = 24$$

$$\Rightarrow a=20, b=16, c=12$$

b) Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3)$, DK: $x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$, DK: $a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 28. (Đề thi HSG 7 trường PHÙ CÁT 2017-2018)

Tìm hai số khác 0, biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3, \frac{1}{3}, \frac{200}{3}$

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y .

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x+y+x-y}{3+\frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5} = k \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5k}{3} \quad (1); x+y = 3k \quad (2); xy = \frac{200k}{3} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow y = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3} \Rightarrow xy = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{200k}{3} = \frac{20k^2}{9} \Leftrightarrow k = 30 (k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50; y = \frac{4 \cdot 30}{3} = 40$$

Vậy hai số cần tìm là 50;40

Câu 29. (Đề thi HSG 7 huyện Đáp Cầu 2018-2019)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Câu 30. (Đề thi HSG 7 huyện Thái Thụy 2015-2016)

a) Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$.

Lời giải

a) TH1: Nếu $x=0$ thì $y=z=0 \Rightarrow x=y=z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$ (đpcm)

$$b) \text{ Từ } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$= \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0$$

$$\Rightarrow 20z=24y=30x$$

$$\Rightarrow 10z=12y=15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Giải ra và kết luận : $x=12; y=15; z=18$

Câu 31. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Từ $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

Suy ra

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{d} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} (*)$$

Nếu $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); b+c=-(a+d)$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ $(*) \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$

Câu 32. (Đề thi HSG 7 huyện Trục Ninh 2018-2019)

(3 điểm) Tìm 3 số a, b, c biết:

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \quad \text{và} \quad a+b+c=-50$$

Lời giải

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4} = \frac{15a-10b+6c-15a+10b-6c}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15a-10b=0 \\ 6c-15a=0 \\ 10b-6c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=2b \\ 2c=5a \\ 5b=3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \\ \frac{c}{5} = \frac{b}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow a = -10; b = -15; c = -25$

Câu 33. (Đề thi HSG 7 huyện Nhơn Trí 2018-2019)

Tìm số $\overline{xyz}$ biết $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$, và $x - y + z = 4$

Lời giải

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25} \text{ và } x, y, z \in \mathbb{N}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x - y + z}{2 - 3 + 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2; y = 3; z = 5. \text{ Vậy } \overline{xyz} = 235$$

Câu 34. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2018-2019)

1. Cho $c^2 = ab$. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Lời giải

$$a) \text{ Từ } c^2 = ab$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} = \frac{a^2 + ab}{ab + b^2} = \frac{a(a + b)}{b(a + b)} = \frac{a}{b}$$

$$b) \text{ Theo câu a ta có: } \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Câu 35. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2018-2019)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi các phân số phải tìm là : a, b, c , ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$

$$\text{Và } a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25 \Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

Câu 36. (Đề thi HSG 7 huyện Nhơn Trí 2018-2019)

a) Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

b) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

Theo đề bài ta có: $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z$ cùng dấu

Và $\frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$

Học sinh tính tương tự: $y = \pm 135; z = \pm 30$

Vậy $A = 237$ hoặc $A = -237$

b) Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2}$ (1)

Lại có: $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 37. (Đề thi HSG 7 trường Đặng Huy Hoàng 2018-2019)

a) Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$ ($b+d \neq 0$)

b) Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15; 60 và 8

Lời giải

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \left(\frac{c}{d}\right)^6 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^6 \Rightarrow \frac{a^6}{b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$

$\Rightarrow \frac{3a^6}{3b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \Rightarrow \frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$

b) Gọi hai số phải tìm là a, b ($a > b > 0$), theo đầu bài ta có:

$$15(a+b)=60(a-b)=8ab \text{ hay } \frac{a+b}{8} = \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15} = k \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

Câu 38. (Đề thi HSG 7 trường Thân Thiện 2018-2019)

Tìm các số x, y, z biết:

a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$

b) $3x = 2y; 7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y + z = 49$

Lời giải

a) $x = 20; y = 12; z = 42$

b) $x = 20; y = 30; z = 42$

c) $x = 18; y = 16; z = 15$

Câu 39. (Đề thi HSG 7 THCS Hồng Liên 2018-2019)

Cho a, b, c là ba số thực dương, thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}. \text{ Hãy tính giá trị của biểu thức: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương nên $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

Mà $\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = 8$

Câu 40. (Đề thi HSG 7 THCS Hồng Liên 2018-2019)

a) Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

b) Cho $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$ và $5a-3b-4c=46$. Xác định a, b, c

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$$

$$\text{b) } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5(a-1)}{10} = \frac{-3(b+3)}{-12} = \frac{-4(c-5)}{-24} = \frac{5a-3b-4c-5-9+20}{10-12-24} = -2$$

$$\Rightarrow a = -3, b = -11, c = -7$$

Câu 41. (Đề thi HSG 7 THCS Phương Trung 2018-2019)

Cho $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$ và $5a-3b-4c=46$, xác định a, b, c

Lời giải

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5(a-1)}{10} = \frac{-3(b+3)}{-12} = \frac{-4(c-5)}{-24} = \frac{5a-3b-4c-5-9+20}{10-12-24} = -2$$

$$\Rightarrow a = -3; b = -11; c = -7$$

Câu 42. (Đề thi HSG 7 THCS Nguyễn Trục 2017-2018)

Cho a, b, c đôi một khác nhau và $\neq 0$. Biết $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm $\overline{abc}$

Lời giải

Từ gt hoán vị trung tỉ và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Do $\overline{ab}$ là 1 số nguyên tố có hai chữ số nên $b \in \{1; 3; 7; 9\}$

Do $ac = b^2$ ta xét các trường hợp

$$b=1 \Rightarrow a=c=1 (\text{loại do } a \neq c)$$

$$b=3 \Rightarrow ac=9=1.9 (\text{do } a \neq c) \Rightarrow \overline{ab}=13 (\text{do } 93 \text{ không là nguyên tố})$$

$$\text{Có } \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{b}{c} (tm)$$

$$b=7, b=9 \text{ đều bị loại do dẫn đến } a=c$$

$$\text{Vậy } \overline{abc}=139$$

Câu 43. (Đề thi HSG 7 THCS Hoàng Quyên 2018-2019)

Cho ba số dương $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Chứng minh: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$

Lời giải

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0; y-1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy+1 \geq x+y \Rightarrow \frac{1}{xy+1} \leq \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{xy+1} \leq \frac{z}{x+y}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} \leq \frac{x}{y+z}; \frac{y}{xz+1} \leq \frac{y}{x+z}$ (3)

Cộng từng vế (1) (2) (3) ta có:

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

Mà $\frac{x}{y+z} \leq \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{2x}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y}{x+z} \leq \frac{2y}{x+y+z}; \frac{z}{x+y} \leq \frac{2z}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \leq 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra đpcm.

Câu 44. (Đề thi HSG 7 huyện Thường Tín 2018-2019)

a. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c=2019$. Tính a, b, c

b. Chứng minh rằng: Từ tỷ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \neq 1$ ta có tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Lời giải

a. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{2019}{2019} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b, \text{ tương tự } b = c$$

Suy ra $a = b = c = \frac{2019}{3} = 673$

b. $\frac{a+b}{a-b} \neq 1 \Rightarrow b \neq 0; \frac{c+d}{c-d} \neq 1 \Rightarrow d \neq 0$

Vì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (a-b)(c+d) \Rightarrow 2bc = 2ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} (b, d \neq 0)$

Câu 45. (Đề thi HSG 7 THCS Lê Hồng Phong 2018-2019)

Biết rằng: $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh: $x:y:z = a:b:c$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{bz-cy}{a} &= \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcz}{c^2} \\ &= \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b}; \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow x:y:z = a:b:c$$

Câu 46. (Đề thi HSG 7 huyện Cù Chính Lan 2018-2019)

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20;4;5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1;3;7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

Theo bài ra ta có: $a + b + c = 5\frac{25}{63}$

$$a:b:c = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{20} = \frac{1}{12} = \frac{1}{35} = 21:35:12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Câu 47. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Cho $a; b; c > 0$ và dãy tỉ số: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$

Tính $P = \frac{(3a-2b)(3b-2c)(3c-2a)}{(3a-c)(3b-a)(3c-b)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c} = \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = \frac{b+3c}{a+b} = \frac{a+3b}{a+c} = \frac{c+3a}{b+c} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+3c=2a+2b \\ a+3b=2a+2b \\ c+3a=2b+2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=3c-b \\ 2c=3b-a \\ 2b=3a-c \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow P = \frac{1}{8}$$

Câu 48. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Tìm $x; y; z$ biết: $12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

Lời giải

$12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

$$12x = 15y = 20z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\Rightarrow x = 20; y = 16; z = 12$$

Câu 49. (Đề thi HSG 7 huyện Hậu Lộc 2013-2014)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

Lời giải

$$\text{Từ: } 2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

Câu 50. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2013-2014)

Tìm 3 số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5}$ và $x + y + z = -110$.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{6+14+35} = \frac{-110}{55} = -2$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \begin{cases} x = -2.6 = -12 \\ y = -2.14 = -28 \\ z = -2.35 = -70 \end{cases}$$

Vậy: $x = -12; y = -28; z = -70$.

Câu 51. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2015 - 2016)

Tìm $x; y; z$ biết: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9}$ và $x - 3y + 4z = 62$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{y}{3} = \frac{-3y}{-9}; \frac{z}{9} = \frac{4z}{36} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{-3y}{-9} = \frac{4z}{36}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{-3y}{-9} = \frac{4z}{36} = \frac{y - 3z + 4y}{4 - 9 + 36} = \frac{62}{31} = 2$$

$$\Rightarrow x = 8; y = 6; z = 18.$$

Câu 52. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

Tìm $x; y; z$ biết rằng: $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = x + y + z$. Với $y \neq z; z \neq x; x \neq y$

Lời giải

$$*) x + y + z = 0 \Rightarrow \frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 (KTM)$$

$$*) x + y + z \neq 0. \text{ Ta có: } \frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x + y + z = \frac{1}{2} \Rightarrow y + z = \frac{1}{2} - x; \quad x + z = \frac{1}{2} - y; \quad y + x = \frac{1}{2} - z$$

$$\text{Với } \frac{x}{y+z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2} - x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Tương tự ta được } x = y = z = \frac{1}{6}$$

Câu 53. (Đề thi HSG 7 cấp trường)

a) Tìm 3 số $a; b; c$ biết: $\frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-3}{4}$ và $a - 2b + 3c = 14$.

b) Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính $P = \frac{a+b}{2c} + \frac{b+c}{3a} + \frac{c+a}{4b}$

Giải:

$$a) \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-3}{4} = \frac{a-1}{2} = \frac{2b-4}{6} = \frac{3c-9}{12} = \frac{a-1-2b+4+3c-9}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 5; c = 7.$$

$$b) \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b}$$

Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$.

$$\Rightarrow P = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{-1}{4} = \frac{-13}{12}$$

Nếu $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a+b=b+c=c+a \Rightarrow a=b=c$.

$$\Rightarrow P = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{13}{6}$$

Câu 54. (Đề thi HSG 7 cấp huyện)

Tìm các số $x; y; z$ biết rằng: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y+z+1}{x} &= \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} \\ &= \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \end{aligned}$$

(Vì $x+y+z \neq 0$). Do đó $x+y+z = 0,5$. Thay kết quả này vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \text{ tức là } \frac{1,5-x}{x} = \frac{2,5-y}{y} = \frac{-2,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Câu 55. (Đề thi HSG 7 huyện Tĩnh Gia)

1) Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3-3=29$. Tính $x+2y+3z$

Lời giải

Ta có: $4x^3-3=29 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$.

$$\text{Suy ra: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$

$$+) \frac{y-25}{-16} = 2 \Rightarrow y = -7$$

$$+) \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow z = 1$$

Vậy: $x+2y+3z = 2+2.(-7)+3.1$.

Câu 56. (Đề thi HSG 7 huyện)

a) Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

b) Tính giá trị biểu thức Q, biết $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{a+d}{b+c}$

Lời giải

a) + Biến đổi:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

b) + Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì $a=b=c=d \Rightarrow Q=1+1+1+1=4$.

+ Nếu $a+b+c+d=0$

thì $a+b=-(c+d)$; $c+b=-(a+d)$; $a+d=-(c+b)$; $c+d=-(a+b)$

$$\Rightarrow Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

Vậy $Q=4$ khi $a+b+c+d \neq 0$.

$$Q = -4 \text{ khi } a+b+c+d=0$$

Câu 57. (Đề thi HSG 7 huyện)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

a) Nếu

$$a+b+c \neq 0 \Rightarrow \frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = 1 \Rightarrow a+b=2c; b+c=2a; c+a=2b$$

$$\text{Mà: } \frac{a+b}{c} - 1 = \frac{b+c}{a} - 1 = \frac{c+a}{b} - 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \Rightarrow B=8$$

Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$

$$\frac{a+b}{c} - 1 = \frac{b+c}{a} - 1 = \frac{c+a}{b} - 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow B=-1$$

Câu 58. (Đề thi HSG 6 huyện Quế Sơn)

Thực hiện tính:

$$A = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ với: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \text{ và } a+b+c \neq 0.$$

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Từ $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$; Tương tự được $a = c$

$$\text{Thay } a = b, a = c \text{ được: } A = \frac{(a+a+a)^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{9a^2}{3a^2} = 3$$

Câu 59. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Chứng minh rằng nếu có dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2010}}{a_{2011}}$

$$\text{thì } \frac{a_1}{a_{2011}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010}$$

Lời giải

$$\text{*Cách 1: Đặt } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2010}}{a_{2011}} = k \Rightarrow k^{2010} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \dots \frac{a_{2010}}{a_{2011}} = \frac{a_1}{a_{2011}} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2010}}{a_{2011}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \Rightarrow k^{2010} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a_1}{a_{2011}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010}.$$

$$\text{*Cách 2: Đặt } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2010}}{a_{2011}} = k$$

$$\Rightarrow a_1 = ka_2, a_2 = ka_3, \dots, a_{2010} = ka_{2011} \Rightarrow a_1 = k^{2010} a_{2011} \Rightarrow k^{2010} = \frac{a_1}{a_{2011}}$$

Mặt khác,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010} = \left(\frac{ka_2 + ka_3 + \dots + ka_{2011}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010} = \left[\frac{k(a_2 + a_3 + \dots + a_{2011})}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right]^{2010} = k^{2010}$$

$$\text{Vậy } \frac{a_1}{a_{2011}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2011}} \right)^{2010}.$$

Câu 60. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho a, b, c, d khác 0 thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{2c} = \frac{a+b+c+2d}{d}.$$

Hãy tính : $P = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (1)$$

– Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì từ (1) suy ra $a = b = c = d$.

Do đó : $P = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$;

– Nếu $a + b + c + d = 0 \Rightarrow (a + b) = -(c + d)$ và $(b + c) = -(a + d)$

Do đó : $P = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$.

Câu 61. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho 3 số x ; y ; z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \text{ và } 3x-2y+5z=96.$$

Tìm x ; y ; z .

Lời giải

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z - 24y = 30x - 20z = 24y - 30x = 0 \Rightarrow 20z = 24y = 30x$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Giải ra và kết luận: $x = 12$; $y = 15$ và $z = 18$

Câu 62. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2016-2017)

$$\text{Tính } A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}$$

$$A = \frac{3}{5} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1.$$

$$A = \frac{5}{5} = 1. \text{ Vậy } A = 1$$

Câu 63. (Đề thi HSG 7 - Thành phố Sầm Sơn - 2017 -2018)

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 144 HS, Biết $\frac{3}{4}$ HS lớp 7A bằng $\frac{6}{7}$ HS lớp 7B và bằng $\frac{2}{3}$ HS lớp 7C. Tính số HS mỗi lớp.

Lời giải

Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a,b,c (đk a,b,c ∈ N*, a,b,c <144)

Vì : $\frac{3}{4}$ HS lớp 7A bằng $\frac{6}{7}$ HS lớp 7B và bằng $\frac{2}{3}$ HS lớp 7C nên ta có:

$$\frac{3}{4}.a = \frac{6}{7}.b = \frac{2}{3}.c \Leftrightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} \text{ và theo đề bài ta có : } a + b + c = 144$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = \frac{a+b+c}{8+7+9} = \frac{144}{24} = 6$$

$$a = 48; b = 42; c = 54 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy số HS lớp 7A , 7B, 7C lần lượt là 48, 42, 54 học sinh.

Câu 64. (Đề thi HSG 7 - Thành phố SẦM SƠN - 2018-2019)

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 144 HS, Biết $\frac{3}{4}$ HS lớp 7A bằng $\frac{6}{7}$ HS lớp 7B và bằng $\frac{2}{3}$ HS lớp 7C. Tính số HS mỗi lớp.

Lời giải

Gọi số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a,b,c (đk a,b,c ∈ N*, a,b,c <144)

Vì : $\frac{3}{4}$ HS lớp 7A bằng $\frac{6}{7}$ HS lớp 7B và bằng $\frac{2}{3}$ HS lớp 7C nên ta có:

$$\frac{3}{4}.a = \frac{6}{7}.b = \frac{2}{3}.c \Leftrightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} \text{ và theo đề bài ta có } a + b + c = 144$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9} = \frac{a+b+c}{8+7+9} = \frac{144}{24} = 6$$

$$\Rightarrow a = 48; b = 42; c = 54 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy số HS lớp 7A , 7B, 7C lần lượt là 48, 42, 54 học sinh.

Câu 65. (Đề thi HSG 7 - Huyện Thạch Thành - 2014 - 2015)

a) Tìm ba số x, y, z , biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = -49$

b) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$ và $x - y + z = -49$

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x-y+z}{10-15+12} = \frac{-49}{7} = -7 \Rightarrow \begin{cases} x = -70 \\ y = -105 \\ z = -84 \end{cases}$$

Vậy $x = -70; y = -105; z = -84$.

b. $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

b. $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

$$= \frac{y+z+1+x+z+2+x+y-3}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0,5$$

Nên ta có: $\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$

Do đó: $x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$

Câu 66. (Đề thi HSG 7 huyện Thạch Bàn 2016 -2017)

Tìm các số x, y, z , biết : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

Câu 67. (Đề thi HSG 7 - THIỆU HÓA - 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x + y + z = 18$.

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

Suy ra: $\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$

Do đó: $\frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$

$\frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2$. Suy ra: $x = 4; y = 6; z = 8$.

Câu 68. (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2019-2020)

Biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$; $x - 2y + 3z = 51$. Tính giá trị của $A = \sqrt{2x - y + z + 1}$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{21}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau có $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{21} = \frac{x-2y+3z}{2-6+21} = \frac{51}{17} = 3$

$\Rightarrow x = 6; y = 9; z = 21$.

$\Rightarrow A = \sqrt{2x - y + z + 1} = \sqrt{25} = 5$.

Câu 69. (Đề thi HSG 7 huyện QUỲNH PHỤ 2019-2020)

Tìm các số x, y, z, biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

Câu 70. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ NHƯ' 2019-2020)

Tìm ba số x, y, z biết rằng $2x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $x + y - \frac{z}{2} = -20$

Lời giải

Từ $x + y - \frac{z}{2} = -20$ suy ra $2x + 2y - z = -40$

Từ $2x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ suy ra $2x = \frac{2y}{6} = \frac{z}{5}$

Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta có: $2x = \frac{2y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{2x - 2y - z}{1+6-5} = -20$.

Khi đó $x = -10, y = -60, z = -100$.

Câu 71. (Đề thi HSG 7 huyện ĐÔNG HƯNG 2005 - 2006)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3|x|+5}{3} = \frac{3|y|-1}{5} = \frac{3-z}{7}$ (1) và $2|x| + 7|y| + 3z = -14$ (2)

Lời giải

Đặt $\frac{3|x|+5}{3} = \frac{3|y|-1}{5} = \frac{3-z}{7} = k$

Suy ra $|x| = \frac{3k-5}{3}; |y| = \frac{5k+1}{3}; z = 3-7k$

Thay vào (2) ta có: $2 \cdot \frac{3k-5}{3} + 7 \cdot \frac{5k+1}{3} + 3(3-7k) = -14$

$\Rightarrow 6k - 10 + 35k + 7 + 27 - 63k = -42 \Rightarrow -22k = -66 \Rightarrow k = 3$

Suy ra $|x| = \frac{3 \cdot 3 - 5}{3} = \frac{4}{3}$

Vậy $x = \pm \frac{4}{3}$.

Tương tự ta thấy : $y = \pm \frac{16}{3}; z = -18$

vậy có 4 bộ số $x; y; z$ thỏa mãn bài toán là:

$$x = \frac{4}{3}; y = \frac{16}{3}; z = -18. \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}; y = \frac{16}{3}; z = -18.$$

$$\text{hoặc } x = \frac{4}{3}; y = -\frac{16}{3}; z = -18. \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}; y = -\frac{16}{3}; z = -18..$$

Câu 72. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2019 - 2020)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, $\frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Lời giải

Từ giả thiết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (*)

Ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$

Do đó: $\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

KL: $x = 27, y = 36, z = 60$

Câu 73. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -5)

Cho a, b, c là ba số thực dương, thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}. \text{ Hãy tính giá trị của biểu thức } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương nên $a + b + c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Câu 74. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 5)

$$\text{Cho: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}. \text{ Chứng minh: } \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}.$$

$$2) \text{ Cho } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} \text{ và } 5a-3b-4c=46. \text{ xác định } a, b, c$$

Lời giải

$$1) \text{ Áp dụng t/c dãy tỉ số bằng nhau: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} \cdot \frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$$

$$2) \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5(a-1)}{10} = \frac{-3(b+3)}{-12} = \frac{-4(c-5)}{-24} = \frac{5a-3b-4c-5-9+20}{10-12-24} = -2$$

$$\Rightarrow a = -3; b = -11; c = -7.$$

Câu 75. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 6)

$$\text{Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}; (b+d \neq 0)$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \left(\frac{c}{d}\right)^6 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^6 \Rightarrow \frac{a^6}{b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$$

$$\Rightarrow \frac{3a^6}{3b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \Rightarrow \frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$$

Câu 76. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 8)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

Nếu $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); (b+c)=-(a+d)$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

Nếu $a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$

Câu 77. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 9)

Cho a, b, c, d là 4 số khác 0, thỏa mãn điều kiện: $b^2 = ac; c^2 = bd; b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ giả thiết: $b^2 = ac; c^2 = bd \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Ta có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (1)$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (2)$

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Câu 78. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Bảo 2017-2018)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương nên $a + b + c \neq 0$

Nên theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Mà: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Vậy: $B = 8$

Câu 79. (Đề HSG Toán 7_huyện_Nga Sơn_2016-2017).

Cho ba số $x < y < z$ thỏa mãn $x + y + z = 51$. Biết rằng 3 tổng của 2 trong 3 số đã cho tỉ lệ với 9,12,13. Tìm x, y, z .

Lời giải

Theo đề bài $x < y < z \Rightarrow x + y < x + z < y + z$

Do 3 tổng của 2 trong ba số tỉ lệ với 9,12,13 mà $9 < 12 < 13$ với $x < y < z$ thì chỉ có $x + y < x + z < y + z$

Từ đó suy ra $(x + y) : (x + z) : (y + z) = 9 : 12 : 13$

Hay $\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13}$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13} = \frac{x+y+x+z+y+z}{9+12+13} = \frac{2(x+y+z)}{34} = \frac{2 \cdot 51}{34} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{9} = 3 \\ \frac{x+z}{12} = 3 \\ \frac{y+z}{13} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=27 \\ x+z=36 \\ y+z=39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=15 \\ z=24 \end{cases}$$

Vậy $x=12; y=15; z=24$.

Câu 80. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 20.. -20...)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} = \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2);$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Câu 81. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2018 -2019)

Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính giá trị biểu

thức $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{6}{2(a+b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$$

Từ đó ta có: $\frac{3}{a+b} = \frac{3}{a+b+c}$ suy ra $a+b = a+b+c \Rightarrow c = 0$

Do đó: $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

Câu 82. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Chương 20.. -20..)

a) Tìm $x; y; z$ biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

b) Cho $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$ Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

a) Từ: $2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x-3y+5z}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

$$b) \frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abz-3acy}{a^2} = \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2} = \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz-3cy=0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx-az=0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2);$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Câu 83. (Đề thi HSG 7 thị xã Chí Linh 20.. -20..)

Tìm x, y, z biết:

$$a) xy = -2; yz = -3; zx = 54.$$

$$b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ và } x-2y+3z = -10.$$

$$c) \text{Cho: } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức } A = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a}.$$

Lời giải

$$a) xy = -2(1); yz = -3(2); zx = 54(3)$$

$$\text{Nhân vế với vế của (1); (2); (3) ta được: } (xyz)^2 = 18^2 \Rightarrow xyz = \pm 18$$

$$+ \text{ Với } xyz = 18 (*)$$

$$\text{Thay (1); (2); (3) vào (*)} \Rightarrow x = -6; y = \frac{1}{3}; z = -9.$$

$$+ \text{ Với } xyz = -18 (**)$$

$$\text{Thay (1); (2); (3) vào (**)} \Rightarrow x = 6; y = -\frac{1}{3}; z = 9$$

$$\text{Vậy } x = \mp 6; y = \pm \frac{1}{3}; z = \mp 9$$

b) Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = k \Rightarrow x = 2k+1; y = 3k+2; z = 4k+3$

Thay vào $x - 2y + 3z = -10$ ta được:

$$2k+1-2(3k+2)+3(4k+3)=-10$$

$$\Rightarrow 8k = -16 \Rightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow x = -3; y = -4; z = -5$$

c) Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}.$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}; \frac{a+b}{c} = 2; \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3.$$

+ Nếu $a+b+c = 0$

$$\Rightarrow a+b = -c; b+c = -a; c+a = -b \Rightarrow A = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = -3.$$

Vậy: + Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $A = 3$;

+ Nếu $a+b+c = 0$ thì $A = -3$;

Câu 84. (Đề thi HSG 7 huyện Yên Lập 2014 -2015)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$. Hãy tính giá

trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

+ Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Nên } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = 8$$

$$+ \text{Nếu } a+b+c=0$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Nên } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = 1$$

Câu 85. (Đề thi HSG 7 huyện KRÔNG ANA năm 2013)

a) Cho $\frac{x}{y} = -2013$, chứng tỏ rằng: $\frac{x+y}{x-y} < 1 < \frac{x-y}{x+y}$ với $y \neq 0$ và $x \neq \pm y$.

b) Tìm các số hữu tỉ x để $A = \frac{x^2+3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có $\frac{x}{y} = -2013 \Rightarrow x = -2013y$

$$\text{Thay vào } \frac{x-y}{x+y} \text{ ta được } \frac{-2013y-y}{-2013y+y} = \frac{-2014y}{-2012y} = \frac{1007}{1006} > 1 \quad (1)$$

$$\text{Thay vào } \frac{x+y}{x-y} \text{ ta được } \frac{-2013y+y}{-2013y-y} = \frac{-2012y}{-2014y} = \frac{1006}{1007} < 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x+y}{x-y} < 1 < \frac{x-y}{x+y}$ với $y \neq 0$ và $x \neq \pm y$

$$\text{b)Ta có : } A = \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2}{x^2+1} = 1 + \frac{2}{x^2+1}$$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1}$ có giá trị nguyên

$$\text{Đặt } \frac{2}{x^2+1} = t \quad (t \in \mathbb{Z}) . \text{ Khi đó } x^2 = \frac{2-t}{t}$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{2-t}{t} \geq 0 \Rightarrow 0 < t \leq 2$$

$$\text{Khi } t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{Khi } t = 2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{Vậy: } x \in \{-1; 0; 1\}$$

Câu 86. (Đề thi HSG 7 huyện KINH MÔN 2020)

1) Cho các số dương a, b, c, d ; $c \neq d$ và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\text{CMR: } \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

2) Cho biết $|3x - 2y| + |5z - 7x| + (xy + yz + xz - 500)^{2018} = 0$.

Tính giá trị biểu thức $A = (3x - y - z)^{2019}$

Lời giải

a) Vì a, b, c, d là các số dương và $c \neq d$, mà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a^{2018}}{c^{2018}} = \frac{b^{2018}}{d^{2018}} = \frac{a^{2018} + b^{2018}}{c^{2018} + d^{2018}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2018}}{c^{2018}} \right)^{2019} = \left(\frac{a^{2018} + b^{2018}}{c^{2018} + d^{2018}} \right)^{2019}$$

$$\text{hay } \frac{a^{2018 \cdot 2019}}{c^{2018 \cdot 2019}} = \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2019}}{c^{2019}} = \frac{b^{2019}}{d^{2019}} = \frac{a^{2019} - b^{2019}}{c^{2019} - d^{2019}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2019}}{c^{2019}} \right)^{2018} = \left(\frac{a^{2019} - b^{2019}}{c^{2019} - d^{2019}} \right)^{2018}$$

$$\text{hay } \frac{a^{2019 \cdot 2018}}{c^{2019 \cdot 2018}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

$$\text{Vậy } \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

b) Vì $|3x - 2y| \geq 0$ với $\forall x, y$; $|5z - 7x| \geq 0$ với mọi y, z ;

$$(xy + yz + xz - 500)^{2018} \geq 0 \forall x, y, z$$

Do đó $|3x - 2y| + |5z - 7x| + (xy + yz + xz - 500)^{2018} = 0$ khi

$$\begin{cases} |3x - 2y| = 0 \\ |5z - 7x| = 0 \\ (xy + yz + xz - 500)^{2018} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5z - 7x = 0 \\ xy + yz + xz - 500 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{z}{7} = \frac{x}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{z}{14} = \frac{x}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{14}$$

Đặt $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{14} = k = k \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = 10k; y = 15k; z = 14k$

Ta có $xy + yz + xz - 500 = 0 \Leftrightarrow 150k^2 + 210k^2 + 140k^2 = 500$

$$\Rightarrow k = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \\ z = 14 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -10 \\ y = -15 \\ z = -14 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \\ z = 14 \end{cases}$ thì $A = 1$

+ với $\begin{cases} x = -10 \\ y = -15 \\ z = -14 \end{cases}$ thì $A = -1$

Vậy $A = 1$ hoặc $A = -1$

Câu 87. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2018)

a) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương nên $a + b + c \neq 0$

Nên theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Mà: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Vậy: $B = 8$

Câu 88. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI 2018)

Tìm các số x, y thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $4x = 5y$ và $x^2 - y^2 = 1$

Lời giải

$$\text{Từ } 4x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{y}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: } \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 16} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

$$*) \text{ Với } x = \frac{5}{3} \Rightarrow 4 \cdot \frac{5}{3} = 5y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$*) \text{ Với } x = -\frac{5}{3} \Rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 5y \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

Câu 89. (Đề thi HSG 7 huyện KON TUM, 2017 – 2018)

. Tìm các số x, y, z , biết:

$$a) \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \text{ và } x + y + z = 92.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

Câu 90. (Đề thi HSG 7 huyện NGA SƠN, 2011 - 2012)

Cho 3 số $x < y < z$ thỏa mãn: $x + y + z = 51$. Biết rằng 3 tổng của 2 trong 3 số đã cho tỉ với 9, 12, 13. Tìm x, y, z .

Lời giải

Theo đề bài $x < y < z$ Suy ra: $x+y < x+z < y+z$.

Do 3 tổng của 2 trong ba số tỉ lệ với 9, 12, 13 mà: $9 < 12 < 13$ với

$x < y < z$ thì chỉ có $x+y < x+z < y+z$.

Từ đó suy ra: $(x+y):(x+z):(y+z) = 9:12:13$

Hay: $\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13}$. áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13} = \frac{x+y+x+z+y+z}{9+12+13} = \frac{2(x+y+z)}{34} = \frac{2 \cdot 51}{34} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{9} = 3; \frac{x+z}{12} = 3; \frac{y+z}{13} = 3$$

$$\Rightarrow x+y = 27; x+z = 36; y+z = 39$$

$$\Rightarrow z = 51 - 27 = 24; y = 51 - 36 = 15; x = 51 - 39 = 12$$

Vậy $x = 12; y = 15$ và $z = 24$

Câu 91. (Đề thi HSG 7 huyện NGA SON, 2017 - 2018)

1. Chứng minh rằng không có số tự nhiên n nào để $n^2 + 2018$ là số chính phương

2. Biết x, y là các số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2018}{2017}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x

3. Tìm ba phân số có tổng bằng $\frac{639}{70}$, biết các tử số tỉ lệ theo 3:4:5 và các mẫu số tương ứng tỉ lệ theo 5:1:2

Lời giải

1. Ta có $n^2 + 2018 = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$

suy ra $m^2 - n^2 = 2018$ suy ra m và n cùng tính chẵn lẻ

*Nếu n, m cùng chẵn thì m^2 và n^2 cùng chia hết cho 4 suy ra $m^2 - n^2$ chia hết cho 4 mà 2018 không chia hết cho 4 (vô lí)

*Nếu n, m cùng lẻ thì m^2 và n^2 chia cho 4 dư 1

Suy ra $m^2 - n^2$ chia hết cho 4 mà 2018 không chia hết cho 4 (vô lí)

Vậy không có số tự nhiên n nào để $n^2 + 2018$ là số chính phương

2. Ta có

$$\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2018}{2017} \Rightarrow \frac{x+y+y}{x+y} = \frac{2018}{2017} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2017}$$
$$\Rightarrow x = 2016y$$

Mà $y \geq 1 \Rightarrow x \geq 2016$

Vậy giá trị nhỏ nhất $x = 2016$ khi $y = 1$

Gọi 3 phân số cần tìm lần lượt là $x = \frac{a}{a_1}$, $y = \frac{b}{b_1}$, $z = \frac{c}{c_1}$

Đk $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, c_1 \neq 0$

Ta có $a:b:c=3:4:5$ hay $a=3k, b=4k, c=5k$ ($k \neq 0$)

$a_1:b_1:c_1 = 5:1:2$ hay $a_1 = 5h, b_1 = h, c_1 = 2h$ ($h \neq 0$)

Suy ra $x:y:z = \frac{3k}{5h} : \frac{4k}{h} : \frac{5k}{2h} = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6:40:25$

Suy ra $\frac{x}{6} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{71} = \frac{9}{70}$

Vậy $x = \frac{27}{35}, y = \frac{36}{7}, z = \frac{45}{14}$

Câu 92. (Đề thi HSG 7 huyện NGA SƠN, 2017 – 2018)

Tìm các số x, y, z biết $x-y+z = -46$ và $4x=3y, 7y=5z$

Lời giải

Theo đề câu suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{z}{7} = \frac{y}{5}$

suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{x-y+z}{15-20+28} = -2$

Suy ra $x=-30, y=-40, z=-50$

Vậy $x=-30, y=-40, z=-50$

Câu 93. (Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẶC, 2015-2016)

cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $x - 2y + 3z$

Lời giải

cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $x + 2y + 3z$

vì $4x^3 - 3 = 29$. nên $4x^3 = 32$ hay $x = 2$

thay vào dãy tỉ số trên ta có $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$

từ đó tìm được $y = -7$; $z = 1$ vậy $x - 2y + 3z = 2 - 2.(-7) + 3 = 19$

Câu 94. (Đề thi HSG 7 huyện NHƯ XUÂN, 2015 – 2016)

Số M chia được thành 3 số tỉ lệ với: $0,5$; $1\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{4}$ Tìm số M biết tổng bình phương của ba số đó bằng 4660

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0,5 : 1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 20 : 27$$

Giả sử M được chia thành các số x, y, z, theo câu ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Rightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12$$

$$y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40$$

$$z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Mà x, y, z cùng dấu

$$\text{Nên } M = 12 + 40 + 54 = 106 \text{ hoặc: } M = -12 + (-40) + (-54) = -106$$

Câu 95. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH LỘC)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

b) Cho dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức M, với } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Lời giải

$$\text{a) vì } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Suy ra $x = 27$; $y = 36$; $z = 60$.

b) Từ giả thiết suy ra

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

* Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $a + b = -(c + d)$; $b + c = -(d + a)$;

$c + d = -(a + b)$; $d + a = -(b + c)$

Khi đó $M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$

* Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ nên $a = b = c = d$

Khi đó $M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Câu 96. (Đề thi HSG 7 TX CHÍ LINH 2016-2017)

a) Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính : $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

b) Hãy chia số 26 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 2; 3; 4.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)}$

+ Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$; $b + c = -a$; $a + c = -b$

Khi đó $P = (-1) + (-1) + (-1) = -3$

+ Nếu $a + b + c \neq 0$ thì ta có $b + c = 2a$; $c + a = 2b$; $a + b = 2c$

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$

Vậy : $P = -3$ hoặc $P = 6$.

b) Giả sử số 26 được chia thành ba phần x, y, z .

Theo bài ra ta có : $2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{26}{13} = 2$

$\Rightarrow x = 12, y = 8, z = 6$.

Câu 97. (Đề thi HSG 7 huyện THANH CHƯỜNG)

Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$; $5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$.

Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14}$ (1); $5x = 7z \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$

Tìm được: $x = 84$; $y = 56$; $z = 60$

b) Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k \Rightarrow 7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7}$ (1)

Tương tự: $7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 98. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THUY 2015-2016)

a) Cho x, y, z thỏa mãn: $x^2 = yz$, $y^2 = xz$, $z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

b) Tìm x, y, z biết:

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \text{ và } 3x-2y+5z=96.$$

Lời giải

a) TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0$ suy ra $x = y = z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz$, $y^2 = xz$, $z^2 = xy \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$ (đpcm)

b) Từ $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$= \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z - 24y = 30x - 20z = 24y - 30x = 0$$

$$\Rightarrow 20z = 24y = 30x$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Giải ra và kết luận : $x = 12$; $y = 15$ và $z = 18$

Câu 99. (Đề thi HSG 7 Trường ĐỨC THẮNG)

a. Tìm x, y biết: $\frac{x+4}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 22$

b. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

$$a) \Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

$$b) \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

Câu 100.(Đề thi HSG 7 huyện YÊN LẠC)

Cho 4 số $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0$ thỏa mãn $a_2^2 = a_1 a_3$; $a_3^2 = a_2 a_4$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$

Lời giải

Theo bài ra $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0$ thỏa mãn $a_2^2 = a_1 a_3$; $a_3^2 = a_2 a_4$.

$$\text{Ta có: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4} \quad (1)$$

áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$$

Câu 101.(Đề thi HSG 7 huyện Ý Yên 2015-2016)

Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lời giải

Với $a, b, c \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} &= \frac{bza - cya}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2} \\ &= \frac{bza - cya + bcx - baz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{bz - cy}{a} = 0$, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$$\frac{cx - az}{b} = 0, \text{ do đó } cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Câu 102.(Đề thi HSG 7 huyện PHÚ THIÊN 2009-2010)

a) Tìm x, y, z biết: $\frac{2x - y}{5} = \frac{3y - 2z}{15}$ và $x + z = 2y$.

b) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)$.

Lời giải

a) Từ $x + z = 2y$ ta có: $x - 2y + z = 0$ hay $2x - 4y + 2z = 0$

hay $2x - y - 3y + 2z = 0$ hay $2x - y = 3y - 2z$

Vậy nếu: $\frac{2x - y}{5} = \frac{3y - 2z}{15}$ thì: $2x - y = 3y - 2z = 0$ (vì $5 \neq 15$).

Từ $2x - y = 0$ suy ra: $x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y - 2z = 0$ và $x + z = 2y \Rightarrow x + z + y - 2z = 0$ hay $\frac{1}{2}y + y - z = 0$

hay $\frac{3}{2}y - z = 0$ hay $y = \frac{2}{3}z$. suy ra: $x = \frac{1}{3}z$.

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\{x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; \text{ với } z \in \mathbb{R}\}$

hoặc $\{x = \frac{1}{2}y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}; y = 2x; z = 3x\}$

b)Ta có:(a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)

$$ab + ad + 2cb + 2cd = ab + 2ad + cb + 2cd$$

cb = ad suy ra: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Câu 103.(Đề thi HSG 7 huyện VŨ THŨ 2015-2016)

Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$

Tính giá trị biểu thức: $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Lời giải

$$P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+b}{c} \cdot \frac{c+a}{b} \quad \text{với } a, b, c \neq 0$$

Khi $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases} \Rightarrow P = \frac{-a}{a} \cdot \frac{-c}{c} \cdot \frac{-b}{b} = -1$

Khi $a+b+c \neq 0$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2(c+a+b)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{2b} = \frac{c+b}{2a} = \frac{a+b}{2c} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{c+b}{a} = \frac{a+b}{c} = 2$$

$$\Rightarrow P = 8$$

Với $a, b, c \neq 0$ thì $P = -1$ khi $a+b+c=0$; $P = 8$ khi $a+b+c \neq 0$

Câu 104.(Đề thi HSG 7 huyện SƠN DƯƠNG 2015-2016-T21-VĨNH BẢO 2017-2018)

a) Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$ và $a+b+c \neq 0$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

b)Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$.

Lời giải

a)+Vì $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

mà $\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

$$\text{b) Từ } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96$$

Giải ra ta được $x = 12$; $y = 15$; $z = 18$

Câu 105. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

$$\text{Cho } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

Chứng minh rằng biểu thức $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} \Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

Nếu $x + y + z + t = 0$ thì $P = -4$

Nếu $x + y + z + t \neq 0$ thì $x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

Vậy P nguyên

Câu 106. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIỄN)

Tìm x, y, z biết: $x + y + z = 94$ (1) và $3x = 4y = 5z$ (2)

Lời giải

Ta có: BCNN (3,4,5) = 60

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{3x}{60} = \frac{4y}{60} = \frac{5z}{60} \text{ hay } \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{20+15+12} = \frac{94}{47} = 2$$

$$\Rightarrow x=40, y=30 \text{ và } z=24$$

Câu 107. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN HỒNG LỄ 2017-2018)

a) Tìm $x; y; z$ biết $2x = 3y; 5x = 7z$ và $x - y + z = 22$.

b) Cho a, b, c là ba số thực dương, thỏa mãn điều kiện: $ab(a+b-c) = bc(b+c-a) = ca(c+a-b)$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

$$\text{Do } 2x = 3y; 5x = 7z \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15}$$

Theo t/c của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-y+z}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

$$\text{Suy ra } x = 21; y = 14; z = 15$$

b) Ta có $ab(a+b-c) = bc(b+c-a) = ca(c+a-b)$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Vì a, b, c là các số dương nên $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Câu 108. (Đề thi HSG 7 huyện ..(1). 2017-2018)

a) Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } Q, \text{ biết } Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

b) Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

a) Biến đổi: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì $a=b=c=d$ $a=b=c=d \Rightarrow Q=1+1+1+1=4$

+ Nếu $a+b+c+d=0$ thì $a+b=-(c+d)$; $b+c=-(a+d)$;

$$c+d=-(a+b); d+a=-(b+c);$$

$$\Rightarrow Q = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

Vậy $Q=4$ khi $a+b+c+d \neq 0$

$$Q = -4 \text{ khi } a+b+c+d=0$$

b) Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

Ta có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Câu 109. (Đề thi HSG 7 huyện ..(2) 2017-2018)

Cho $a; b; c$ là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Câu 110. (Đề thi HSG 7 huyện .Hoàn Nhơn 2017-2018)

a) Cho $x; y; z \neq 0$ và $x - y - z = 0$. Tính giá trị biểu thức $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

b) Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Lời giải

a) Ta có $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y-x}{y} \cdot \frac{z+y}{z}$

Từ: $x - y - z = 0 \Rightarrow x - z = y; y - x = -z; y + z = x$

Suy ra: $B = \frac{y}{x} \cdot \frac{-z}{y} \cdot \frac{x}{z} = -1 (x; y; z \neq 0)$

b)

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y) + 3(2z-4x) + 2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1) \quad \text{và} \quad \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 111. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2017-2018)

a) Tìm các số a, b, c biết: $2a = 3b; 5b = 7c$ và $3a - 7b + 5c = -30$

b) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

Lời giải

a) Vì $2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} \quad (1)$

$$5b = 7c \Rightarrow \frac{b}{7} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{14} = \frac{c}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{3a}{63} = \frac{7b}{98} = \frac{5c}{50} = \frac{3a - 7b + 5c}{63 - 98 + 50}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{-30}{15} = -2$$

$$\Rightarrow a = -42, b = -28, c = -20$$

b) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd$.

Suy ra : $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{b(5k+3)}{b(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$ và $\frac{5c+3d}{5c-3d} = \frac{d(5k+3)}{d(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$

Vậy $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

Câu 112. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh lộc 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z; x + y + z = 11$

Lời giải

Ta có : $2x = 3y$ suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ hay $\frac{x}{15} = \frac{y}{10}$

$4y = 5z$ suy ra $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ hay $\frac{y}{10} = \frac{z}{8}$

Vậy $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$

Câu 113. (Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Cho các số dương $a, b, c, d; c \neq d$ và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. CMR $\frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số dương và $c \neq d$, mà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a^{2016}}{c^{2016}} = \frac{b^{2016}}{d^{2016}} = \frac{a^{2016} + b^{2016}}{c^{2016} + d^{2016}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2016}}{c^{2016}} \right)^{2017} = \left(\frac{a^{2016} + b^{2016}}{c^{2016} + d^{2016}} \right)^{2017}$$

$$\text{hay } \frac{a^{2016 \cdot 2017}}{c^{2016 \cdot 2017}} = \frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2017}}{c^{2017}} = \frac{b^{2017}}{d^{2017}} = \frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2017}}{c^{2017}} \right)^{2016} = \left(\frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}} \right)^{2016}$$

$$\text{hay } \frac{a^{2017 \cdot 2016}}{c^{2017 \cdot 2016}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}}$$

$$\text{Vậy } \frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}}$$

Câu 114.(Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Cho $a+b+c+d=2000$ và $\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} = \frac{1}{40}$

Tính giá trị của : $S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$

Lời giải

Ta có $S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$

$$S+4 = \frac{a+b+c+d}{b+c+d} + \frac{a+b+c+d}{c+d+a} + \frac{a+b+c+d}{d+a+b} + \frac{a+b+c+d}{a+b+c}$$

$$S+4 = (a+b+c+d) \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \right)$$

$$\text{Do đó } S = -4 + 2000 \cdot \frac{1}{40} = -4 + 50 = 46$$

Vậy $S = 46$

Câu 115.(Đề thi HSG 7 Việt Yên 2013-2014)

Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4}$ thì

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{ab+ac}{2} &= \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} \\
&= \frac{ab+ac+bc+ba+ca+cb}{2+3+4} \\
&= \frac{2(ab+bc+ca)}{9} \\
&= \frac{ab+bc+ca}{4,5} \\
&= \frac{ab+bc+ca-ab-ac}{4,5-2} = \frac{bc}{2,5} \\
&= \frac{ab+bc+ca-bc-ba}{4,5-3} = \frac{ca}{1,5} \\
&= \frac{ab+bc+ca-ca-cb}{4,5-4} = \frac{ab}{0,5}
\end{aligned}$$

Do đó: $\frac{ab}{0,5} = \frac{ac}{1,5} = \frac{bc}{2,5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,5ab = 0,5ac \\ 1,5bc = 2,5ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = c \\ 5a = 3b \end{cases} \quad (a, b, c \neq 0)$$

$$\Rightarrow 5a = 3b = c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}.$$

Câu 116. (Đề thi HSG 7 huyện Phú Thiện 2019-2020)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$.

Lời giải

Từ $x+z=2y$ ta có:

$$x-2y+z=0 \text{ hay } 2x-4y+2z=0 \text{ hay } 2x-y-3y+2z=0$$

$$\text{hay } 2x-y=3y-2z$$

Vậy nếu: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ thì: $2x-y=3y-2z=0$ (vì $5 \neq 15$).

Từ $2x-y=0$ suy ra: $x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y-2z=0$ và $x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0$ hay $\frac{1}{2}y+y-z=0$

hay $\frac{3}{2}y-z=0$ hay $y = \frac{2}{3}z$. suy ra: $x = \frac{1}{3}z$

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\{ x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; \text{ với } z \in \mathbb{R} \}$

hoặc $\{ x = \frac{1}{2}y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y \}$ hoặc $\{ x \in \mathbb{R}; y = 2x; z = 3x \}$

Câu 117.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -1)

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow -x = 5x-12 \Rightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được: $\frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} = -y$

$$\Rightarrow 1+3y = -12y$$

$$\Rightarrow 1 = -15y$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Vậy $x = 2, y = \frac{-1}{15}$ thỏa mãn đề bài

Câu 118.(Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016-2017)

1) Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính : $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

2) Hãy chia số 26 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 2;3;4.

Lời giải

1) Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính : $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)}$$

+ Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; a+c=-b$.

$$\text{Khi đó } P = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì ta có $b+c=2a; c+a=2b; a+b=2c$

$$\text{Khi đó } P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$$

Vậy : $P = -3$ hoặc $P = 6$.

2) Hãy chia số 26 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 2;3;4

Giả sử số 26 được chia thành ba phần x, y, z .

Theo bài ra ta có : $2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{26}{13} = 2$

$\Rightarrow x = 12, y = 8, z = 6$.

Câu 119.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 3)

Tìm x, y, z biết : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x - 3y + 4z = 4$.

Lời giải

Tìm x, y, z biết : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x - 3y + 4z = 4$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 5$$

$$\frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y = 11$$

$$\frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z = 8$$

Vậy : $x = 5; y = 11; z = 8$

Câu 120.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 4)

Chứng minh rằng :

Nếu $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$

Thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

Lời giải

$$2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+y)}{30} = \frac{5(y+z)}{30} = \frac{3(z+x)}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{15} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{z+x}{10} = \frac{y+z}{6} = \frac{x-y}{4}; \frac{x+y}{15} = \frac{z+x}{10} = \frac{y-z}{5}$

$\Rightarrow$ đpcm

Câu 121.(Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó bằng 4660.

Lời giải

Ta có $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{9}{4} = \frac{6}{12}; \frac{20}{12}; \frac{27}{12} = 6:20:27$.

Giả sử M được chia thành 3 số là $x; y; z$.

Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$.

Câu 122.(Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{3} = \frac{z}{6}$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$ (giả thiết A có nghĩa).

Lời giải

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ ta suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$

$$\text{Suy ra } \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} \Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} = \frac{3x+4y+5z}{245}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}.$$

Câu 123.(Đề thi HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Lời giải

+ Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a+b+c=74$

+ Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

+ Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

$$+ \text{Từ đó ta có } \frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$$

+ Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$.

Câu 124.(Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2014-2015)

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2016.x + y^{2017} + z^{2017}$.

b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x = 3y = 5z$ và $|x-2y|=5$.

Tìm giá trị lớn nhất của $3x - 2z$.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

Khi đó ta có $2016.x + y^{2017} + z^{2017} = 2016.\frac{1}{2} + 0 = 1008$.

Vậy với x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

thì giá trị của biểu thức $2016.x + y^{2017} + z^{2017}$ là 1008.

b) Ta có $\frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x-2y}{-1}, 3y = 5z$.

Nếu $x-2y = 5 \Rightarrow x = -15, y = -10, z = -6$. Khi đó $3x - 2z = -45 + 12 = -33$

Nếu $x-2y = -5 \Rightarrow x = 15, y = 10, z = 6$. Khi đó $3x - 2z = 45 - 12 = 33$

Vậy giá trị lớn nhất của $3x - 2z$ là 33.

Câu 125.(Đề thi HSG 7 Huyện Quế Sơn 2012-2013)

a) Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{2012a + 2013b}{2012a - 2013b} = \frac{2012c + 2013d}{2012c - 2013d}$

b) Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Có $a = bk$ và $c = dk$

Thay a, c vào được:

$$\begin{aligned}\frac{2012a + 2013b}{2012a - 2013b} &= \frac{2012bk + 2013b}{2012bk - 2013b} = \frac{2012k + 2013}{2012k - 2013} \\ \frac{2012c + 2013d}{2012c - 2013d} &= \frac{2012dk + 2013d}{2012dk - 2013d} = \frac{2012k + 2013}{2012k - 2013} \\ \Rightarrow \frac{2012a + 2013b}{2012a - 2013b} &= \frac{2012c + 2013d}{2012c - 2013d}\end{aligned}$$

$$b) \frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Leftrightarrow \frac{abc}{(a+b)c} = \frac{bca}{(b+c)a} = \frac{cab}{(c+a)b}$$

$$\frac{abc}{ac+bc} = \frac{abc}{ab+ac} \Leftrightarrow ac+bc = ab+ac \Leftrightarrow bc = ab \Leftrightarrow a = c$$

Tương tự, chứng minh được: $a = b = c$

Thay $b = a; c = a$ được $M = 1$.

Câu 126.(Đề thi HSG 7 Cấp Trường 2018-2019)

1) Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 38$.

2) Cho $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$ với $a, b, c, d \neq 0; c \neq -d$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

Lời giải

1) Ta có: $2x + y = z - 38$. nên $2x + y - z = -38$.

+ Vì $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ nên $3x = 5z - 3x - 3x \Rightarrow 9x = 5z$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{9} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{z}{36} \quad (1)$$

$$+ \text{ Vì } 3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra} \quad \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x + y - z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{20} = -2 \Rightarrow x = (-2) \cdot 20 = -40$$

$$\frac{y}{15} = -2 \Rightarrow y = (-2) \cdot 15 = -30$$

$$\frac{z}{36} = -2 \Rightarrow z = (-2) \cdot 36 = -72$$

Vậy $x = -40; y = -30; z = -72$.

2)Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$ nên $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{2ab}{2cd}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + d^2 + 2cd} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{c^2 + d^2 - 2cd}$$

$$= \frac{(a^2 + ab) + (b^2 + ab)}{(c^2 + cd) + (d^2 + cd)} = \frac{(a^2 - ab) + (b^2 - ab)}{(c^2 - cd) + (d^2 - cd)} = \frac{(a + b)^2}{(c + d)^2} = \frac{(a - b)^2}{(c - d)^2}$$

Suy ra $\left(\frac{a + b}{c + d}\right)^2 = \left(\frac{a - b}{c - d}\right)^2 \Rightarrow \frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$ hoặc $\frac{a + b}{c + d} = \frac{b - a}{c - d}$

+ Với $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$ thì

$$(a + b) \cdot (c - d) = (a - b) \cdot (c + d)$$

$$\Rightarrow ac - ad + bc - bd = ac + ad - bc - bd$$

$$\Rightarrow ad = bc$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

+ Với $\frac{a + b}{c + d} = \frac{b - a}{c - d}$ thì

$$(a + b) \cdot (c - d) = (b - a) \cdot (c + d)$$

$$\Rightarrow ac - ad + bc - bd = bc + bd - ac - ad$$

$$\Rightarrow ac = bd \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

Vậy nếu $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$ với $a, b, c, d \neq 0; c - d \neq 0$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$.

Câu 127.(Đề thi HSG 7 Huyện Hoài Nhơn 2014-2015)

Tìm hai số khác 0 biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3; \frac{1}{3}; \frac{200}{3}$

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y . Ta có: $\frac{x + y}{3} = \frac{x - y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x + y + x - y}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5} = k \neq 0$

$$\Rightarrow x = \frac{5k}{3} \quad (1); \quad x + y = 3k \quad (2); \quad xy = \frac{200k}{3} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3} \Rightarrow xy = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9} \quad (4)$

Từ (3) và (4) $\frac{200k}{3} = \frac{20k^2}{9} \Leftrightarrow k = 30 \Rightarrow x = \frac{5.30}{3} = 50; y = \frac{4.30}{3} = 40$

Vậy hai số cần tìm là 50; 40.

Câu 128.(Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2018-2019)

a) Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c}$.

b) Cho $\overline{ab}, \overline{bc}$ ($c \neq 0$) là các số có hai chữ số thỏa mãn điều kiện: $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c}$.

Chứng minh rằng: $b^2 = ac$.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{6}{2(a+b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$$

Từ đó ta có: $\frac{3}{a+b} = \frac{3}{a+b+c}$ suy ra $a+b = a+b+c \Rightarrow c=0$

Do đó: $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

b) Ta có: $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c} \Leftrightarrow \frac{10a+b}{a+b} = \frac{10b+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{9a+(a+b)}{a+b} = \frac{9b+(b+c)}{b+c}$

Từ đó suy ra: $\frac{9a}{a+b} + 1 = \frac{9b}{b+c} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c}$

Từ $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow a(b+c) = b(a+b) \Rightarrow ab+ac = ab+b^2 \Rightarrow b^2 = ac$.

Câu 129.(Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2018-2019)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5;6;7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4;5;6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói tăm. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm ba lớp đã mua là $x, x \in \mathbb{N}^*$

Gọi a, b, c là số gói tăm dự định chia theo thứ tự cho các lớp 7A, 7B, 7C ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18}$$

Suy ra: $a = \frac{5x}{18}; b = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Gọi a', b', c' là số gói tăm đã chia theo thứ tự cho các lớp 7A, 7B, 7C ($a', b', c' \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a' + b' + c'}{4 + 5 + 6} = \frac{x}{15}$$

$$\text{Suy ra: } a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$

Do đó lớp 7C nhận nhiều hơn 4 gói tăm.

$$\text{Khi đó: } c' - c = \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Leftrightarrow \frac{36x - 35x}{90} = 4 \Leftrightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm cả ba lớp đã mua là 360 gói.

Câu 130.(Đề thi HSG 7 Huyện Giao Thủy 2016-2017)

Tìm x, y biết:

$$\text{a. } \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \text{ và } 5x + 4y = 120.$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{5x}{40} = \frac{4y}{20} = \frac{5x + 4y}{60} = \frac{120}{60} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2.8 = 16 \\ y = 2.5 = 10 \end{cases}$$

Câu 131.(Đề thi HSG 7 Huyện Giao Thủy 2016-2017)

Cho tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{2a + 3b}{2a - 3b} = \frac{2c + 3d}{2c - 3d}$

(Giả thiết các tỷ lệ thức đều có nghĩa).

Lời giải

Giả thiết các tỷ lệ thức đều có nghĩa

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d} = \frac{2a + 3b}{2c + 3d} = \frac{2a - 3b}{2c - 3d} \Rightarrow \frac{2a + 3b}{2a - 3b} = \frac{2c + 3d}{2c - 3d}$$

Câu 132.(Đề thi HSG 7 Huyện Bình Giang)

1) Tìm 3 số $a; b; c$ biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2}$ và $a + 2b + c = -52$

2) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{3a - b}{2a + 15} + \frac{3b - a}{2b - 15}$

với $a - b = 15$ và $a \neq -7, 5$; $b \neq 7, 5$.

Lời giải

$$1) \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{2b}{8} = \frac{a+2b+c}{3+8+2} = \frac{-52}{13} = -4$$

$$\text{Suy ra: } a = -4 \cdot 3 = -12$$

$$b = -4 \cdot 4 = -16$$

$$c = -4 \cdot 2 = -8$$

2) Thay $15 = a + b$ vào P ta được:

$$P = \frac{3a - b}{2a + a - b} + \frac{3b - a}{2b - (a - b)} = 2.$$

Câu 133.(Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lăng 2015 - 2016)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính: $x - 2y + 3z$.

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } 4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Thay vào tỷ lệ thức ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

$$\Rightarrow y = -7, z = 1.$$

$$\text{Vậy } x - 2y + 3z = 2 - 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 = 19.$$

Câu 134.(Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 2014 - 2016)

1) Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$. Hãy tính

$$\text{giá trị của biểu thức } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

2) Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua.

Lời giải

1) + Nếu $a + b + c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{b} = \frac{c+a-b}{a} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+Nếu $a+b+c=0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1.$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

2) Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 135. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016-2017)

Tìm số $\overline{xyz}$ biết $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$, và $x - y + z = 4$

Lời giải

$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25} \text{ và } x, y, z \in \mathbb{N}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x-y+z}{2-3+5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2; y = 3; z = 5. \text{ Vậy } \overline{xyz} = 235$$

Câu 136. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Hiệp Hòa 2016-2017)

a) Tìm x, y biết $\frac{x+4}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 22$

b) Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

a) $\frac{x+4}{7+y} = \frac{4}{7} \Rightarrow 28+7x = 28+4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x=8, y=14$

b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ (1)

(1) $\Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$

(1) $\Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$

$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} \Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1$

$\Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$

Câu 137. (Đề thi HSG Toán 7 huyện 025 năm học 2017-2018)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b, 4b = 5c$ và $-a - b + c = -52$

Lời giải

Từ $3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}$

Từ $4b = 5c \Rightarrow \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{c-a-b}{12-10-15} = \frac{-52}{-13} = 4 \Rightarrow a=40; b=60; c=48.$

Câu 138. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Lê Quý Đôn năm học 2016-2017)

Tìm x, y, z biết:

a) Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$

b) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

a) $x=84, y=56, z=60$

b) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$

Câu 139. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016-2017)

Biết $a^2+ab+\frac{b^2}{3}=25; \quad c^2+\frac{b^2}{3}=9; \quad a^2+ac+c^2=16$

Và $a \neq 0, c \neq 0, a \neq -c$. Chứng minh rằng: $\frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

Lời giải

Ta có: $c^2 + \frac{b^2}{3} + a^2 + ac + c^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$ (vì $9+16=25$)

Suy ra $2c^2 = a(b-c) \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b-c}{c} (a \neq 0, b \neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b-c}{c} = \frac{2c+b-c}{a+c} = \frac{b+c}{a+c} (a \neq -c, a+c \neq 0)$$

Câu 140. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Phú Thiện năm học 2015-2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$

Lời giải

Từ $x+z=2y$ ta có:

$$x-2y+z=0 \Rightarrow 2x-4y+2z=0$$

$$\Rightarrow 2x-y-3y+2z=0 \Rightarrow 2x-y=3y-2z$$

Vậy nếu $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ thì $2x-y=3y-2z=0 (5 \neq 15)$

$$\text{Từ } 2x-y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$\text{Từ } 3y-2z=0 \text{ \& } x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0 \text{ hay } \frac{1}{2}y+y-z=0$$

$$\text{Hay } \frac{3}{2}y-z=0 \text{ hay } y=\frac{2}{3}z \Rightarrow x=\frac{1}{3}z$$

Vậy các giá trị cần tìm là $\left\{ x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z, z \in \mathbb{R} \right\}$ hoặc $\left\{ x = \frac{1}{2}y, y \in \mathbb{R}, z = \frac{3}{2}y \right\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}, y=2x, z=3x\}$

Câu 141. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Đức Thọ năm học 2015-2016)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$ b) $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{5} = \frac{y}{9} \text{ và } xy = 405 \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{81} = \frac{xy}{5 \cdot 9} = \frac{405}{45} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \cdot 25 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$\Rightarrow y^2 = 9 \cdot 81 = 27^2 \Rightarrow y = \pm 27$$

Do x, y cùng dấu nên $x=15, y=27$ & $x=-15, y=-27$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x} = \frac{1+9y-1-7y}{2x-7x} = \frac{2y}{-5x} = \frac{1+7y-1-5y}{7x-24} = \frac{2y}{7x-24}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-5x} = \frac{2y}{7x-24} \Rightarrow -5x = 7x-24 \Leftrightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -5y - 25y = 24y \Rightarrow 49y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{49}$$

Vậy $x = 2, y = -\frac{5}{49}$ thỏa mãn đề bài

Câu 142. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0 \Rightarrow 2y + 4z = 0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra:

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0) \text{ thì } \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}$$

Suy ra: $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 28k(3)$

Thay $x = 2k, y = 4k, z = 6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$

$$\Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0(\text{ktm}) \\ k = \frac{1}{2}(\text{tm}) \end{cases}$$

Với $k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$

Vậy $x = 1, y = 2, z = 3$

Câu 143. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$ và $a+b+c \neq 0$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

+ Vì $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{a+b-c+c+a-b+b+c-a}{a+b+c} = 1$$

Mà

$$\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{c+a}{b} = \frac{b+c}{a} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Câu 144. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96$$

Giải ra ta được $x = 12; y = 15; z = 18$

Câu 145. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Thiệu Hóa năm học 2016-2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x + y + z = 18$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0.$$

Do đó:

$$\frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

Câu 146. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2017-2018)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $\frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2$. Tìm $x+y+z$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2 \Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Thay } x=2 \Rightarrow \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+y+z}{50} = \frac{2+16}{9} = 2 \Rightarrow x+y+z=100$$

Câu 147. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 038 năm học 2016-2017)

Tìm các số x, y, z biết:

$$\text{a) } (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2100} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 116$$

Lời giải

$$\text{a) } (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z=\frac{5}{3} \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 116$$

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2+y^2+z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4, y=6, z=8 \\ x=-4, y=-6, z=-8 \end{cases}$$

Câu 148. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu sơn năm học 2015-2016)

Tìm x, y, z biết $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x = 4; y = 6; z = 8$$

Câu 149. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Vĩnh Lộc năm học 2016-2017)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \text{ hay } \frac{x}{15} = \frac{y}{10}$$

$$4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \text{ hay } \frac{y}{10} = \frac{z}{8}. \text{ Vậy } \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}.$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra } x = 5, y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

Câu 150. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Hiền Quan năm học 2015-2016)

Tìm các số x, y, z biết: $12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

Lời giải

$$12x = 15y = 20z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\Rightarrow x = 20; y = 16; z = 12$$

Câu 151. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Ân Tường Đông năm học 2014-2015)

Tìm các số a, b, c biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ và $a + b - c = 10$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b-c}{3+5-7} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = 10 \Rightarrow a = 30; \frac{b}{5} = 10 \Rightarrow b = 50; \frac{c}{7} = 10 \Rightarrow c = 70$$

Vậy $a = 30, b = 50, c = 70$

Câu 152. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Phú Thiện năm học 2009-2010)

Tìm x, y, z , biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x + z = 2y$

Lời giải

+) Từ $x + z = 2y$ ta có: $x - 2y + z = 0$ hay $2x - 4y + 2z = 0$ hay $2x - y - 3y + 2z = 0$ hay $2x - y = 3y - 2z$

Vậy nếu $\frac{2x - y}{5} = \frac{3y - 2z}{15} \Rightarrow 2x - y = 3y - 2z = 0$

+) Từ $2x - y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y - 2z = 0$ và $x + z = 2y \Rightarrow x + z + y - 2z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y + y - z = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2}y - z = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}z \Rightarrow x = \frac{1}{3}z$

Vậy các giá trị x, y, z cần tìm là: $\left\{ x = \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; z \in \mathbb{R} \right\}$ hoặc $\left\{ x = \frac{1}{2}y; y \in \mathbb{R}; z = \frac{3}{2}y \right\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}, y = 2x, z = 3x\}$

Câu 153. (Đề thi HSG 7 huyện Xuân Dương 2013-2014)

Tìm x, y, z biết $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x - 3y + 4z = 4$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 5; \quad \frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y = 11; \quad \frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z = 8$$

Vậy $x = 5; y = 11; z = 8$

Câu 154. (Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2012-2013)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

Nếu $a+b+c \neq 0$, Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{b}\right) \left(\frac{a+b}{c}\right) = 8$$

+)Nếu $a+b+c=0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

Câu 155. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai 2013-2014)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\text{Nếu } a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); (b+c)=-(a+d)$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

$$\text{Nếu } a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$$

Câu 156. (Đề thi HSG 7 Cấp Trường năm 2014-2015)

Tìm x, y, z biết

$$\text{a. Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z \text{ và } x - 2y + z = 32$$

$$\text{b. } \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải

$$\text{a. Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z \text{ và } x - 2y + z = 32$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{x}{7} = \frac{z}{5}; x - 2y + z = 32$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\Rightarrow x = 84, y = 56, z = 60$$

$$b. \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{y+z+1+x+z+2+x+y-3}{x+y+z} = 2$$

$$\text{Mà: } \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z+1=2x & (1) \\ x+z+2=2y & (2) \\ x+y-3=2z & (3) \\ x+y+z=\frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) và (4)} \Rightarrow z = \frac{-5}{6} \text{ Thay vào (1),(2) ta có } x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{6}.$$

Câu 157. (Đề thi HSG 7 huyện Quốc Oai 2016-2017)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \pm 2$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = \{(4, 6, 8); (-4; -6; -8)\}$$

Câu 158. (Đề thi HSG 7 Trường Kỳ Xuân 2017-2018)

a) Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

b) Tìm hai số x, y biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$

Lời giải

$$a) \text{ Từ giả thiết: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1);$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (*)$$

Ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x-3y+z}{18-36+20} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow x = 9.3 = 27; y = 12.3 = 36; z = 20.3 = 60$

b) Nhân cả hai vế của $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ với x ta được: $\frac{x^2}{2} = \frac{xy}{5} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 10 \\ x = -4 \Rightarrow y = -10 \end{cases}$

Câu 159. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Lời giải

$$\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

Suy ra: $\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$
 $= \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$

Vậy $\frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$

$\frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 160. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017-2018)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x-3y+z=6$

b) Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức M , với $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

a) Vì $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x-3y+z}{18-36+20} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 27, y = 36, z = 60$$

b) Từ giả thiết suy ra

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

*Nếu $a+b+c+d=0$ thì $a+b=-(c+d); b+c=-(d+a); c+d=-(a+b); d+a=-(b+c)$

Khi đó $M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$

*Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ nên $a=b=c=d$

Khi đó $M = 1+1+1+1 = 4$

Câu 161. (Đề thi HSG 7 huyện Nga Sơn 2016-2017)

Cho ba số $x < y < z$ thỏa mãn $x + y + z = 51$. Biết rằng 3 tổng của 2 trong 3 số đã cho tỉ lệ với 9,12,13. Tìm x, y, z

Lời giải

Theo đề bài $x < y < z \Rightarrow x + y < x + z < y + z$

Do 3 tổng của 2 trong ba số tỉ lệ với 9,12,13 mà $9 < 12 < 13$ với $x < y < z$ thì chỉ có $x + y < x + z < y + z$

Từ đó suy ra $(x + y) : (x + z) : (y + z) = 9 : 12 : 13$

Hay $\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13}$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x+y}{9} = \frac{x+z}{12} = \frac{y+z}{13} = \frac{x+y+x+z+y+z}{9+12+13} = \frac{2(x+y+z)}{34} = \frac{2 \cdot 51}{34} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{9} = 3 \\ \frac{x+z}{12} = 3 \\ \frac{y+z}{13} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x+z = 36 \\ y+z = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 24 \end{cases}$$

Câu 162. (Đề thi HSG 7 Trường Phú Khánh 2018-2019)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

Từ $2x = 3y; 4y = 5z; 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x-3y+5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{7}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 163. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

Cho $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $B = \frac{3x-4y+5z}{x-2y+5z}$

a) $\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = k \Rightarrow x = 20k, y = 35k, z = 42k$

$$\Rightarrow B = \frac{3 \cdot 20k - 4 \cdot 35k + 5 \cdot 42k}{20k - 2 \cdot 35k + 5 \cdot 42k} = \frac{130k}{160k} = \frac{13}{16}$$

Câu 164. (Đề thi HSG 7 huyện Chương Mỹ 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

Từ $2x = 3y; 4y = 5z; 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{2} = \frac{3y}{4} = \frac{5z}{3} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 165. (Đề thi HSG 7 Trường Cự Khê 2016-2017)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Từ $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} + \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\Rightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

Nếu $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); b+c=-(a+d)$

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

Nếu $a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$

Câu 166. (Đề thi HSG 7 Thanh Thùy 2018-2019)

a) Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

b) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z$ cùng dấu

$$\text{Và } \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$$

Học sinh tính tương tự: $y = \pm 135; z = \pm 30$

Vậy $A = 237$ hoặc $A = -237$

$$\text{b) Ta có: } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + d^2} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 167. (Đề thi HSG 7 Thanh Thùy 2018-2019)

Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$. CMR biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+z}{y+z}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{2(x+y+z+t)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2x = y+z+t; 2y = z+t+x; 2z = t+x+y; 2t = x+y+z$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó học sinh suy ra được: } & x+y = z+t; y+z = t+x \\ & z+t = x+y; t+x = y+z \end{aligned}$$

Khi đó tính được $A = 4$. Vậy A có giá trị nguyên.

Câu 168. (Đề thi HSG 7 TRÀ MY 2018-2019)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} \text{ và } x-3y+4z=4$$

Lời giải

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

$$\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 5; \frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y = 11; \frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z = 8$$

$$\text{Vậy } x = 5; y = 11; z = 8$$

Câu 169. (Đề thi HSG 7 BÍCH HÒA 2017-2018)

$$\text{Tìm } x; y \text{ biết: } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow -x = 5x-12 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} = -y \Rightarrow 1+3y = -12y \Rightarrow y = -\frac{1}{15}$$

$$\text{Vậy } x = 2; y = -\frac{1}{15}.$$

Câu 170. (Đề thi HSG 7)

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A

$$\text{Theo đề bài ta có: } a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \quad (1) \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 24309 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k$$

$$\text{Do đó, (2)} \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309 \Rightarrow \begin{cases} k = 180 \\ k = -180 \end{cases}$$

$$\text{Với } k = 180 \Rightarrow a = 72, b = 135, c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$\text{Với } k = -180 \Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

Câu 171. (Đề thi HSG 7)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3, 4, 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

Tìm ba phân số đó.

Lời giải

$$\text{Các phân số cần tìm là } a, b, c \text{ ta có: } a + b + c = \frac{213}{70} \text{ và } a:b:c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6:40:25$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}, b = \frac{12}{7}, c = \frac{15}{14}$$

$$\text{Các phân số cần tìm là } a, b, c \text{ ta có: } a + b + c = \frac{213}{70} \text{ và } a:b:c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6:40:25$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}, b = \frac{12}{7}, c = \frac{15}{14}$$

Câu 172. (Đề thi HSG 7 Đề 073)

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a + 2b - 3c = -20$

Lời giải

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2b}{6} = \frac{3c}{12} = \frac{a + 2b - 3c}{2 + 6 - 12} = \frac{-20}{-4} = 5 \Rightarrow a = 10; b = 15; c = 20$$

Câu 173. (Đề thi HSG 7 Đề 075)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x + y + z}{y + z + x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Câu 174. (Đề thi HSG 7 Huyện Lục Nam – 2017-2018)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Lời giải

Từ dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{2a + b + c + d}{a} - 1 = \frac{a + 2b + c + d}{b} - 1 = \frac{a + b + 2c + d}{c} - 1 = \frac{a + b + c + 2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c + d}{a} = \frac{a + b + c + d}{b} = \frac{a + b + c + d}{c} = \frac{a + b + c + d}{d}$$

Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì $a = b = c = d \Rightarrow M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Nếu $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d)$

$$b + c = -(a + d); \quad c + d = -(a + b); \quad a + d = -(b + c)$$

$$\text{Lúc đó } M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

Câu 175. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Kỳ 2015-2016)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$

Lời giải

$$2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \quad 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x-y-z}{15-10-8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\Rightarrow x = -150; y = -100; z = -80$$

Câu 176. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Kỳ 2015-2016)

Cho các số thực $a; b; c; d; e$ khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4}$$

$$= \frac{2a^4}{2b^4} = \frac{3b^4}{3c^4} = \frac{4c^4}{4d^4} = \frac{5d^4}{5e^4} = \frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4}$$

Vậy $\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$

Câu 177. (Đề thi HSG 7 THCS Vạn Long 2018-2019)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$. Chứng minh

$$\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$$

Lời giải

Từ $c(b + d) = 2bd \Rightarrow b + d = \frac{2bd}{c}$

Viết $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$

Câu 178. (Đề thi HSG 7 trường Hồng Dương 2017-2018)

a) Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh : $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{d}$

b) Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1, 2, 3?

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

Suy ra: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} = k^3 (1)$

Ta lại có: $k = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = k^3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a}{d}$

b) Gọi a, b, c là các chữ số của số có 3 chữ số cần tìm

Vì mỗi chữ số không vượt quá 9 và không thể đồng thời bằng 0 nên $1 \leq a+b+c \leq 27$. Mặt khác, số

đó là bội của 18 nên
$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ a+b+c=18 \\ a+b+c=27 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$, do đó: $(a+b+c):6$

Nên $a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a=3, b=6, c=9$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là chữ số chẵn

Vậy các số phải tìm là 396; 936

Câu 179. (Đề thi HSG 7 trường Tam Hưng 2016-2017)

Cho x, y, z, t là 4 số khác 0 và thỏa mãn các điều kiện sau:

$y^2 = xz, z^2 = yt$ và $y^3 + z^3 + t^3 \neq 0$. Chứng minh: $\frac{y^3 + z^3 + x^3}{y^3 + z^3 + t^3} = \frac{x}{t}$

Lời giải

Từ $y^2 = xz, z^2 = yt$ suy ra $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{t}$

Lập phương các tỉ số trên và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để có:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{y^3 + z^3 + t^3} = \frac{x^3}{y^3} \quad (1)$$

Mặt khác ta có: $\frac{x^3}{y^3} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} = \frac{x}{t} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{y^3 + z^3 + x^3}{y^3 + z^3 + t^3} = \frac{x}{t}$

Câu 180. (Đề thi HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

Từ $2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 181. (Đề thi HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Cho $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$. Chứng minh : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Lời giải

$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c} = \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Câu 182. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trãi 2018-2019)

1) Cho $c^2 = ab$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

2) Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

1)

a) Từ $c^2 = ab$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} = \frac{a^2 + ab}{ab + b^2} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

b) Theo câu a ta có: $\frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

2) Gọi các phân số phải tìm là : a, b, c .

Ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$

Và $a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{3}{5}} = \frac{b}{\frac{4}{1}} = \frac{c}{\frac{5}{2}} = \frac{a+b+c}{\frac{3}{5} + \frac{4}{1} + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{213}{70}}{\frac{71}{10}} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}; \quad b = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{7}; \quad c = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

Câu 183. (Đề thi HSG 7 huyện 2018-2019)

Tìm các số a, b, c biết:

$$2a = 3b, 5b = 7c \text{ và } 3a - 7b + 5c = -30$$

Lời giải

$$\text{Vì } 2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} \quad (1)$$

$$5b = 7c \Rightarrow \frac{b}{7} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{14} = \frac{c}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{3a}{63} = \frac{7b}{98} = \frac{5c}{50} = \frac{3a - 7b + 5c}{63 - 98 + 50}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{-30}{15} = -2$$

$$\Rightarrow a = -42; b = -28; c = -20.$$

Câu 184. (Đề thi HSG 7 huyện Bồ Trạch 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

Lời giải

$$2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x + y + z}{15 + 10 + 8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 5; y = \frac{10}{3}; z = \frac{8}{3}$$

Câu 185. (Đề thi HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó là 4660.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{9}{4} = \frac{6}{12}; \frac{20}{12}; \frac{27}{12} = 6:20:27$$

Giả sử M được chia ra thành 3 số x, y, z .

Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12;$$

$$y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40;$$

$$z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vì $\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27}$ nên x, y, z cùng dấu. Do đó $x=12; y=42; z=54$ hoặc $x=-12; y=-42; z=-54$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Câu 186. (Đề thi HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017-2018)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $B = x + y + z$

Lời giải

Ta có: $2x^3 - 1 = 15 \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 2$

$$\text{Suy ra } \frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y-25}{16} = 2 \Rightarrow y = 57 \\ \frac{z+9}{25} = 2 \Rightarrow z = 41 \end{cases}$$

Vậy $B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100$

Câu 187. (Đề thi HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Tìm x, y biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$.

Lời giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow \frac{xy}{2.5} = \frac{y^2}{5^2} \Leftrightarrow \frac{40}{10} = \frac{y^2}{25}$$

$$\Rightarrow y^2 = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 10 \Rightarrow x = 4 \\ y = -10 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Câu 188. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng biểu thức $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ có giá trị nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} \Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

Nếu $x + y + z + t = 0 \Rightarrow P = -4$

Nếu $x + y + z + t \neq 0 \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

Vậy P nguyên.

Câu 189. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-ay}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Lời giải

$$\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-ay}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c} \Leftrightarrow \frac{2abz-3acy}{a^2} = \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz-3cy=0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1) \Rightarrow 3cx-ay=0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Câu 190. (Đề HSG toán 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \text{ và } 3x-2y+5z=96. \text{ Tìm } x, y, z$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24}{y} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0 \Rightarrow 20z=24y=30x$$

$$\Rightarrow 10z=12y=15x \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3 \Rightarrow x=12; y=15; z=18$$

Câu 191. (Đề HSG toán 7 huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3-3=29$. Tính $x-2y+3z$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4x^3-3=29 \Rightarrow 4x^3=32 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

$$\text{Thay vào tỉ lệ thức ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

$$\Rightarrow y=-7, z=1$$

$$\text{Vậy } x-2y+3z=2-2(-7)+3.1=19$$

Câu 192. (Đề HSG huyện Bến Lức 2018 - 2019)

Tìm a, b, c biết $\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11}$ và $a+b+c=48$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11} = \frac{12a-15b+20c-12a+15b-20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{12a-15b}{7} = 0 &\Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c-12a}{9} = 0 &\Rightarrow 20c = 12a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

Và $a+b+c=48$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a+b+c}{12+15+20} = \frac{48}{5} = 24$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 16, c = 12$$

Câu 193. (Đề thi HSG 7)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ & $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

$$GT \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 8 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \\ z = -8 \end{cases}$$

Câu 194. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x = 4; y = 6; z = 8$$

Câu 195. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm 3 số a, b, c biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c=-50$

Lời giải

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4} = \frac{15a-10b+6c-15a+10b-6c}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15a - 10b = 0 \\ 6c - 15a = 0 \\ 10b - 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \\ \frac{c}{5} = \frac{b}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow a = -10; b = -15; c = -25$

Câu 196. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Khuyến)

Cho 4 số a, b, c, d biết $a = 3b = 4c = 5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $b - c$

Lời giải

Ta có : $a = 3b = 4c = 5d$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12} \Leftrightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{144} = \frac{831}{831} \Rightarrow \begin{cases} d = 12 \Rightarrow b = 20, c = 15 \Rightarrow b - c = 5 \\ d = -12 \Rightarrow b = -20, c = -15 \Rightarrow b - c = -5 \end{cases}$$

Câu 197. (Đề thi HSG 7 PGD huyện Châu Đốc 2018-2019)

Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y, 5y = 6z$ và $xyz = 30$

Lời giải

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$$

$$\Rightarrow xyz = 30 \Rightarrow 8k.6k.5k = 30 \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

Câu 198. (Đề thi HSG 7 huyện QUẾ SƠN 2018-2019)

a) Tìm x, y biết $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 22$

b) Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

a)

$$\Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

b)

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} \\
&\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} \cdot \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} \cdot \frac{3x}{45} \\
&\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \\
&\Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}
\end{aligned}$$

Câu 199. (Đề thi HSG 7 trường VỊ THANH 2018-2019)

Cho 4 số a, b, c, d biết $a = 3b = 4c = 5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $b - c$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a &= 3b = 4c = 5d \\
\Rightarrow \frac{a}{60} &= \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12} \\
\Leftrightarrow \frac{ab}{1200} &= \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} \\
\Leftrightarrow \frac{d^2}{144} &= \frac{831}{831} \Rightarrow \begin{cases} d = 12 \Rightarrow b = 20, c = 15 \Rightarrow b - c = 5 \\ d = -12 \Rightarrow b = -20, c = -15 \Rightarrow b - c = -5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Câu 200. (Đề thi HSG 7 trường TÀO SƠN huyện ANH SƠN 2017-2018)

a) Số A được chia thành 3 số theo tỉ lệ $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

b) Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$ (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

Lời giải

a) Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A .

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k$$

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$$

$$\Rightarrow k = 180 \quad ; k = -180$$

$$+) k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$+) k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = a + b + c = -237$$

b) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$, khi đó: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(b+a)} = \frac{a}{b}$

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A .

Theo đề bài ta có: $a:b:c = \frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k$

Do đó (2) $\Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$

$\Rightarrow k = 180$; $k = -180$

+) $k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$

+) $k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = a + b + c = -237$

Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$, khi đó: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(b+a)} = \frac{a}{b}$

Câu 201. (Đề thi HSG 7 trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$.

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$.

Lời giải

Từ $c(b + d) = 2bd \Rightarrow b + d = \frac{2bd}{c}$.

Viết $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$.

Câu 202. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Tìm x, y biết: $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x} = \frac{1+9y-1-7y}{2x-7x} = \frac{2y}{-5x} = \frac{1+7y-1-5y}{7x-24} = \frac{2y}{7x-24}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-5x} = \frac{2y}{7x-24} \Rightarrow -5x = 7x-24 \Leftrightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -5y - 25y = 24y \Rightarrow 49y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{49}$$

Vậy $x = 2, y = -\frac{5}{49}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 203. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2017 - 2018)

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 114 học sinh. Biết số học sinh lớp 7A bằng $\frac{5}{6}$ số học sinh lớp 7B, số học sinh lớp 7B bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh lớp 7C. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c

Theo đề bài ta có: $a = \frac{5}{6}b, b = \frac{3}{4}c$ và $a + b + c = 114$

$$a = \frac{5}{6}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6}$$

$$b = \frac{3}{4}c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+6+8} = \frac{114}{19} = 6$

Do đó $a = 5.6 = 30; b = 6.6 = 36; c = 8.6 = 48$

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 30, 36, 48 học sinh.

Câu 204. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Mô 2017 – 2018)

- 1) Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.
2. Tìm ba phân số đó.

2) Nhà trường dự định chia vở viết cho 3 lớp 7A, 7B, 7C theo tỉ lệ số học sinh là 7:6:5. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển chuyển giữa 3 lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ 6:5:4. Như vậy có lớp đã nhận được ít hơn theo dự định 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

Lời giải

1) Gọi 3 số đó lần lượt là a, b, c : $a + b + c = \frac{213}{70}$

$$\text{Vì } a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

2) - Gọi số vở của 3 lớp 7A, 7B, 7C nhận được theo dự định tương ứng là x, y, z và số vở nhận được trong thực tế là a, b, c (với x, y, z, a, b, c thuộc $\mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có: } \frac{x}{7} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{18} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{y}{30} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{90}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{15} \Rightarrow \frac{a}{36} = \frac{b}{30} = \frac{c}{24} = \frac{a+b+c}{90}$$

- Do $a+b+c = x+y+z$

Nên ta có $\frac{x}{35} = \frac{a}{36}$ do đó $x < a$ nên số vở của lớp 7A nhận được nhiều hơn so với dự định

Số vở lớp 7B nhận được không đổi.

Số vở lớp 7C nhận được ít hơn so với dự định, suy ra $z - c = 12$

- Từ đó suy ra 7A nhận được 432 quyển vở, lớp 7B nhận được 360 quyển vở, lớp 7C nhận được 288 quyển vở

Câu 205. (Đề thi HSG 7 – Huyện Vĩnh Lộc 2019 – 2020)

a) Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

b) Cho dãy tỉ số bằng nhau :

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}.$$

Tính giá trị của biểu thức M, với $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

$$\text{a. vì } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x-3y+z}{18-36+20} = \frac{6}{2} = 3$$

Suy ra $x = 27; y = 36; z = 60$.

b. Từ giả thiết suy ra

$$\frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

* Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $a + b = -(c + d); b + c = -(d + a);$

$$c + d = -(a + b); d + a = -(b + c)$$

Khi đó $M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$

* Nếu $a + b + c + d \neq 0$ thì $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ nên $a = b = c = d$

Khi đó $M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Câu 206. (Đề thi HSG 7 – Thị xã Chí Linh 2016 – 2017)

a) Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính : $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

b) Hãy chia số 26 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 2; 3; 4.

Lời giải

a, Ta có: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)}$

+ Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c; b + c = -a; a + c = -b$

Khi đó $P = (-1) + (-1) + (-1) = -3$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì ta có $b + c = 2a; c + a = 2b; a + b = 2c$

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$

Vậy : $P = -3$ hoặc $P = 6$.

b, Giả sử số 26 được chia thành ba phần x, y, z .

Theo bài ra ta có : $2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\Rightarrow x = 12, y = 8, z = 6.$$

Câu 207. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thanh Chương 2019 – 2020)

a. Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$.

b. Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Lời giải

a. Ta có $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14}$ (1); $5x = 7z \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$

Tìm được: $x = 84; y = 56; z = 60$

b. Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k \Rightarrow 7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (1)$

Tương tự: $7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (2)$

Câu 208. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

a) Cho x, y, z thỏa mãn: $x^2 = yz$, $y^2 = xz$, $z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$.

Lời giải

a) TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0$ suy ra $x = y = z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz$, $y^2 = xz$, $z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$ (đpcm)

b) Từ $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$= \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z - 24y = 30x - 20z = 24y - 30x = 0$$

$$\Rightarrow 20z = 24y = 30x$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Giải ra và kết luận : $x = 12$; $y = 15$ và $z = 18$

Câu 209. (Đề HSG 7 – Huyện Sơn Dương 2015-2016)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5,6,7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4,5,6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c', ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'$; $b = b'$; $c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 210. (Đề HSG 7 – Huyện Sơn Dương 2015-2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

$$\Rightarrow 10z = 12y = 15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} \text{ và } 3x - 2y + 5z = 96$$

Giải ra ta được $x = 12$; $y = 15$; $z = 18$

Câu 211. (Đề thi HSG 7 – Cấp Huyện mã T21 - 2019 – 2020)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$. Hãy tính giá

$$\text{trị của biểu thức } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

Lời giải

+Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+Nếu $a+b+c = 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ,ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

Câu 212. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$. Chứng minh: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2bz-3cy}{a} &= \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c} \\ \Leftrightarrow \frac{2abz-3acy}{a^2} &= \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2} \\ &= \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2); \text{ Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Câu 213. (Đề thi HSG – Huyện Hiệp Hòa 2019 – 2020)

a. Tìm x, y biết: $\frac{x+4}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x+y=22$

b. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

$$\text{a. } \Rightarrow 28+7x=28+4y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

$$b. \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} \cdot \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} \cdot \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

Câu 214. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Lạc 2019 - 2020)

Cho 4 số $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0$ thỏa mãn $a_2^2 = a_1 a_3; a_3^2 = a_2 a_4$.

Lời giải

Theo bài ra $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0$ thỏa mãn $a_2^2 = a_1 a_3; a_3^2 = a_2 a_4$.

$$\text{Ta có: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$$

Câu 215. (Đề thi HSG 7 – Huyện Ý Yên 2015 – 2016)

Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lời giải

Với $a, b, c \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} &= \frac{bza - cya}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2} \\ &= \frac{bza - cya + bcx - baz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{bz - cy}{a} = 0$, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$\frac{cx - az}{b} = 0$, do đó $cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Câu 216. (Đề HSG 7 – Huyện Hoài Nhơn 2019-2020)

Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A1, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7A2 và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7A3 đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Lời giải

Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Gọi tổng số học sinh của 7A1, 7A2, 7A3 lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có : $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{3}{4}b = \frac{4}{5}c \Rightarrow \frac{12}{18}a = \frac{12}{16}b = \frac{12}{15}c \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3.$$

Suy ra : $a = 54, b = 48, c = 45$

Vậy tổng số học sinh của 7A1, 7A2, 7A3 lần lượt là 54, 48 và 45.