

Chuyên đề 10 . BÀI TOÁN VỀ ĐƠN THỨC-ĐA THỨC VÀ LIÊN QUAN

PHẦN I. TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT

Chủ đề 1. ĐƠN THỨC – ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức cần nhớ

- Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.
- Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.
 - * Một số cũng được coi là một đơn thức thu gọn
 - * Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường ta viết hệ số trước, các biến được viết tiếp theo thứ tự bảng chữ cái.
- Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó. Số thực khác 0 là đơn thức bậc 0. Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.
- Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.
- Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Các số khác 0 cũng được coi là các đơn thức đồng dạng.
- Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức. Thu gọn các đơn thức. Những đơn thức nào đồng dạng?

- $15x^2 - 3x^3y^3$;
- $5,3x^3 \cdot (-3)x^5y^2$;
- $25x^2 + 3x^4y^3$;
- $25(x^2 + 3x^4y^3)$;
- $-\frac{5bc}{6a}$;
- $-\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 \cdot 1,2bxy^3$;
- $-\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 + 1,2bxy^3$;

$$h) -25ax^3y^2 \cdot (-3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4;$$

$$i) -25ax^3y^2 - 3bx^4y^3 \cdot 0,4cx^5y^4;$$

$$k) (-25ax^3y^2 - 3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4k;$$

$$l) -\frac{2a}{3c};$$

$$m) -\frac{2a}{3c}x^8;$$

$$n) -\frac{2a}{3c}x^8(-y^2)$$

$$p) -\frac{2a}{3c}x^8 - y^2.$$

✓ *Tìm cách giải:* Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Do đó muốn thu gọn đơn thức ta thực hiện nhân các số với nhau nhân các lũy thừa của cùng một biến (cơ số) với nhau.

Giải

Đơn thức:

$$b) 5,3x^3 \cdot (-3)x^5y^2 = -15,9x^8y^2;$$

$$e) -\frac{5bc}{6a};$$

$$f) -\frac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 \cdot 1,2bxy^3 = -\frac{b^2c}{a}x^6y^5z^3;$$

$$h) -25ax^3y^2(-3bx^4y^3) \cdot 0,4cx^5y^4 = 30abcx^{12}y^9;$$

$$l) -\frac{2a}{3c};$$

$$m) -\frac{2a}{3c}x^8;$$

$$n) -\frac{2a}{3c}x^8(-y^2) = \frac{2a}{3c}x^8y^2$$

Hai đơn thức $15,9x^8y^2$ và $\frac{2a}{3c}x^8y^2$ đồng dạng. Bậc của đơn thức là 10.

Hai đơn thức $-\frac{2a}{3c}$ và $-\frac{5bc}{6a}$ đồng dạng. Bậc của đơn thức: bậc 0.

Ví dụ 2: Tính tích của các đơn thức và tìm bậc của các đơn thức, sau đó tính tổng các đơn thức đồng dạng:

a) $\left(\frac{25}{36}x^6y^5z^3\right)$ và $\left(-\frac{3}{5}\right)^2x^3y^4z^5$;

b) $-0,5x^3y^2z^4t$ và $(2yz^3)^3$;

c) $-2,5x^5y^6z^3$ và $-8,4x^4y^3z^5$;

d) $(3xy^2z^3)^2$ và $-8xyz^4t$.

✓ *Tìm cách giải:*

Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Lưu ý các phép tính về lũy thừa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ và $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Giải

a) $\left(\frac{25}{36}x^6y^5z^3\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2x^3y^4z^5\right] = \frac{1}{4}x^9y^9z^8 = 0,25x^9y^9z^8$. Bậc 26.

b) $(-0,5x^3y^2z^4t) \cdot (2yz^3)^3 = (-0,5x^3y^2z^4t) \cdot 8y^3z^9 = -4x^3y^5z^{13}t$. Bậc 22.

c) $(-2,5x^5y^6z^3)(-8,4x^4y^3z^5) = 21x^9y^9z^8$. Bậc 26.

d) $(2xy^2z^3)^2 \cdot (-8xyz^7t) = 4x^2y^4z^6 \cdot (-8xyz^7t) = -32x^3y^5z^{13}t$. Bậc 22.

Tổng các đơn thức đồng dạng:

$$0,25x^9y^9z^8 + 21x^9y^9z^8 = 21,25x^9y^9z^8.$$

$$-4x^3y^5z^{13}t - 32x^3y^5z^{13}t = -36x^3y^5z^{13}t.$$

Ví dụ 3: Cho 3 đơn thức: $3a^2x^my^{n-1}$; $\frac{2}{15}b^2(x^ny^m)^3$; $-2,5c^2x^{m+2n}y^3$ với a; b; c là các hằng số, m; n là các số tự nhiên.

a) Tìm tích P của ba đơn thức trên.

b) Tính giá trị của tích P với $a = -1$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = 2$; $m = 2$; $n = 3$; $x = -1$; $y = 1$.

Giải

a) $P = 3a^2x^my^{n-1} \cdot \frac{2}{15}b^2(x^ny^m)^3 \cdot (-2,5c^2x^{m+2n}y^3)$

$$= 3a^2 \cdot \frac{2}{15} b^2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) c^2 \cdot x^m \cdot x^{3n} \cdot x^{m+2n} \cdot y^{n-1} \cdot y^{3m} \cdot y^3$$

$$= -a^2 b^2 c^2 x^{2m+5n} y^{n+3m+2}.$$

Thay $a = -1$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = 2$; $m = 2$; $n = 3$; $x = -1$; $y = 1$

$$P = -a^2 b^2 c^2 x^{2m+5n} y^{n+3m+2} = -(-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (-1)^{19} \cdot 1^{11} = 1.$$

Ví dụ 4*: Tìm tích B của các đơn thức $B_1; B_2; B_3; \dots; B_{2018}$ với

$$B_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)x; B_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^2; B_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^3; \dots; B_{2018} = \left(1 - \frac{1}{2019}\right)x^{2018}.$$

✓ *Tìm cách giải:* Lưu ý nhân nhiều lũy thừa của cùng cơ số: $a^m \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^p = a^{m+n+\dots+p}$

Và tổng $1 + 2 + 3 + \dots + n = (1+n) \cdot n : 2$

Với $n = 2018$ thì $1 + 2 + 3 + \dots + 2018 = 2019 \cdot 2018 : 2 = 2037171$.

Giải

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \dots; 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

$$\text{Do đó: } B = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x^2 \cdot \frac{3}{4}x^3 \cdot \dots \cdot \frac{2018}{2019}x^{2018} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2018}{2019} \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{2018}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2018}{2019} = \frac{1}{2019}$$

$$x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{2018} = x^{1+2+3+\dots+2018} = x^{\frac{(1+2018) \cdot 2018}{2}} = x^{2037171}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{2019} x^{1+2+3+\dots+2018} = \frac{1}{2019} x^{2037171}.$$

Ví dụ 5: Viết các đơn thức sau dưới dạng tích của hai đơn thức trong đó một đơn thức bằng $2,5x^3y^2$.

a) $-25x^6y^4$;

b) $15x^3y^{6+n}z^3 \quad (n \in \mathbb{N})$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Gọi đơn thức nhân với $2,5x^3y^2$ để được đơn thức $-25x^6y^4$ là B.

Ta có $-25x^6y^4 = 2,5x^3y^2 \cdot B$ và $B = ax^m y^n$, trong đó:

$$a.2,5 = -25; x^3 \cdot x^m = x^6; y^2 \cdot y^n = y^4$$

$$\text{Suy ra } a = (-25) : 2,5 = -10; 3 + m = 6 \Rightarrow m = 3; 2 + n = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$\text{b) Ta có: } 15x^3y^{6+n}z^3 = 2,5x^3y^2 \cdot bx^d y^e z^g$$

$$\text{Suy ra } b = 15 : 2,5 = 6; 3 + d = 3 \Rightarrow d = 0;$$

$$2 + e = 6 + n \Rightarrow e = 4 + n \text{ và } g = 3. \text{ Lại có } x^0 = 1.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } -25x^6y^4 = 2,5x^3y^2 \cdot (-10x^3y^2);$$

$$\text{b) } 15x^3y^{6+n}z^3 = 2,5x^3y^2 \cdot 6y^{4+n}z^3.$$

Ví dụ 6: Xác định hằng số a và b để tổng các đơn thức sau đây bằng $1975x^{32}y^{23}z^{54}$

$$\text{a) } 68ax^{32}y^{23}z^{54}; -8ax^{32}y^{23}z^{54}; 86ax^{32}y^{23}z^{54}; -67ax^{32}y^{23}z^{54}.$$

$$\text{b) } ax^{32}z^{50} \cdot 2y^{23}z^4 + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-7bx^{23}y^{23}z^{51} \cdot 4x^9z^3) \text{ với } a = 2b.$$

✓ *Tìm cách giải:* Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến. Các đơn thức ở câu a) và đơn thức ở câu b) sau khi thu gọn đều là đơn thức đồng dạng. Do đó 1975 chính là tổng các hệ số của các đơn thức.

Giải

$$\text{a) } 68ax^{32}y^{23}z^{54} + (-8ax^{32}y^{23}z^{54}) + 86ax^{32}y^{23}z^{54} + (-67ax^{32}y^{23}z^{54}) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$$

$$\text{Do đó: } 68a + (-8a) + 86a + (-67a) = 1975 \text{ hay } 79a = 1975 \Rightarrow a = 25$$

$$\text{b) } ax^{32}z^{50} \cdot 2y^{23}z^4 + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-7bx^{23}y^{23}z^{51} \cdot 4x^9z^3) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$$

$$\text{Hay } ax^{32}y^{23}z^{54} + (a-b)x^{32}y^{23}z^{54} + (-28bx^{32}y^{23}z^{54}) = 1975x^{32}y^{23}z^{54}$$

$$\text{Ta có: } a + a - b - 28b = 1975 \text{ hay } 2b + 2b - b - 28b = -25b = 1975$$

$$\Rightarrow b = -79; a = -158$$

C. Bài tập áp dụng

1. Thu gọn các đơn thức sau và chỉ ra phần hệ số, phần biến và bậc của đơn thức thu gọn: (a; b; c là các hằng số)

$$\text{a) } 2xy \cdot (-0,5x^2y)^2 \cdot 3x^3yz;$$

$$\text{b) } 2,5ax^2 \cdot 6a^2xy^2;$$

c) $\frac{2c}{3}(ax^3y^2)^2 \cdot (-6a^2bx^2y)$

d) $-\frac{2(a-b)}{3}x^2yz \cdot (-2cx^3y^2)^3.$

2. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau sau đó tìm tổng các đơn thức đồng dạng đó. (với a, b là các hằng số)

$$3x^2yz; 5axyz^2; 7,5axy^2z; -\frac{2}{5}bxyz^2; -18x^2yz; 2,5xy^2z; -\frac{3}{5}bxyz^2; 2,5axy^2z$$

3. Tìm các đơn thức A, B, C, D thích hợp trong các trường hợp sau:

a) $-75x^3y^2 + A = 25x(xy)^2;$

b) $B - \frac{1}{2}ax^3y^4z^2 = \frac{1}{6}ax^3y^4z^2 - \frac{2}{3}ax^3y^4z^2$ (a là hằng số);

c) $C - 4000b^2x^3y^4 + D = 34b^2x^3y^4$ và $C - 98b^2x^3y^4 - D = -96b^2x^3y^4$

4. 1) Tính tích của các đơn thức, tìm bậc của các đơn thức tích vừa tìm (a, b là các hằng số khác 0):

a) $\frac{14}{15}x^5y^2$ và $\frac{5}{7}x^3y^2z^4t;$

b) $-0,2ax^3y^2t$ và $4,5abx^3yz^2t^2;$

c) $-5ax^2y^3$ và $\frac{1}{6a}x^4zt^6;$

d) $-\frac{a+1}{5}(x^2y^4t^2)^3$ và $\left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2.$

5. Cho a, b, c là những số khác 0:

a) Hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có thể có cùng giá trị dương không. Tại sao? Khi nào chúng có cùng giá trị âm?

b) Hai đơn thức $4a^5b^2$ và $-5a^4b^6$ cùng dấu. Tìm dấu của a.

c) Xác định dấu của c biết $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau.

6. Cho ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5; -\frac{3}{4}x^2yz^3; \frac{4}{5}xy^5z^2$. Chứng minh rằng khi x, y, z lấy những giá trị bất kỳ khác 0 thì trong ba đơn thức đã cho có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

7. Cho $M = -10^n - 10^{n+1} - 10^{n+2} - 10^{n+3} + 10^{n+4}$

$$P = 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Tính $M + P$;

b) Tính $M \cdot P$.

8. Tìm tích A của các đơn thức $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{100}$ với

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)x; A_2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)x^2; A_3 = \left(\frac{1}{4} - 1\right)x^3; \dots; A_{100} = \left(\frac{1}{101} - 1\right)x^{100}.$$

Sau đó tính giá trị của A với $x = \frac{-2015.2016 - 2}{2014.2016 + 2018}$.

9. Cho $C = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{10^2} - 1\right) x^3 y^4 z^5 t^6$

$$D = \left(\frac{7}{2.5} - \frac{13}{5.8} + \frac{19}{8.11} - \frac{25}{11.14} + \frac{31}{14.17} - \frac{37}{17.20}\right) x^6 y^5 z^4 t^3$$

Tính tích $E = -\frac{20^2}{11}CD$.

10. Cho $Q_1 = \frac{5}{10.15} x^8 y^9 z^{10}; Q_2 = \frac{6}{15.21} x^8 y^9 z^{10}; Q_3 = \frac{7}{21.28} x^8 y^9 z^{10};$

$$Q_4 = \frac{8}{28.36} x^8 y^9 z^{10}; Q_5 = \frac{14}{36.50} x^8 y^9 z^{10}$$

Tính $T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$

11. Cho $G = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) x^{m+1} y^{m+2} z^{m+3};$

$$H = \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{45}\right) x^{n-1} y^{n-2} z^{m-3} \text{ với } m, n \in \mathbb{N}; n \geq 2; m \geq 3;$$

Tính $G.H$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.

a) $2xy \cdot (-0,5x^2y)^2 \cdot 3x^3yz = -3x^8y^4z$.

Hệ số: -3 ; phần biến: x^8y^4z ; bậc: 13.

b) $2,5ax^2 \cdot 6a^2xy^2 = 15a^3x^3y^2$.

Hệ số: $15a^3$; phần biến: x^3y^2 ; bậc: 5.

c) $\frac{2c}{3}(ax^3y^3)^2 \cdot (-6a^2bx^2y^5) = -4a^4bcx^8y^{11}$.

Hệ số: $-4a^4bc$; phần biến: x^8y^{11} ; bậc: 19;

d) $-\frac{2(a-b)^2}{3}x^2y^2z \cdot (-2cx^3y^2)^3 = \frac{4c(a-b)^2}{3}x^{11}y^8z$

Hệ số: $\frac{4c(a-b)^2}{3}$; phần biến: $x^{11}y^8z$; bậc: 20.

2.

Nhóm 1: $3x^2yz + (-18x^2yz) = -15x^2yz$.

Nhóm 2: $5axyz^2 + \left(-\frac{2}{5}bxyz^2\right) + \left(-\frac{3}{5}bxyz^2\right) = (5a-b)xyz^2$.

Nhóm 3: $7,5axy^2z + 2,5xy^2z + 2,5axy^2z = (10a + 2,5)xy^2z$

3.

a) $A = 25x^3y^2 + 75x^3y^2 = 100x^3y^2$;

b) $B = \frac{1}{2}ax^3y^4z^2 - \frac{1}{6}ax^3y^4z^2 + \frac{2}{3}ax^3y^4z^2 = ax^3y^4z^2$

c) $C + D = 4034b^2x^3y^4$ và $C - D = 2b^2x^3y^4$

Tìm được $C = 2018b^2x^3y^4$ và $D = 2016b^2x^3y^4$.

4.

a) $\frac{14}{15}x^5y^2 \cdot \frac{5}{7}x^3y^2z^4t^{10} = \frac{2}{3}x^8y^4z^4t^{10}$. Bậc 26.

b) $-0,2ax^3y^2t \cdot 4,5abx^3yzt^2 = -0,9a^2bx^6y^3zt^3$. Bậc 13.

c) $-5ax^2y^3 \cdot \frac{1}{6a}x^4zt^6 = -\frac{5}{6}x^6y^3zt^6$. Bậc 16.

d) $-\frac{a+1}{5}(x^2y^4t^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2 = -\frac{a+1}{20b^2}x^{12}y^{14}t^6$. Bậc 32.

5.

a) $-5a^6b^2 < 0$ với mọi giá trị của a và b nên không thể có giá trị dương. Do đó hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ không thể có cùng giá trị dương.

Xét $4a^2b^5$ nhận giá trị âm khi $b < 0$ nên hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có cùng giá trị âm khi $b < 0$.

b) Hai đơn thức cùng dấu nên $4a^3b^2 \cdot (-5a^4b^6) = -20a^9b^8 > 0$

$b^8 > 0$; do đó $a^9 < 0$. Khi ấy $a < 0$.

c) $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau nên

$$3a^2b^5c \cdot (-12a^4b^5c^2) = -36a^6b^{10}c^3 < 0 \text{ mà } a^6b^{10} > 0 \Rightarrow c^3 > 0 \Rightarrow c > 0.$$

6.

Xét tích ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2yz^3\right) \cdot \frac{4}{5}xy^5z^2 = -\frac{2}{5}x^6y^8z^{10} < 0$ với mọi giá trị khác 0 của x, y, z.

Do đó có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

7.

$$M = 10000 \cdot 10^n - 1000 \cdot 10^n - 100 \cdot 10^n - 10 \cdot 10^n - 10^n = 8889 \cdot 10^n$$

$$P = 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n = 16 \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n - 2^n = 9 \cdot 2^n$$

a) $M + P = 8889 \cdot 10^n + 9 \cdot 2^n$;

b) $M \cdot P = 80001 \cdot 20^n$.

8.

Lưu ý: $a^m \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^p = a^{m+n+\dots+p}$;

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = (1 + 100) \cdot 100 : 2 = 5050$;

và $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$; ...; $\frac{1}{101} - 1 = -\frac{100}{101}$.

Do đó $A = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{100}{101}\right) \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{100}$.

Tích có 100 thừa số âm nên tích dương và

$$A = \frac{1}{101} x^{1+2+3+\dots+100} = \frac{1}{101} x^{5050}.$$

$$x = \frac{-2015.2016 - 2}{2014.2016 + 2018} = -\frac{(2014+1).2016 + 2}{2014.2016 + 2018} = -\frac{2014.2016 + 2018}{2014.2016 + 2018} = -1$$

Vậy $A = \frac{1}{101} (-1)^{5050} = \frac{1}{101}.$

9. Ta thấy tích $P = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10^2} - 1\right)$ **có 9 thừa số âm nên tích âm. Do đó:**

$$P = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{80}{81} \cdot \frac{99}{100} = -\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{9.11}{10.10}$$

$$= -\frac{1.2.3 \dots 8.9}{2.3.4 \dots 9.10} \cdot \frac{3.4.5 \dots 10.11}{2.3.4 \dots 9.10} = -\frac{11}{20}$$

Xét $Q = \frac{7}{2.5} - \frac{13}{5.8} + \frac{19}{8.11} - \frac{25}{11.14} + \frac{31}{14.17} - \frac{37}{17.20}$

mỗi số hạng đều có dạng $\frac{a+b}{a.b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ **do đó**

$$Q = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{8} - \frac{1}{14} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} - \frac{1}{17}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

Do đó $E = 9x^9y^9z^9t^9$

10.

$$T = \left(\frac{5}{10.15} + \frac{6}{15.21} + \frac{7}{21.28} + \frac{8}{28.36} + \frac{14}{36.50}\right) x^8y^9z^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{50}\right) x^8y^9z^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right) x^8y^9z^{10} = \frac{2}{25} x^8y^9z^{10}$$

11. Ta có:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{45}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \left(1 - \frac{2}{4.5}\right) \left(1 - \frac{2}{5.6}\right) \left(1 - \frac{2}{6.7}\right) \left(1 - \frac{2}{7.8}\right) \left(1 - \frac{2}{8.9}\right) \left(1 - \frac{2}{9.10}\right)$$

$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{8.11}{9.10} = \frac{11}{27}.$$

Vậy $G.H = \frac{11}{27} x^{m+n} y^{m+n} z^{2m}.$

Chủ đề 2.ĐA THỨC – ĐA THỨC MỘT BIẾN- CỘNG TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

* Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

* Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

2. Để cộng (hay trừ) các đa thức ta dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính.

3. Phép cộng các đa thức có tính chất giao hoán và kết hợp.

4. Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

* Đa thức một biến x được ký hiệu $f(x); g(x) \dots$ hoặc $A(x); B(x) \dots$

* Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

* Giá trị của đa thức một biến $f(x)$ tại $x = a$ được ký hiệu $f(a)$

* Đa thức một biến (sau khi rút gọn) thường được sắp theo lũy thừa giảm dần hay tăng dần của biến.

* Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến.

5. Đa thức một biến bậc n có dạng thu gọn:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \quad (\text{với } a_n \neq 0)$$

Trong đó $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n$ là các hệ số; a_0 là số hạng độc lập hay hệ số tự do.

* $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ là nhị thức bậc nhất.

* $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ là tam thức bậc hai.

6. Để cộng hay trừ hai đa thức một biến, ta có hai cách:

a) Dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính.

b) Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

7. Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

* a là nghiệm của $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

* Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm.

* Số nghiệm số của một đa thức không vượt quá bậc của nó.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thu gọn các đa thức sau và cho biết bậc của mỗi đa thức:

a) $A = 15x^2y^3 - 3xy^3 + 16x^2y^3 - 16xy^3 - 15x^2y^3 + 18xy^3 - 3,75x^3y^4$

b) $B = \frac{3}{5}xy - 0,25x^2yz - 13xy + 6,75x^2yz + 6xy - 2,5x^2yz + \frac{2}{5}xy$

✓ *Tìm cách giải:* Để thu gọn đa thức ta xem trong đa thức có những đơn thức nào đồng dạng rồi thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng.

a) $A = (15x^2y^3 - 15x^2y^3 + 16x^2y^3) + (-3xy^3 - 16xy^3 + 18xy^3) - 3,75x^3y^4;$

b) $B = \left(\frac{3}{5}xy + \frac{2}{5}xy - 13xy + 6xy\right) + (-0,25x^2yz + 6,75x^2yz - 2,5x^2yz).$

Giải

a) $A = 16x^2y^3 - xy^3 - 3,75x^3y^4$ Bậc của đa thức là 7.

b) $B = -6xy + 4x^2yz$. Bậc của đa thức là 4.

Ví dụ 2: Cho hai đa thức: $C = 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2$ và $D = -3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2$.

a) Tính $C + D$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $x = 1$ và $y = -2$;

b) Tính $C - D$;

c) Tìm đa thức E sao cho $E + C = D$;

d) Tìm đa thức M biết: $M + 2(x^2 - 4y^2) + D = 16x^2 - 4xy + 5y^2 + C$.

✓ *Tìm cách giải:* Thực hiện các phép toán cộng trừ hai đa thức ta làm tương tự như việc dựa vào quy tắc “dấu ngoặc” và tính chất của các phép tính trên số để cộng trừ các biểu thức số.

Giải

a) $C + D = (9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2) + (-3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2)$

$$= 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2 - 3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2$$

$$= (9,5x^2 - 3,5x^2) + (-5xy + 4xy) + (3,2y^2 - 1,8y^2)$$

$$= 6x^2 - xy + 1,4y^2.$$

Tại $x = 1; y = -2$ thì $C + D = 6.1^2 - 1.(-2) + 1,4.(-2)^2 = 13,6$.

b) $C - D = (9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2) - (-3,5x^2 + 4xy - 1,8y^2)$

$$= 9,5x^2 - 5xy + 3,2y^2 + 3,5x^2 - 4xy + 1,8y^2$$

$$= (9,5x^2 + 3,5x^2) + (-5xy - 4xy) + (3,2y^2 + 1,8y^2)$$

$$= 13x^2 - 9xy + 5y^2.$$

$$c) E + C = D \Leftrightarrow E = D - C = -(C - D) = -13x^2 + 9xy - 5y^2.$$

$$d) M + 2(x^2 - 4y^2) + D = 16x^2 - 4xy + 5y^2 + C$$

$$M = (16x^2 - 4xy + 5y^2) - 2(x^2 - 4y^2) + C - D$$

$$= 16x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x^2 + 8y^2 + 13x^2 - 9xy + 5y^2$$

$$= (16x^2 + 13x^2 - 2x^2) + (-4xy - 9xy) + (5y^2 + 8y^2 + 5y^2)$$

$$= 27x^2 - 13xy + 18y^2$$

Ví dụ 3: Cho đa thức

$$A(x) = bx + (b - 2)x^5 - (a - 12)x^6 + 0,5ax^3 - 5x^2 - bx^3 + 4cx^4 - 10 + 11x^5 + 6x^6 + ax - c(x - 1)$$

a) Viết đa thức dưới dạng thu gọn với các hệ số bằng số, biết rằng $A(x)$ có bậc là 5; hệ số cao nhất là 19 và hệ số tự do là -15;

b) Tính $3A(1) - 2A(-1)$.

✓ *Tìm lời giải:* a) Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến. $A(x)$ có bậc là 5 nên hệ số của x^6 trong đa thức rút gọn phải là 0. Hệ số cao nhất chính là hệ số của x^5 và hệ số tự do chính là $(c - 10)$ của đa thức rút gọn. Từ đó tìm ra a, b, c.

b) $A(m)$ là giá trị của $A(x)$ khi thay $x = m$.

Giải

$$a) A(x) = 6x^6 - (a - 12)x^6 + 11x^5 + (b - 2)x^5 + 4cx^4 + 0,5ax^3 - bx^3 - 5x^2 + (a - c)x + bx + c - 10$$

$$= (-a + 18)x^6 + (b + 9)x^5 + 4cx^4 + (0,5a - b)x^3 - 5x^2 + (a - c + b)x + (c - 10)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} -a + 18 = 0 \\ b + 9 = 19 \\ c - 10 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 10 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$A(x) = 19x^5 - 20x^4 - x^3 - 5x^2 + 33x - 15$$

$$b) A(1) = 19 - 20 - 1 - 5 + 33 - 15 = 11$$

$$A(-1) = 19(-1)^5 - 20(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 33(-1) - 15$$

$$= -19 - 20 + 1 - 5 - 33 - 15 = -91$$

Nên $3A(1) - 2A(-1) = 3.11 - 2.(-91) = 33 + 182 = 215$.

Ví dụ 4: Cho $f(x) = 2x + 10(x^3 - 1) + 20x^6 - 5(x^7 + x^5) + 1,5x^4 - 10 + 6x$

và $g(x) = 2(x^3 + x^5) - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8$.

a) Thu gọn và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của các đa thức;

b) Tính $g(x) + f(x)$ theo cách bỏ dấu ngoặc;

c) Tính $g(x) - f(x)$ theo cách đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột.

Giải

a) $f(x) = 2x + 10x^3 - 10 + 20x^6 - 5x^7 - 5x^5 + 1,5x^4 - 10 + 6x$

$$= -5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 + 8x - 10.$$

và $g(x) = 2x^3 + 2x^5 - 5x^7 - 7x^2 - 11x^3 + 2,5x^4 - 9 + 4,2x^2 + 1,5x^4 + 13x^8$

$$= 13x^8 - 5x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 2,8x^2 - 9.$$

b)

$$g(x) + f(x) = (13x^8 - 5x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 2,8x^2 - 9) + (-5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 + 8x - 10)$$

$$= 13x^8 + (-5x^7 - 5x^7) + 20x^6 + (2x^5 - 5x^5) + (4x^4 + 1,5x^4) + (-9x^3 + 10x^3) - 2,8x^2 + 8x + (-9 - 10)$$

$$= 13x^8 - 10x^7 + 20x^6 - 3x^5 + 5,5x^4 + x^3 - 2,8x^2 + 8x - 19$$

c)

$$g(x) = 13x^8 - 5x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 - 2,8x^2 - 9$$

$$f(x) = -5x^7 + 20x^6 - 5x^5 + 1,5x^4 + 10x^3 + 8x - 10$$

$$g(x) - f(x) = 13x^8 - 20x^6 + 7x^5 + 2,5x^4 - 19x^3 - 2,8x^2 - 8x + 1$$

Ví dụ 5:

a) Tìm đa thức $A(x) = ax + b$ biết rằng $A(-1) = -15$ và $A(2) = -9$.

b) Tìm các hệ số a, b, c của đa thức

$$B(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ biết rằng } B(0) = 2; B(-1) = 2; B(1) = 8 \text{ và } a = 2c$$

✓ *Tìm cách giải:*

a) $A(-1) = -15$ có nghĩa là -15 là giá trị của $A(x)$ tại $x = -1$.

Thay $x = -1$ vào đa thức sẽ tìm được $-a + b = -15$. Tương tự thay $x = 2$ vào đa thức ta sẽ tìm được $2a + b = -9$. Từ hai đẳng thức trên ta tìm được a và b .

b) $B(0) = 2$ ta thấy ngay $d = 2$. Tìm a, b và c tương tự như câu a) lưu ý là $a = 2c$.

Giải

a) Ta có $A(-1) = a(-1) + b = -a + b = -15 \Rightarrow b = a - 15$

$$A(2) = a.2 + b = -9 \text{ hay } 2a + b = -9$$

Thay $b = a - 15$ vào ta có $2a + a - 15 = -9 \Rightarrow 3a = 6$

$$\Rightarrow a = 2; b = 2 - 15 = -13.$$

Vậy $A(x) = 2x - 13$.

b) $B(0) = a.0^2 + b.0 + c.0 + d = 2$ nên $d = 2$ và do $a = 2c$ nên

$$B(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + 2 = 8 \Rightarrow a + b + c = 6 \Rightarrow 3c + b = 6 \quad (1)$$

$$B(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 2 = 2 \Rightarrow -a + b - c = 0$$

$$\Rightarrow -3c + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Thay $b = 3$ vào (1) ta có: $3c + 3 = 6 \Rightarrow c = 1$. Do $a = 2c$ nên $a = 2$.

Vậy đa thức là $B(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 2$.

Ví dụ 6: Cho đa thức $C(x) = 2015x^2 + mx + n$ (m và n là các hằng số)

Biết $C(-1) = 2018$ và $C(2) = 8069$. Tính $\frac{C(-2) - C(1)}{671}$.

✓ *Tìm cách giải:* Từ $C(-1) = 2018$ và $C(2) = 8069$ ta tìm được các hệ số m và n của đa thức.

Từ đó tính $C(1); C(-2)$ và giá trị biểu thức cần tìm.

Giải

Ta có $C(-1) = 2015(-1)^2 + m(-1) + n = 2018 \Rightarrow n = 3 + m$

và $C(2) = 2015.2^2 + m.2 + n = 8069 \Rightarrow 2m + n = 9$ thay $n = 3 + m$ vào ta có

$$2m + (3 + m) = 9 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2; n = 5.$$

Vậy $C(x) = 2015x^2 + 2x + 5$.

$$C(1) = 2015.1^2 + 2.1 + 5 = 2022.$$

$$C(-2) = 2015.(-2)^2 + 2.(-2) + 5 = 8061.$$

$$\frac{C(-2) - C(1)}{671} = \frac{8061 - 2022}{671} = 9.$$

Ví dụ 7: Hai đa thức đồng nhất (ký hiệu $\equiv$) là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến. hãy xác định a, b, c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$$f(x) = ax^2 + 10(x + x^2) - 76x - (36x^2 + 2x) + 2019$$

$$g(x) = 15x^2 + (3 - b)x + 8x - 9x^2 + c + 2018.$$

✓ *Tìm lời giải:* Để hai đa thức đồng nhất (tức là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến) thì các hệ số tương ứng với mỗi lũy thừa cùng bậc của biến phải bằng nhau. Do đó trước hết rút gọn từng đa thức và tìm a, b, c để hệ số tương ứng của mỗi lũy thừa cùng bậc của biến của hai đa thức bằng nhau.

Giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + 10(x + x^2) - 76x - (36x^2 + 2x) + 2019$

$$= ax^2 + 10x^2 - 36x^2 - 66x - 2x + 2019$$

$$= (a - 26)x^2 - 68x + 2019$$

$$g(x) = 15x^2 + (3 - b)x + 8x - 9x^2 + c + 2018$$

$$= 6x^2 + (11 - b)x + c + 2018$$

$$\text{Để } f(x) \equiv g(x) \text{ ta phải có } \begin{cases} a - 26 = 6 \\ 11 - b = -68 \\ 2019 = c + 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = 79 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 8: Dạng tổng quát của đa thức một biến là:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

($a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$ là các hằng số)

a) Chứng minh rằng tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x = 1$;

b) Chứng minh rằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = -1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

✓ *Tìm lời giải:*

a) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x = 1$; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

b) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x = -1$; lưu ý lũy thừa bậc chẵn của (-1) là số $(+1)$ và lũy thừa bậc lẻ của (-1) là (-1) . Xét hai trường hợp: n chẵn và n lẻ; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } f(1) &= a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Vậy tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

b) Với n chẵn ta có:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \dots + a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ &= a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ &= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_n) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}) \end{aligned}$$

Với n lẻ ta có:

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + \dots + a_3 \cdot (-1)^3 + a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ &= -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\ &= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{n-3} + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_n) \end{aligned}$$

Vậy giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = -1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

C. Bài tập áp dụng

1. Cho hai đa thức: $E = 2,5x^2 - \frac{1}{6}y^5 + 6xy - \frac{1}{3}y^5$ và $F = 7,5x^2 - 2xy - 1,5y^5$.

a) Tính $E + F$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $|x| = 2; y = -1$;

b) Tính $E - F$ sau đó tìm giá trị của hiệu tại $x = y - 1; |y - 2| = 1$,

2.

a) Thu gọn đa thức sau:

$$D = (x^2 - 2x^2y) + (2x^2 - 4x^2y) + (3x^2 - 6x^2y) + \dots + (10x^2 - 20x^2y)$$

b) Cho $g(x-1) = 2x + 2017$ với mọi x

Tính tổng $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+99)$.

3. Tìm các đa thức M và N biết:

a) $M + (15x^2 - 22y^2) = 16x^2 - 25xy - 32y^2$;

b) $(47,5x^2y - 6,8xy^2 + 1,2xy) - N = 1,2xy + 22,5x^2y - 1,8xy^2$.

4. Cho các đa thức: $T = 2x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 5y + 3$;

$$U = 2x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x + 4y - 3$$

Tìm đa thức R; S và V sao cho:

a) $S - U = T$;

b) $T + V = U$;

c) $R - (T - U) = 5x^2 - 4xy - y^2$.

5. Cho đa thức $P(x) = 12,5 - 3,5x^5 - 28x^3 + 15x^6 + 8x^3 - 16x - 5x^4 + 4,5x^5 - 4x^2 + 19x^8$

a) Thu gọn và sắp xếp đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do, hệ số của x^5 , hệ số của x^7 trong $P(x)$ với

$$P(x) = 12,5 - 3,5x^5 - 28x^3 + 15x^6 + 8x^3 - 16x - 5x^4 + 4,5x^5 - 4x^2 + 19x^8.$$

6. Cho các đa thức:

$$Q(x) = 15,4x^3 - 2,4x^7 + 1,2x^4 + 6x^8 + 2,8x^4 + 7,2x^2 - 6x + (5+b) - 1\frac{2}{3}x^5$$

$$G(x) = x^2 - 3,7x^4 + ax^8 - 2,3x^4 + 7,5x^6 - 5,6x^7 - 2x - (3+a-4b) - 2\frac{1}{3}x^5.$$

a) Với a, b là hằng số, thu gọn rồi sắp xếp Q(x), G(x) theo lũy thừa giảm dần của biến số.

Tính Q(x) + G(x) rồi sắp xếp tổng theo lũy thừa tăng dần của biến số.

b) Tìm a và b biết hệ số cao nhất và hệ số tự do đều là 2018.

7. Tính giá trị các đa thức sau tại $|x| = 1$:

a) $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018} + 2019x^{2019}$

b) $g(x) = 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \dots + 200x^{100} + 202x^{101}$

8. Cho $A(x) = 2x^6 + 12x^5 - 2,5x^3 + 3x^4 - 7,5x^3 - 2x^2 - 6x + 5x^2 + 5$

$$B(x) = 3x^6 + 3x - 2,8x^2 - 6x^3 + 2x^5 + 0,8x^2 + 15.$$

a) Tính $2A(x) + 3B(x)$;

b) Tính $A(x) - B(x)$;

c) Tính $B(x) - A(x)$;

d) Nhận xét về các hệ số của $A(x) - B(x)$ với $B(x) - A(x)$.

9. Cho $C(x) = 5x^4 - 4,8x^3 + 2,5x^2 - 16x + 25$.

Tìm đa thức $D(x)$; $E(x)$; $F(x)$ sao cho:

a) $C(x) + D(x) = 2x^5 - 4,8x^3 + 4x + 20$;

b) $C(x) - E(x) = 4x^3 - 5,5x^2 + 6x$;

c) $F(x) - C(x) + 12x^5 - 4,5x^3 = -6,5x^2 + 4,5x + 18$.

10. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + a_{2019}x^{2019}$;

$$g(x) = b_0 + 2b_1x + 3b_2x^2 + \dots + 2019b_{2018}x^{2018} + 2020b_{2019}x^{2019}$$

với $a_0, a_1, \dots, a_{2018}, a_{2019}, b_0, b_1, \dots, b_{2018}, b_{2019}$ là các hằng số

a) Tính $2f(1) + g(1)$;

b) $f(-1) - g(-1)$;

c) Tính $f(n) + g(n)$ với n là hằng số.

11. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + (x-99) + (x-100)$;

b) $3x^2 - \sqrt{8}x$.

12. Chứng minh các đa thức $f(x) = 2x^2 + 5,2$ và $g(x) = -(x-3)^2 - 8$ không có nghiệm.

13. Tìm nghiệm các đa thức sau:

a) $h(x) = (x-2,5)(x+2,5)$;

b) $k(x) = (2x+1)(x-7)(x-5)(2x-9)(4x-30)$

c) $p(x) = (x+2\sqrt{5})(x^2+9)$

d) $q(x) = x^2 - 8$.

14. Chứng minh:

a) Nếu $x=1$ là một nghiệm của đa thức

$A(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ thì $a_{10} + a_9 + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$;

b) Nếu đa thức $B(y) = b_{10}y^{10} + b_9y^9 + \dots + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0$

có $b_{10} + b_8 + b_6 + b_4 + b_2 + b_0 = b_9 + b_7 + b_5 + b_3 + b_1$ thì $y = -1$ là một nghiệm của đa thức.

15. Tìm giá trị của m biết đa thức:

$f(y) = 14y^4 - 5my^3 + 6my^2 + 8m(y+1)$ có một nghiệm là $y = -2$.

16. Cho đa thức $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 4a$ ($a \neq 0$).

a) Tìm quan hệ giữa các hệ số a và c; b và d của đa thức $f(x)$ để $f(x)$ có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$.
Thử lại với $a = 3$; $b = 4$;

b) Với $a = 1$; $b = 1$. Hãy cho biết $x = 1$ và $x = -1$ có phải là nghiệm của đa thức vừa tìm?

17. Hãy xác định a, b, c, d để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$f(x) = 16x^3 + 2bx^2 + 8x - 5bx - 10(x^2 - 2x) + 24$;

$g(x) = (a-6)x^3 - 15x^2 + (2-3b)x + 3cx + x^2 + 6.(c-d)$.

18. Cho số $\overline{abc}$. Ta gọi số có ba chữ số mà vị trí các chữ số a; b; c đổi chỗ cho nhau (chẳng hạn $\overline{bac}$) là một hoán vị của nó. Tìm số $\overline{abc}$ có ba chữ số đều khác nhau và khác 0 có $a < b < c$. Biết tổng của số ấy với tất cả các hoán vị của nó là 1998.

19. Tìm tổng tất cả các nghiệm của đa thức:

$$F(x) = \left(x^2 - \frac{1}{100^2}\right) \dots \left(x^2 - \frac{1}{3^2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right) (x^2 - 1)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \dots (x^2 - 100^2).$$

20. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc biết:

a) $f(x) = (-3x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1)^{2019}$;

b) $g(x) = (19x^2 - 8x - 10)^{1945} \cdot (30x^3 + 4x^2 + 1975x - 2010)^{2018}$.

c) $h(x) = 81 + 77x + 73x^2 + 69x^3 + 65x^4 + \dots + 9x^{18} + 5x^{19} + x^{20}$.

21. Cho đa thức $f(x) = ax + b$ với $a, b \in R$ và $a \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu đa thức có nghiệm là $x = x_0$ thì $f(x) = a(x - x_0)$;

b) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$ và $a \neq 0$ nếu có nghiệm -1 thì $b = a + c$.

22. Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$ với $(a, b, c) \in R$.

Biết $Q(0), Q(1), Q(2)$ là các số nguyên;

a) Chứng minh rằng c, a+b, 2a là các số nguyên;

b) Chứng minh rằng với mọi x là số nguyên thì $Q(x)$ luôn là một số nguyên.

(Đề thi vào trường THPT chuyên tỉnh Hà Tây năm học 2016-2017)

23. Cho hai đa thức:

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$Q(x) = -x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2007.$$

Tính giá trị của $P(x) - Q(x)$ biết rằng $\frac{2008 \times 2010 - 1}{2007 + 2008 \times 2009}(x+1) = 2$.

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 20014-2015)

24. Cho hai đa thức: $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

a) Tính $h(x) = f(x) - g(x)$;

b) Tìm nghiệm của đa thức $h(x)$;

c) Tính giá trị của đa thức $h(x)$

với $(x^2 - 9)^{2011} = \left(\frac{3}{4} - 81\right) \left(\frac{3^2}{5} - 81\right)^2 \left(\frac{3^3}{6} - 81\right)^3 \dots \left(\frac{3^{2010}}{2013} - 81\right)^{2010}$.

25. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Tính $f(1)$; $f(-2)$;

b) Cho biết $5a - b + 2c = 0$. Chứng minh rằng $f(1) \times f(2) \leq 0$;

c) Cho $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$. Chứng minh rằng khi đó đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

26. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x) + 3P(2) = 5x^2$ với mọi giá trị của x . Tính $P(3)$.

(Đề thi Olympic Toán Tuổi Thơ 2018)

27. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương, biết: $f(5) - f(4) = 2012$. Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, năm học 2012-2013).

28. Tìm nghiệm của đa thức $f(x) = |3 - |x - 1|| - 2x$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 7 huyện Yên Lạc, Vĩnh Phúc, năm học 2015-2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.

a) $E + F = 10x^2 + 4xy - 2y^5$;

Nếu $|x| = 2$ ta có $x = \pm 2$.

+ Với $x = 2$ và $y = -1$.

Ta có: $E + F = 10.2^2 + 4.2.(-1) - 2(-1)^5 = 34$.

+ Với $x = -2$ và $y = -1$.

Ta có: $E + F = 10.(-2)^2 + 4.(-2).(-1) - 2.(-1)^5 = 50$.

b) $E - F = -5x^2 + 8xy + y^5$;

Nếu $|y - 2| = 1$ ta có $y - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Với $y = 3$ thì $x = 2$.

Ta có: $E - F = -5.2^2 + 8.2.3 + 3^5 = 271$.

+ Với $y = 1$ thì $x = 0$.

Ta có: $E - F = 1^5 = 1$.

2.

a) Cách 1:

$$D = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)x^2 - (2 + 4 + 6 + \dots + 20)x^2y = 55x^2 - 110x^2y$$

Cách 2:

$$D = (x^2 - 2x^2y) + 2(x^2 - 2x^2y) + 3(x^2 - 2x^2y) + \dots + 10(x^2 - 2x^2y)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + 10)(x^2 - 2x^2y)$$

$$= 55(x^2 - 2x^2y) = 55x^2 - 110x^2y.$$

b) Do $g(x-1) = 2x + 2017$ với mọi x nên:

Đặt $y = x - 1$ thì $y + 1 = x$ khi đó $g(y) = 2(y + 1) + 2017 = 2y + 2019$.

Vậy $g(x) = 2x + 2019$.

Ta có: $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+99)$

$$= 2x + 2019 + [2(x+1) + 2019] + [2(x+2) + 2019] + \dots + [2(x+99) + 2019]$$

$$= 2x \cdot 100 + (2 + 4 + 6 + \dots + 198) + 2019 \cdot 100$$

$$= 200x + (2 + 198) \cdot 99 : 2 + 201900 = 200x + 9900 + 201900$$

$$= 200x + 211800$$

3.

a) $M = (16x^2 - 25xy - 22y^2) - (15x^2 - 22y^2) = x^2 - 25xy$

b) $N = (47,5x^2y - 6,8xy^2 + 1,2xy) - (1,2xy + 22,5x^2y - 1,8xy^2)$

$$= 25x^2y - 5xy^2$$

4.

a) $S = T + U = 4x^2 - 3y^2 + 6xy - y$.

b) $V = U - T = -y^2 + 2xy - 4x + 9y - 6$.

c) $R = 5x^2 - 4xy - y^2 - (U - T) = 5x^2 - 4xy - y^2 - V$

$$= 5x^2 - 6xy + 4x - 9y + 6$$

5.

a) $P(x) = 19x^8 + 15x^6 + x^5 - 5x^4 - 20x^3 - 4x^2 - 16x + 12,5$;

b) Hệ số cao nhất là 19; hệ số tự do là 12,5; hệ số của x^5 là 1; hệ số của x^7 là 0

6.

a) $Q(x) = 6x^8 - 2,4x^7 - \frac{5}{3}x^5 + 4x^4 + 15,4x^3 + 7,2x^2 - 6x + (5+b)$

$$G(x) = ax^8 - 5,6x^7 + 7,5x^6 - \frac{7}{3}x^5 - 6x^4 + x^2 - 2x - (3+a-4b)$$

$$Q(x) + G(x) = (2-a+5b) - 8x + 8,2x^2 + 15,4x^3 - 2x^4 - 4x^5 + 7,5x^6 - 8x^7 + (a+6)x^8.$$

b) Ta có: $a+6 = 2018 \Leftrightarrow a = 2012$.

$$2 - a + 5b = 2018 \Leftrightarrow 5b = 2018 + 2012 - 2 \Leftrightarrow b = 805,6.$$

$$7. |x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$a) f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2018 + 2019 = (1 + 2019) \cdot 2019 = 2039190.$$

$$f(-1) = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 2017 + 2018 - 2019 = 1009 - 2019 = -1010$$

$$b) g(1) = 2 + 4 + 6 + \dots + 200 + 202 = \frac{(2 + 202) \cdot 101}{2} = 10302$$

$$g(-1) = (-2 + 4) + (-6 + 8) + \dots + (-198 + 200) - 202$$

$$\text{Có 50 cặp mỗi cặp có kết quả bằng 2 vậy } g(-1) = 100 - 202 = -102.$$

$$8. A(x) = 2x^6 + 12x^5 + 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 6x + 5$$

$$B(x) = 3x^6 + 2x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 15$$

$$a) 2A(x) + 3B(x) = 13x^6 + 30x^5 + 6x^4 - 38x^3 - 3x + 55.$$

$$b) A(x) - B(x) = -x^6 + 10x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x - 10.$$

$$c) B(x) - A(x) = x^6 - 10x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 9x + 10$$

d) Dấu các hệ số của các lũy thừa tương ứng của biến ngược dấu nhau.

9.

$$a) D(x) = 2x^5 - 5x^4 - 2,5x^2 + 20x - 5.$$

$$b) E(x) = 5x^4 - 8,8x^3 + 8x^2 - 22x + 25.$$

$$c) F(x) = -6,5x^2 + 4,5x + 18 - 12x^5 + 4,5x^3 + 5x^4 - 4,8x^3 + 2,5x^2 - 16x + 25 \\ = -12x^5 + 5x^4 - 0,3x^3 - 4x^2 - 11,5x + 43.$$

10.

$$a) 2f(1) + g(1) = (2a_0 + b_0) + (2a_1 + 2b_1) + (2a_2 + 3b_2) + \dots + (2a_{2018} + 2019b_{2018}) + (a_{2019} + 2020b_{2019});$$

b)

$$f(-1) - g(-1) = (a_0 - b_0) + (2b_1 - a_1) + (a_2 - 3b_2) + (4b_3 - a_3) + \dots + (a_{2018} - 2019b_{2018}) + (2020b_{2019} - a_{2019})$$

c)

$$f(n) + g(n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + 2b_1)n + (a_2 + 3b_2)n^2 + \dots + (a_{2018} + 2019b_{2018})n^{2018} + (a_{2019} + 2020b_{2019})n^{2019}$$

11.

a) $x = 50,5$

b) $x = 0$ và $x = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

12.

Do $x^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x (ký hiệu: $\forall x$) nên $2x^2 + 5,2 \geq 5,2$ hay $2x^2 + 5,2 \neq 0 \forall x$ nên đa thức $f(x) = 2x^2 + 5,2$ không có nghiệm.

Tương tự: $-(x-3)^2 - 8 \neq 0 \forall x$ nên $g(x)$ không có nghiệm

13.

a) $x = 2,5$ và $x = -2,5$ là hai nghiệm của $h(x)$;

b) $x = -0,5$; $x = 7$; $x = 5$; $x = -4,5$ và $x = 7,5$ là năm nghiệm của $k(x)$;

c) $x = -2\sqrt{5}$ là nghiệm của $p(x)$.

d) $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \end{cases}$.

14.

a) $x = 1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$ nên $A(1) = 0$

hay $a_{10} \cdot 1^{10} + a_9 \cdot 1^9 + \dots + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0$

hay $a_{10} + a_9 + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

b) Theo đầu bài: $b_{10} + b_8 + b_6 + b_4 + b_2 + b_0 = b_9 + b_7 + b_5 + b_3 + b_1$

Hay $b_{10} - b_9 + b_8 - b_7 + b_6 - b_5 + b_4 - b_3 + b_2 - b_1 + b_0 = 0$

Xét $B(-1) = b_{10} \cdot (-1)^{10} + b_9 \cdot (-1)^9 + b_8 \cdot (-1)^8 + b_7 \cdot (-1)^7 + b_6 \cdot (-1)^6 + b_5 \cdot (-1)^5$

$$+b_4.(-1)^4 + b_3.(-1)^3 + b_2.(-1)^2 + b_1.(-1) + b_0$$

$$= b_{10} - b_9 + b_8 - b_7 + b_6 - b_5 + b_4 - b_3 + b_2 - b_1 + b_0 = 0$$

Chứng tỏ (-1) là một nghiệm của $B(y)$.

15.

$y = -2$ là nghiệm thì $f(-2) = 0$

$$\text{Nghĩa là: } 14.(-2)^4 - 5m(-2)^3 + 6m(-2)^2 + 8m(-2+1) = 0$$

$$\text{Hay } 224 + 40m + 24m - 8m = 0 \Leftrightarrow 224 + 56m = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

16.

$$\text{a) } f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + 4a = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } f(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + 4a = 0 \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2) } \Rightarrow 40a + 8c = 0 \text{ hay } c = -5a$$

$$\text{Trừ (1) và (2) } \Rightarrow 16b + 4d = 0 \text{ hay } d = -4b$$

$$\text{Ta có: } f(x) = ax^4 + bx^3 - 5ax^2 - 4bx + 4a.$$

Thử lại với $a = 3; b = 4$ thì $c = -15; d = -16$.

$$\text{Ta có: } f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 16x + 12$$

$$f(2) = 48 + 32 - 60 - 32 + 12 = 0 \text{ chứng tỏ } x = 2 \text{ là nghiệm của đa thức.}$$

$$f(-2) = 48 - 32 - 60 + 32 + 12 = 0 \text{ chứng tỏ } x = -2 \text{ là nghiệm của đa thức.}$$

$$\text{b) } a = 1; b = 1 \text{ ta có: } f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$f(1) = -3 \text{ nên } x = 1 \text{ không phải là nghiệm của } f(x).$$

$$f(-1) = 3 \text{ nên } x = -1 \text{ không phải là nghiệm của } f(x).$$

17.

$$f(x) = 16x^3 + (2b - 10)x^2 + (28 - 5b)x + 24$$

$$g(x) = (a - 6)x^3 - 14x^2 + (2 - 3b + 3c)x + 6.(c - d)$$

$$\text{Để } f(x) \equiv g(x) \text{ ta phải có } \begin{cases} a-6=16 \\ 2b-10=-14 \\ 28-5b=2-3b+3c \\ 6.(c-d)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=22 \\ b=-2 \\ c=10 \\ d=6 \end{cases}$$

$$18. (a, b, c \in \mathbb{N}; 0 < a, b, c < 9)$$

$$\text{Ta có: } \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a+b+c) = 1998$$

$$\Rightarrow a+b+c=9$$

$$\Rightarrow a=1; b=2; c=6. \quad \overline{abc}=126$$

$$\Rightarrow a=1; b=3; c=5. \quad \overline{abc}=135$$

$$\Rightarrow a=2; b=3; c=4. \quad \overline{abc}=234.$$

$$9. \text{ Nghiệm: } x \in \left\{ \pm \frac{1}{100}; \dots; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm 100 \right\}$$

Tổng tất cả các nghiệm là 0

$$20. \text{ Tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại } x=1.$$

$$a) f(1) = (-3.1^4 + 4.1^3 - 9.1^2 + 6.1 + 1)^{2019} = (-1)^{2019} = -1.$$

$$b) g(1) = (19.1^2 - 8.1 - 10)^{1945} \cdot (30.1^3 + 4.1^2 + 1975.1 - 2010)^{2018} \\ = 1^{1945} \cdot (-1)^{2018} = 1.$$

$$c) h(1) = 81 + 77 + 73 + 69 + 65 \dots + 9 + 5 + 1 = \frac{(81+1).21}{2} = 861.$$

$$21.$$

$$a) \text{ Đa thức có nghiệm là } x = x_0 \text{ nghĩa là } f(x_0) = ax_0 + b = 0$$

$$\text{hay } x_0 = -\frac{b}{a}. \text{ Mà } f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x_0) \text{ (đpcm).}$$

$$b) f(x) = ax^2 + bx + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0 \text{ có nghiệm -1 có nghĩa là:}$$

$$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \text{ hay } a - b + c = 0$$

Suy ra $b = a + c$ (đpcm)

22.

a) Ta có $Q(0) \in \mathbb{Z}$ nên $c \in \mathbb{Z}$; $Q(1) = a + b + c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$.

$$Q(2) = 4a + 2b + c \in \mathbb{Z} \text{ mà } 2(a + b + c) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (4a + 2b + c) - 2(a + b + c) \in \mathbb{Z}$$

hay $2a - c \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ và $b \in \mathbb{Z}$.

b) Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x^2 - x \in \mathbb{Z}$, mà $a \in \mathbb{Z}$ nên $a(x^2 - x) \in \mathbb{Z}$; $a + b \in \mathbb{Z}$ nên $(a + b)x \in \mathbb{Z}$.

Do đó $Q(x) = a(x^2 - x) + (a + b)x + c = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$

$$23. P(x) - Q(x) = 3x^5 + 2006$$

$$\frac{2008 \times 2010 - 1}{2007 + 2008 \times 2009} = \frac{2008 \times (2009 + 1) - 1}{2007 + 2008 \times 2009} = \frac{2008 \times 2009 + 2007}{2007 + 2008 \times 2009} = 1$$

Nên $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ và $P(x) - Q(x) = 3x^5 + 2006 = 2009$.

24.

$$a) h(x) = x^2 + 5x.$$

$$b) h(x) = x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 5.$$

$$c) \text{ Do } \left(\frac{3^6}{9} - 81 \right)^6 = 0 \text{ nên } (x^2 - 9)^{2011} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Từ đó $h(3) = 24$; $h(-3) = -6$.

25.

$$a) f(1) = a + b + c; f(-2) = 4a - 2b + c.$$

$$b) f(1) + f(-2) = 5a - b + 2c = 0 \Rightarrow f(1) = -f(-2)$$

$$f(1) \times f(2) = -[f(1)]^2 \leq 0$$

c) Với $a = 1; b = 2; c = 3$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x) + (x + 1) + 2 = x(x + 1) + (x + 1) + 2 \\ &= (x + 1)(x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x \Rightarrow f(x) \text{ không có nghiệm.} \end{aligned}$$

26.

$$\text{Từ } P(x) + 3P(2) = 5x^2 \Rightarrow P(2) + 3P(2) = 20 \Rightarrow 4P(2) = 20 \Rightarrow P(2) = 5.$$

$$\text{Như vậy } P(x) = 5x^2 - 15 \Rightarrow P(3) = 5 \cdot 9 - 15 = 30.$$

27.

$$f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2012$$

$$\Leftrightarrow 61a + 9b + c = 2012.$$

$$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$$

$$= 335a + 45b + 5c = 305a + 45b + 5c + 30a$$

$$= 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2012 + 30a$$

$$= 10(1006 + 3a).$$

Vì a nguyên dương nên $10(1006 + 3a) : 10$

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

28. Nếu $x < 0$ thì $f(x) > 0$ đa thức vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } 0 \leq x < 1 \text{ thì } f(x) = |2 + x| - 2x = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } x \geq 1 \text{ thì } f(x) = |4 - x| - 2x$$

$$* \text{ Với } 1 \leq x \leq 4; f(x) = 4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$* \text{ Với } x > 4; f(x) = -x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của $f(x)$ là $x = \frac{4}{3}$.

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Câu 1. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2014-2015)

Chứng minh rằng đa thức $x^2 - 2x + 2$ vô nghiệm

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ ($\forall x$) nên $(x-1)^2 + 1 \geq 1$ ($\forall x$). Do đó đa thức đã cho vô nghiệm.

Câu 2. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2013-2014)

Cho các đa thức $P(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

$$Q(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$$

a. Tính $P(x) + Q(x)$

b. Tìm đa thức $H(x)$ biết $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$

c. Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$

Lời giải

$$a. P(x) + Q(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1 - 2x^4 - x^2 + x - 2 = x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

$$b. H(x) = Q(x) + 2x^4 + 2 = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x$$

$$c. H(x) = -x^2 + x = x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1$$

Câu 3. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016-2017)

Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

Lời giải

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9 \text{ là đa thức bậc 3 biến } x \text{ khi:}$$

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

Câu 4. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Thiệu Hóa năm học 2016-2017)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^9 \cdot (x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - \dots + x(x - 100) - (x - 101) \end{aligned}$$

Vậy $f(100) = 1$

Câu 5. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2017-2018)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

a) Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức

b) Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

a) Tính $P(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm

b) Rút gọn được $x^2 + x = 3(1)$

Biến đổi được $P = (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1 = 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1$

Thay (1) vào: $P = 9x + 3 - 9x + 1 = 4$

Câu 6. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 038 năm học 2016-2017)

Cho đa thức $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

a) Xác định bậc của A

b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

a) $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 \Rightarrow A$ có bậc 4

b) $A = 2xyz(15x - 2y - 1004z) \Rightarrow A = 0$ nếu $15x - 2y = 1004z$

Câu 7. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS TT Hậu A năm học 2017-2018)

Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x$. Tìm các đa thức $Q(x), R(x)$ sao cho:

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$

b) $P(x) - R(x) = x^3$

Lời giải

a) Ta có:

$$P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow Q(x) = P(x) - (x^5 - 2x^2 + 1) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^5 + 2x^2 - 1 = -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Vậy $Q(x) = -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$

b) Vì $P(x) - R(x) = x^3 \Rightarrow R(x) = P(x) - x^3 = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^3 = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$

Câu 8. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu Sơn năm học 2015-2016)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101) \\ &\Rightarrow f(100) = 1 \end{aligned}$$

Câu 9. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Vĩnh Lộc năm học 2016-2017)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} M + (5x^2 - 2xy) &= 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) \\ \Rightarrow M &= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2 \end{aligned}$$

Ta có: $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x - 5)^{2012} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \geq 0$$

Mà $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2012} = 0 \\ (3y + 4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy} \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 10. (Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Lý 15-16)

Cho các đa thức :

$$A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3$$

$$C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16}$$

a) Tính $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$

b) Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$

c) Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không ?

Lời giải

$$\begin{aligned} a) M(x) &= A(x) - 2B(x) + C(x) \\ &= 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2 - 2(x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3) + x^4 + 4x^3 \\ &\quad + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16} = 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16} \end{aligned}$$

b) Thay $x = -\sqrt{0,25}$ vào biểu thức $M(x)$ ta được:

$$\begin{aligned} &5 \cdot (-\sqrt{0,25})^4 + 2 \cdot (-\sqrt{0,25})^2 + \frac{3}{16} \\ &= 0,3125 + 0,5 + \frac{3}{16} = 1 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} M(x) &= 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16} = 5\left(x^4 + 2\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{25}\right) + \frac{3}{16} - \frac{1}{5} \\ &= 5\left(x^2 + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{80} \\ M(x) = 0 &\Rightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{80} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{20} \text{ (vô lý)} \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $M(x) = 0$

Câu 11. (Đề thi HSG 7 Huyện Kim Thành 18-19)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$. Mà đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

$$\text{Có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0.

Câu 12. (Đề thi HSG 7 huyện Quốc Oai 2016-2017)

Tính giá trị của đa thức $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với $x + y = 2$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017 \\ &= x^2(x + y) - 2x^2 - y(x + y) + 3y + x + 2017 \\ &= 2x^2 - 2x^2 - 2y + 3y + x + 2017 = x + y + 2017 = 2019 \end{aligned}$$

Vậy với $x + y = 2$ thì $P = 2019$

Câu 13. (Đề thi HSG 7 huyện Lâm Thao 2016-2017)

Cho đa thức $A = 2x \cdot (x - 3) - x(x - 7) - 5(x - 403)$

Tính giá trị của A khi $x = 4$. Tìm x để $A = 2015$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 5x + 2015 = x^2 - 4x + 2015$$

Với $x = 4$ ta được $A = 2015$

$$A = 2015 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Câu 14. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số $0; -3$ làm nghiệm

b) Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có: $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

a) $P(x) = x^2 + ax + b$

Vì 0 là một nghiệm của đa thức, nên $f(0) = b = 0$

-3 là một nghiệm của đa thức, nên: $9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm

b) Với $x = 0$, ta có: $0.f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 15. (Đề thi HSG 7 huyện Chương Mỹ 2017-2018)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Lời giải

a) Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Ta có: $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c (c \text{ là hằng số tùy ý})$

Áp dụng:

Với $x = 1$, ta có: $1 = f(1) - f(0)$

Với $x = 2$ ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....

Với $x = n$ ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 16. (Đề thi HSG 7 Trường Nguyễn Du 2016-2017)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm: $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Lời giải

Xét đa thức: $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Nếu $x = 0 \Rightarrow C = 1 > 0$

Nếu $x < 0 \Rightarrow x^{10} + x^2 + 1 > 0; -x^5 - x > 0 \Rightarrow C > 0$

Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow C = x^{10} + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$

Nếu $x \geq 1 \Rightarrow C = x^5 \cdot (x^5 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$

Vậy $C > 0$ với mọi x nên đa thức C không có nghiệm

Câu 17. (Đề thi HSG 7 Thanh Thùy 2018-2019)

Cho đa thức $f(x) = x^{14} - 14x^{13} + 14x^{12} - \dots + 13x^2 - 14x + 14$. Tính $f(13)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{14} - (13+1)x^{13} + (13+1)x^{12} - \dots + (13+1)x^2 - (13+1)x + (13+1) \\ &= x^4 - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Vì thay $14 = 13 + 1 = x + 1$). Vậy $f(13) = 1$.

Câu 18. (Đề thi HSG Đề 073)

Cho hai đa thức $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$

$$g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ f(x) - g(x) &= 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Câu 19. (Đề thi HSG 7 Đề 075)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} A(-1) &= (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0 \text{ (vì có 50 số 1 và 50 số } -1) \end{aligned}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$

Câu 20. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Kỳ 2015-2016)

Cho hai đa thức : $f(x) = ax + b; g(x) = x^2 - x + 1$

Hãy xác định a, b biết: $f(1) = g(2)$ và $f(-2) = g(1)$

Lời giải

Ta có: $f(1) = g(2) \Rightarrow a + b = 3$ (1); $f(-2) = g(1) \Rightarrow -2a + b = 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}$

Câu 21. (Đề thi HSG 7 THCS Vạn Long 2018-2019)

a) Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42 = 0$

b) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7

Lời giải

a) Viết được $7x^2 - 35x + 42 = 7(x-3)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow f(0) = c$ chia hết cho 7

$f(1)$ và $f(-1)$ chia hết cho 7, tức là $a + b + c$ và $a - b + c$ chia hết cho 7

Suy ra $2a + 2c$ chia hết cho 7 để có $a:7 \Rightarrow b:7$

Câu 22. (Đề thi HSG 7 trường Cao Viên 2013-2014)

1) Cho hai đa thức :

$$A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$$

$$B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$$

Tính $A+B; A-B$

2) Cho đa thức $f(x) = (m-2)x + 2m - 3$

a) Tìm nghiệm của $f(x)$ khi $m=1$.

b) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm là -4

c) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Lời giải

1) $A+B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6$

$$A-B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

2) Cho đa thức $f(x) = (m-2)x + 2m - 3$

a) Khi $m=1$ ta có:

$$f(x) = (1-2)x + 2.1 - 3 = -x - 1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy khi $m=1$ nghiệm của $f(x)$ là -1 .

b) Khi $f(x)$ có nghiệm là -4 ta có:

$$f(-4) = (m-2)(-4) + 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

Vậy $m = \frac{5}{2}$

c) $f(x)$ có nghiệm khi $f(x) = 0$

$$\Rightarrow (m-2)x + 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)x + 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)x = -2m + 3$$

Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, ta được $0x = -1$ (vô nghiệm)

Nếu $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

$$\Rightarrow x = \frac{-2m+3}{m-2} = -2 - \frac{1}{m-2}$$

x nguyên khi $m-2 \in U(1) = \{-1; 1\}$

$$*) m-2 = -1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow x = -1$$

$$*) m-2 = 1 \Rightarrow m=3 \Rightarrow x = -3$$

Vậy : $m=1$ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên $x = -1$.

$m=3$ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên $x = -3$.

Câu 23. (Đề thi HSG 7 trường Tam Hưng 2016-2017)

Cho $x+y-z=a-b$; $x-y+z=b-c$; $-x+y+z=c-a$. Chứng minh : $x+y+z=0$.

Lời giải

Cộng vế với vế của các đẳng thức đã cho suy ra $x+y+z=0$

Câu 24. (Đề thi HSG 7 trường Tam Hưng 2016-2017)

a) Cho đa thức $f(x) = x^{2015} - 2000x^{2014} + 2000x^{2013} - 2000x^{2012} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x=1999$

b) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

Chứng tỏ rằng: $f(-2).f(3) \leq 0$ nếu $13a+b+2c=0$

Lời giải

$$a) f(x) = x^{2015} - (1999+1)x^{2014} + (1999+1)x^{2013} - (1999+1)x^{2012} + \dots + (1999+1)x - 1$$

Thay $1999 = x$ ta được:

$$f(x) = x^{2015} - (x+1)x^{2014} + (x+1)x^{2013} - (x+1)x^{2012} + \dots + (x+1)x - 1$$

$$f(x) = x^{2015} - x^{2015} - x^{2014} + x^{2014} + x^{2013} - x^{2013} + \dots + x^2 + x - 1 = x - 1$$

Tính được kết quả $f(1999) = 1998$

$$b) f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = -f(3)$$

$$\Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = -f(3) \cdot f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$$

Câu 25. (Đề thi HSG 7 trường Bình Minh 2013-2014)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm: $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Lời giải

$$\text{Xét đa thức : } C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$$

$$\text{Nếu } x = 0 \Rightarrow C = 1 > 0$$

$$\text{Nếu } x < 0 \Rightarrow x^{10} + x^2 + 1 > 0; -x^5 - x > 0 \Rightarrow C > 0$$

$$\text{Nếu } 0 < x < 1 \Rightarrow C = x^{10} + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \Rightarrow C = x^5 \cdot (x^5 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$$

Vậy $C > 0$ với mọi x nên đa thức C không có nghiệm

Câu 26. (Đề thi HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$$\text{Ta có: } f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

$$\text{Với } x=1, \text{ ta có: } 1 = f(1) - f(0)$$

$$\text{Với } x=2 \text{ ta có: } 1 = f(2) - f(1)$$

.....

$$\text{Với } x=n \text{ ta có: } n = f(n) - f(n-1)$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 27. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trãi 2018-2019)

Cho đa thức: $f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$

Lời giải

$$f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{17} - 1999x^{16} - x^{16} + 1995x^{15} + x^{15} - 1999x^{14} - x^{14} + \dots + 1999x + x - 1$$

$$\Rightarrow f(1999) = 1999^{17} - 1999^{17} - 1999^{16} + 1999^{16} + 1999^{15} - 1999^{15} + \dots + 1999^2 + 1999 - 1 \\ = 1999 - 1 = 1998$$

Câu 28. (Đề thi HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017-2018)

Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) \vdots 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5

Lời giải

Vì $p(x) \vdots 5$ với mọi x nguyên nên :

$$p(0) = d \vdots 5$$

$$p(1) = a + b + c + d \vdots 5 \quad (1)$$

$$p(-1) = -a + b - c + d \vdots 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2(b + d) \vdots 5$ và $2(a + c) \vdots 5$

Vì $2(b + d) \vdots 5$, mà $(2, 5) = 1$ nên $b + d \vdots 5 \Rightarrow b \vdots 5$

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d \vdots 5 \text{ mà } d \vdots 5, b \vdots 5 \text{ nên } 8a + 2c \vdots 5$$

Kết hợp với $2(a + c) \vdots 5 \Rightarrow 6a \vdots 5 \Rightarrow a \vdots 5$ vì $(6, 5) = 1$. Từ đó suy ra $c \vdots 5$

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5

Câu 29. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

$$\text{Mà } 3c^3 - 15d^3 \vdots 3 \text{ nên } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \vdots 3 \quad (1)$$

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

$$\text{Tương tự ta có: } b \equiv b^3 \pmod{3}, c \equiv c^3 \pmod{3}, d \equiv d^3 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 30. (Đề HSG toán 7 THCS Nguyễn Thích 2017 - 2018)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) \\ \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}, \text{ thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 31. (Đề HSG toán 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012$, $f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm

Lời giải

a) Tính được $0 = f(0) = c$; $2013 = f(1) = a + b + c$ và $2012 = f(-1) = a - b + c$

$$\text{Tính được: } a + b = 2013 \text{ và } a - b = 2012 \Rightarrow a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$$

b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4$

$$\text{Như vậy } f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x-1)^2 + 2011 > 0 (\forall x)$$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Câu 32. (Đề thi HSG 7)

Cho đa thức $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

Xác định bậc của A

Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

$$a) A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 \Rightarrow A \text{ có bậc } 4$$

$$b) A = 2xyz(15x - 2y - 1004z) \Rightarrow A = 0 \text{ nếu } 15x - 2y = 1004z$$

Câu 33. (Đề thi HSG 7 PGD huyện Châu Đức 2018-2019)

Cho các đơn thức: $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm

Lời giải

Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm $\Rightarrow A.B.C$ có giá trị âm (1)

$$\text{Mặt khác } A.B.C = \left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right) \cdot x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$$

$$\text{Vì } \frac{3}{8}x^6y^4z^4 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow A.B.C \geq 0 \quad \forall x, y \quad (2)$$

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2), suy ra điều giả sử sai

Vậy ba đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$; $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$ không thể cùng có giá trị âm

Câu 34. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101) \\ &\Rightarrow f(100) = 1 \end{aligned}$$

Câu 35. (Đề thi HSG 7 huyện HƯƠNG KHÊ 2017-2018)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$

1) Tính $f(5)$

2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

1) Ta có: $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$

2) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

$x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Câu 36. (Đề thi HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = 2016x^4 - 32(25k + 2)x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c với $(a < b < c)$. Tính hiệu của $a - c$

Lời giải

Ta thấy đa thức $f(x)$ nếu có nghiệm $x = a$ (a khác 0) thì $x = -a$ cũng là một nghiệm của $f(x)$ nên $f(x)$ có 2m nghiệm

Mà đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên một trong ba nghiệm sẽ bằng 0. Thay $x = 0$ vào đa thức đã cho ta được: $k^2 - 100 = 0$ nên $k = 10$ (vì k dương)

Với $k = 10$ ta có $f(x) = 2016x^4 - 8064x^2 = 2016x^2.(x^2 - 4) = 0$

Từ đó $f(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là $a = -2; b = 0; c = 2$ nên $a - c = -4$

Câu 37. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Cho đa thức $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

a) Xác định bậc của A

b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

a) $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 \Rightarrow A$ có bậc 4

b) $A = 2xyz(15x - 2y - 1004z) \Rightarrow A = 0$ nếu $15x - 2y = 1004z$

Câu 38. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Lạc 2019 2020)

Tính tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn, biết $P(x) = (10x^2 - 7x - 4)^{2012}$

Lời giải

Tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn bằng giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = 1$ Ta có:

$$P(1) = (10^2 - 7.1 - 4)^{2012} = (-1)^{2012} = 1$$

Vậy tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn là 1.

Câu 39. (Đề thi HSG 7 – Thị xã Chí Linh 2016 – 2017)

a) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$

Xác định hệ số a, b biết đa thức $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

b) Cho đa thức $A = x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y$ và $B = 5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018$.

Tìm đa thức $C = A - B$. Tính giá trị của đa thức C tìm được ở trên khi $2x + y = 1$.

Lời giải

a) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = -1$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a.(-1)^2 + b.(-1) - 2 = 0 \Rightarrow a - b - 2 = 0 \Rightarrow a = b + 2.$$

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow a.(2)^2 + b.(2) - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(b + 2) + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4b + 8 + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 6b + 6 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1. \text{ Vậy } a = 1; b = -1$$

b) $C = A - B$

$$= (x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y) - (5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018)$$

$$= x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y - 5x^2 + 8xy - 2017y^2 - 3y + 2018$$

$$= -4x^2 - 2xy - y + 2018$$

$$C = -4x^2 - 2xy - y + 2018 = -2x(2x + y) - y + 2018$$

Thay $2x + y = 1$ vào ta được $C = -22x - 7 + 2018 = -(2x + y) + 2018$

$$C = -1 + 2018 = 2017$$

Câu 40. (Đề thi HSG 7 – Huyện Ý Yên 2019 2020)

Cho đa thức $Q(x)$ $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

Lời giải

Cho đa thức $Q(x)$ $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Vì $Q(x) \div 3$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, nên

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \div 3$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = a + b + c + d \div 3$

$$\text{mà } d \div 3 \Rightarrow a + b + c \div 3 \quad (1)$$

Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d \div 3$ mà $d \div 3 \Rightarrow a + b - c \div 3 \quad (2)$

$$Q(1) + Q(-1) = 2b \div 3 \text{ mà } (2; 3) = 1 \text{ nên } b \div 3$$

$$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \div 3 \text{ mà } (2; 3) = 1 \text{ nên } a + c \div 3 \quad (3)$$

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = 8a + 4b + 2c + d \div 3$

$$\text{hay } 7a + (a + c) + 2b + d \div 3$$

Mà $d \div 3, a + c \div 3, b \div 3$ nên $7a \div 3$ mà $(7; 3) = 1 \Rightarrow a \div 3$

Từ (3) suy ra $c \div 3 \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 41. (Đề thi HSG 7 cấp huyện)

Cho đa thức $A = x^2 - 5xy + 5y^2 - 3x + 18y$ và $B = -x^2 + 3xy - y^2 - x - 7$

- a) Tìm đa thức C sao cho $A - C = B$.
b) Tính giá trị của đa thức C tìm được ở trên khi $x - y = 4$

Lời giải

a) $A - C = B \Rightarrow C = A - B$

$$C = x^2 - 5xy + 5y^2 - 3x + 18y - (-x^2 + 3xy - y^2 - x - 7)$$

$$\begin{aligned} C &= x^2 - 5xy + 5y^2 - 3x + 18y + x^2 - 3xy + y^2 + x + 7 \\ &= 2x^2 - 8xy + 6y^2 - 2x + 18y + 7 \end{aligned}$$

b) $C = 2x^2 - 8xy + 6y^2 - 2x + 18y + 7 = 2x^2 - 2xy - 6xy + 6y^2 - 2x + 18y + 7$

$$\begin{aligned} &= 2x(x - y) - 6y(x - y) - 2x + 18y + 7 \\ &= 2x \cdot 4 - 6y \cdot 4 - 2x + 18y + 7 = 6x - 6y + 7 \\ &= 6(x - y) + 7 = 6 \cdot 4 + 7 = 31 \end{aligned}$$

Câu 42. (Đề thi HSG 7 cấp huyện)

Cho các đa thức:

$$A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3$$

$$C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16}$$

- a. Tính $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$
b. Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$
c. Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không?

Lời giải

a. $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$

$$= 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2 - 2(x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3) + x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16}$$

$$= (2x^5 - 2x^5) + (x^4 + 4x^4) + (-4x^3 + 4x^3) + (x^2 - 2x^2 + 3x^2) + (-2x + 10x - 8x) + 2 - 6 + 4\frac{3}{16}$$

$$= 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16}$$

b. Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$

Thay $x = -\sqrt{0,25}$ vào biểu thức $M(x)$ ta được:

$$5.(-\sqrt{0,25})^4 + 2(-\sqrt{0,25})^2 + \frac{3}{16}$$

$$= 0,3125 + 0,5 + \frac{3}{16}$$

$$= 1$$

$$c. \text{ Ta có: } M(x) = 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16}$$

$$= 5(x^4 + 2\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{25}) + \frac{3}{16} - \frac{1}{5}$$

$$= 5(x^2 + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{80}$$

$$M(x) = 0 \Rightarrow 5(x^2 + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{80} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{20} \text{ (Vô lí)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $M(x) = 0$

Câu 43. (Đề thi HSG 7 huyện Tĩnh Gia)

Cho hai đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = cx^2 + bx + a$

Chứng minh rằng: Nếu $f(x_0) = 0$ thì $g(\frac{1}{x_0}) = 0$ (với $x_0 \neq 0$)

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = 0 \Rightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0$

$$g(\frac{1}{x_0}) = c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b\frac{1}{x_0} + a = \frac{c}{x_0^2} + \frac{b}{x_0} + a = \frac{c + bx_0 + ax_0^2}{x_0^2} = \frac{0}{x_0^2} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Câu 44. (Đề thi HSG 7 Huyện Duy Xuyên)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, xác định a, b, c biết $f(-2) = 0$; $f(2) = 0$ và a là số lớn hơn c ba đơn vị.

Lời giải

Ta có $f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$

$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$ và $a - c = 3$

Suy ra: $4b = 0 \Rightarrow b = 0$

Từ $8a + 2c = 0$ và $a - c = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$; $c = -\frac{12}{5}$

Câu 45. (Đề thi HSG 7 Huyện Quan Sơn)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Chứng minh rằng: $B = n^7 - 14n^5 - 49n^3 - 36n$ luôn chia hết cho 210 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

a/

$$\begin{aligned} & x^3(x^2 - 7)^2 - 36x \\ &= x \left[x^2(x^2 - 7)^2 - 36 \right] \\ &= x \left[x(x^2 - 7) - 6 \right] \cdot \left[x(x^2 - 7) + 6 \right] \\ &= x(x^3 - 7x - 6) \cdot (x^3 - 7x + 6) \\ &= x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\ &= x(x+1)[x(x-1) - 6](x-1)[x(x+1) - 6] \\ &= x(x+1)(x^2 - x - 6)(x-1)(x^2 + x - 6) \\ &= x(x+1)(x+2)(x-3)(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

b/ Ta có: $B = n^7 - 14n^5 - 49n^3 - 36n = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$

Theo câu a ta có:

$$B = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Do đó: B là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow B \vdots 2; B \vdots 3; B \vdots 5; B \vdots 7$

Mà các số 2;3;5;7 đôi một nguyên tố cùng nhau

$\Rightarrow B \vdots (2.3.5.7)$ hay $B \vdots 210$ Với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 46. (Đề thi HSG 7 Huyện Kim Thành)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$

Trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Lời giải

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$

Trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Ta có : $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$

$$\Rightarrow f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$\Rightarrow f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4b = 3(2)$$

$$\text{Từ 1,2} \Rightarrow b = 0, a = -3$$

$$\text{Vậy : } a = -3, b = 0; c = 11$$

Câu 47. (Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là 2 số đối nhau.

Lời giải

$$1 \text{ là nghiệm của } f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \text{ hay } a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$-1 \text{ là nghiệm của } f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \text{ hay } a - b + c = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$$

Vậy a và c là hai số đối nhau.

Câu 48. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho các đa thức : $A = xyz - xy^2 - xz^2$; $B = y^3 + z^3$.

Chứng minh rằng nếu $x - y - z = 0$ thì A và B là hai đa thức đối nhau.

Lời giải

$$\text{*Cách 1: Vì } x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z.$$

$$\text{Ta có : } A = x(yz - y^2 - z^2) = (y + z)(yz - y^2 - z^2)$$

$$= y^2z - y^3 - yz^2 + yz^2 - y^2z - z^3 = -y^3 - z^3 = -B.$$

Do đó A và B là hai số đối nhau.

$$\text{*Cách 2: Vì } x - y - z = 0 \Rightarrow x - y = z, x - z = y.$$

$$\text{Xét } A + B = xyz - xy^2 - xz^2 + y^3 + z^3 = xyz - (xy^2 - y^3) - (xz^2 - z^3)$$

$$= xyz - y^2(x - y) - z^2(x - z) = xyz - y^2z - z^2y = yz(x - y - z)$$

$$= yz \cdot 0 = 0.$$

Vậy A và B là hai số đối nhau.

Câu 49. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho a, b, c là các hằng số. Hãy thu gọn các đơn thức sau và xác định bậc của chúng:

$$1. M = \left[-\frac{1}{2}(a-1)x^3y^4z^2 \right]^5.$$

$$2. N = (ab^2xy^2z^{n-1})(-b^3cx^4z^{7-n}).$$

Lời giải

$$1. M = \left[-\frac{1}{2}(a-1)x^3y^4z^2 \right]^5 = -\frac{1}{32}(a-1)^5 \cdot x^5y^{20}z^{10}$$

- Nếu $a = 1$ thì $M = 0 \Rightarrow M$ không có bậc.

- Nếu $a \neq 1$ thì bậc của M là 45.

$$2. N = (ab^2xy^2z^{n-1})(-b^3cx^4z^{7-n}) = -ab^5c.x^5y^2z^6$$

- Nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 $\Rightarrow N = 0 \Rightarrow N$ không có bậc.

- Nếu $a, b, c \neq 0 \Rightarrow$ Bậc của N bằng 13.

Câu 50. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn : $x. f(x - 2011) = (x - 2012) . f(x) .$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau

Lời giải

* Với $x = 0$ ta có $-2012 . f(0) = 0.f(-2011) = 0$ hay $f(0) = 0$, vậy đa thức có 1 nghiệm $x = 0$.

* Với $x = 2011$ ta có $2011 f(2011-2011) = (2011-2012) f(2011)$

Như vậy $-1 f(2011) = 2011.f(0) = 0$, nên $f(2011) = 0$

Vậy đa thức có 1 nghiệm $x = 2011$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh

Câu 51. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Biết $f(0) = 0, f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính $a; b; c$

2. Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012; f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm.

Lời giải

1. Tính được $0 = f(0) = c ; 2013 = f(1) = a+b+c$ và $2012 = f(-1) = a-b+c$

Tính được: $a + b = 2013$ và $a - b = 2012$

Tính được: $2a = 4025$ và tính được $a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}$

Kết luận: $a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}$ và $c = 0$

2. Tính được: $2012 = f(1) = a + b + c$ (1)

$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c$ (2)

$2036 = f(3) = 9a + 3b + c$ (3)

Từ (1) và (2) có $a - b = 8$ (4)

Từ (2) và (3) có $a + b = 0$ (5)

Từ (4) và (5) tìm được $a = 4 ; b = -4$ và tìm được $c = 2012$.

Như vậy $f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = \dots\dots\dots = (2x - 1)^2 + 2011 > 0 \forall x$

Kết luận: Đa thức vô nghiệm

Câu 52. (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG)

1. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ chia hết cho 2011 $\forall x \in \mathbb{Z}, (a, b, c \in \mathbb{Z})$, thì các hệ số a, b, c đều chia hết cho 2011.

2. Chứng minh đa thức $2x^2 + 3x + 5$ không có nghiệm.

Lời giải

1. Lập luận được $|x-1|+2 > 0$.

$$\text{Nên } ||x-1|+2|=3 \Rightarrow |x-1|+2 = 3 \Rightarrow |x-1|=1$$

$$\Rightarrow x-1 = 1 \text{ hoặc } x-1 = -1 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 0.$$

$$\text{Vậy } x = 2 ; x = 0$$

2. Gọi 3 phân số cần tìm lần lượt là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ thì ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \frac{1}{70} \text{ và } \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}; \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1 \frac{1}{70}}{\frac{71}{10}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14}$$

$$\text{Vậy 3 phân số cần tìm là } \frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}.$$

Câu 53. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI)

Cho hai đa thức: $A(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6$

$$B(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x$$

1. Tính $C(x) = A(x) - B(x)$

2. Tìm x để $C(x) = 2x + 2$

3. Chứng tỏ rằng $C(x)$ không thể nhận giá trị bằng 2012 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$$1. \text{ Ta có: } A(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 11x - 6$$

$$B(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 9x - 8$$

$$\Rightarrow C(x) = A(x) - B(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\text{Vậy: } C(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$2. C(x) = 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy để } C(x) = 2x + 2 \text{ thì } x = 0$$

$$3. \text{ Giả sử } C(x) = 2012 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 2012 \Rightarrow x^2 + 2x = 2010 \Rightarrow x(x + 2) = 2010$$

Với $x \in \mathbb{Z}$, do 2010 là số chẵn nên $x(x + 2)$ là số chẵn $\Rightarrow x$ hoặc $x + 2$ là số chẵn

Mà x và $x + 2$ hơn kém nhau 2 đơn vị nên chúng cùng là số chẵn.

$$\Rightarrow x(x + 2) \vdots 4.$$

Nhưng 2010 không chia hết cho 4 $\Rightarrow C(x) \neq 2012$

Vậy $C(x)$ không thể nhận giá trị bằng 2012 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Câu 54. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2016-2017)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$. Mà đa thức

$$f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$$

$$\text{có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016}$$

$$= 0 \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0

Câu 55. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2017-2018)

Cho hai đa thức: $P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 3$ và

$$Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2x^3 - 11 - 10x^2 + 9x.$$

Biết rằng $G(x) - 2x^2 + Q(x) = P(x)$. Tìm đa thức $G(x)$.

Lời giải

$$G(x) = P(x) - Q(x) + 2x^2$$

$$= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 3) - (3x^4 + x^5 - 2x^3 - 11 - 10x^2 + 9x) + 2x^2$$

$$= 3x^2 + 2x + 8$$

$$\text{Vậy } G(x) = 3x^2 + 2x + 8.$$

Câu 56. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành)

Cho đa thức $A = 2x^2 - 10xy + 2016y^2 + y$ và $B = 5x^2 - 7xy + 2016y^2 + 7y - 2016$

1) Tìm đa thức C sao cho $A + C = B$.

2) Tính giá trị của đa thức C tìm được ở trên khi $x + y = 2$

Lời giải

1) Ta có: $A + C = B \Rightarrow C = B - A$

$$C = (5x^2 - 7xy + 2016y^2 + 7y - 2016) - (2x^2 - 10xy + 2016y^2 + y)$$

$$= 5x^2 - 7xy + 2016y^2 + 7y - 2016 - 2x^2 + 10xy - 2016y^2 - y$$

$$= 3x^2 + 3xy + 6y - 2016$$

2) Ta có: $C = 3x^2 + 3xy + 6y - 2016 = 3x(x+y) + 6y - 2016$

$$= 3x.2 + 6y - 2016$$

$$= 6x + 6y - 2016 = 6(x+y) - 2016$$

$$= 6.2 - 2016 = 12 - 2016 = -2004$$

Câu 57. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016 - 2017)

a) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$

Xác định hệ số a, b biết đa thức $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

b) Cho đa thức $A = x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y$ và $B = 5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018$.

Tìm đa thức $C = A - B$. Tính giá trị của đa thức C tìm được ở trên khi $2x + y = 1$.

Lời giải

a) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = -1$ làm nghiệm.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) - 2 = 0 \Rightarrow a - b - 2 = 0 \Rightarrow a = b + 2$$

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

$$f(2) = 0 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$4(b + 2) + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4b + 8 + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 6b + 6 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1. \text{ Vậy } a = 1; b = -1$$

b) $C = A - B$

$$= x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y - (5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018)$$

$$= -4x^2 - 2xy - y + 2018$$

$$= -2x(2x + y) - y + 2018$$

Thay $2x + y = 1$ vào ta được $C = -2x - y + 2018$

Thay $2x + y = 1$ vào ta được $C = -1 + 2018 = 2017$

Câu 58. (Đề thi HSG 7 - Thị xã Sầm Sơn - 2012 -2013)

Cho 2 đa thức $f(x) = x^2 + mx + n$ và $g(x) = x^2 + px + q$

Biết rằng $\exists x_1, x_2$ sao cho : $f(x_1) - g(x_1) = 0$; $f(x_2) - g(x_2) = 0$

Chứng minh : $f(x) = g(x) \quad \forall x$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có :

$$(m-p)x_1 + (n-q) = 0 \quad (1)$$

$$(m-p)x_2 + (n-q) = 0 \quad (2)$$

Từ (1) ; (2) ta có : $(m-p).(x_1 - x_2) = 0$

mà $x_1 \neq x_2$ buộc $m-p = 0$ suy ra $m=p$

Thay vào (1) ta có $n=q$

Vậy $f(x) = g(x) \forall x$

Câu 59. (Đề thi HSG 7 - Huyện Thạch Thành - 2014 - 2015)

Tìm đa thức M, biết: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy \\ &= x^2 + 11xy - y^2 \end{aligned}$$

Câu 60. (Đề thi HSG 7 huyện Thạch Bàn 2016 -2017)

Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

Lời giải

Ta có : $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

Câu 61. (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2019-2020)

Cho đa thức $M(x) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{x}{3} \right)$

Thu gọn và chứng minh $M(x)$ luôn nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x .

Lời giải

Ta có: $M(x) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{x}{3} \right)$

$$M(x) = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{2} \right) + \frac{x^3}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x^2 \right) + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{3} \right)$$

$$\text{Suy ra } M(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Ta có: } M(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot (x-1)$$

Vì x là số nguyên nên $x, x-1$ là hai số nguyên liên tiếp

Suy ra $x.(x-1)$ chia hết cho 2

Vậy $M(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x .

Câu 62. (Đề thi HSG 7 huyện QUỲNH PHỤ 2019-2020)

Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

Lời giải

Ta có: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

Câu 63. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ NHƯ' 2019-2020)

Cho hai đa thức : $P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6$

$$Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x$$

Đặt $H(x) = P(x) - Q(x)$

a) Chứng minh đa thức $H(x)$ không có nghiệm

b) Chứng tỏ rằng: $H(x) \neq 2008$ với $\forall x \in \mathbb{Z}$

Lời giải

a) Thưa gọn ta được $H(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$

do $(x+1)^2 \geq 0 \forall x$ nên $(x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0 \forall x$

Suy ra $H(x)$ không có nghiệm.

b) Ta có: $H(x) = x^2 + 2x + 2 = x(x+2) + 2$

Giả sử tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ để $H(x) = 2008$

$$\Rightarrow x(x+2) + 2 = 2008 \Rightarrow x(x+2) = 2006$$

$$\Rightarrow x \text{ hoặc } x+2 \text{ chia hết cho } 2 \Rightarrow x \text{ và } x+2 \text{ chia hết cho } 2.$$

Suy ra $x(x+2)$ chia hết cho 4 tức là 2006 chia hết cho 4 (0,25đ)

Mâu thuẫn, vì 2006 không chia hết cho 4, điều giả sử là sai (0,25đ)

Vậy $H(x) \neq 2008$ với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Câu 64. (Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG 2007-2008)

Cho các đa thức

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1 \quad g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 5.$$

Tìm đa thức $h(x)$ sao cho

a) $f(x) + h(x) = g(x)$

b) $f(x) + g(x) - 2h(x) = 0$

Lời giải

a) $h(x) = -x^3 + 4x^2 - x + 6$

b) $h(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Câu 65. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2019 - 2020)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$.

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A(-1) &= (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} \\ &= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Vậy $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$.

$$\begin{aligned} \text{b) Thay } x &= \frac{1}{2} \text{ vào đa thức } A \text{ ta có } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2.A &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Câu 66. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -5)

Cho biết $(x-1).f(x) = (x+4).f(x+8)$ với mọi x . Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm

Lời giải

Vì $(x-1).f(x) = (x+4).f(x+8)$ với mọi x nên:

+khi $x = -4$ thì $-5.f(-4) = 0.f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$. vậy $x = -4$ là 1 nghiệm của $f(x)$

+khi $x = -12$ thì $-13.f(-12) = -8.f(-4) \Rightarrow f(-12) = f(-4) = 0$. vậy $x = -12$ là 1 nghiệm của $f(x)$

Do đó $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là -4 và -12

Câu 67. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -6)

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Lời giải

$$x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6$$

$$= (x+2)^2 + 6 > 0 \text{ với mọi } x.$$

Do đó đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm

Câu 68. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 8)

Cho các đa thức $P(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1$; $Q(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$.

a) Tính $P(x) + Q(x)$

b) Tìm đa thức $H(x)$ biết $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$.

c) Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$

Lời giải

a) $P(x) + Q(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1 - 2x^4 - x^2 + x - 2 = x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

b) $H(x) = Q(x) + 2x^4 + 2 = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x$

c) $H(x) = -x^2 + x = x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1$

Câu 69. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 9)

1) Cho hai đa thức:

$$A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$$

$$B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$$

Tính $A + B$; $A - B$

2) Cho đa thức $f(x) = (m-2)x + 2m - 3$

a) Tìm nghiệm của $f(x)$ khi $m = 1$.

b) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm là -4 .

c) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Lời giải

$$1) A + B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6 ; A - B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

2)

a) khi $m = 1$:

$$f(x) = (1 - 2)x + 2.1 - 3 = -x - 1$$

$$f(x) = 0$$

$$-x - 1 = 0$$

$$x = -1$$

vậy nghiệm của $f(x)$ là -1 khi $m = -1$

b) khi $f(x)$ có nghiệm là -4 , ta có :

$$(m - 2)(-4) + 2m - 3 = 0$$

$$-2m + 5 = 0$$

$$m = \frac{5}{2}$$

$$\text{vậy : } m = \frac{5}{2}$$

c) $f(x)$ có nghiệm khi : $f(x) = 0$

$$(m - 2)x + 2m - 3 = 0$$

$$(m - 2)x = -2m + 3$$

$$+ \text{ Nếu } m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

ta được : $0.x = -1 < 0$ vô lí, $f(x)$ không có nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

$$x = \frac{-2m + 3}{m - 2} = -2 - \frac{1}{m - 2}$$

x nguyên khi : $m - 2 \in U(1) = \{-1, 1\}$.

$$m - 2 = -1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = -2 - (-1) = -1$$

$$m - 2 = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x = -2 - 1 = -3$$

Vậy: $m = 1$ thì $x = -1$ và $m = 3$ thì $x = -3$.

Câu 70. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Bảo 2017-2018)

Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$

Xác định hệ số $a; b$ của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải

Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$

Xác định hệ số $a; b$ của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Ta có: $f(x) = (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -3$

Nghiệm của $f(x)$ cũng là nghiệm của $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$ nên:

Thay $x = 1$ vào $g(x)$ ta có: $1 - a + b - 3 = 0$

Thay $x = -3$ vào $g(x)$ ta có: $-27 - 9a - 3b - 3 = 0$

Từ đó biến đổi và tính được: $a = -3; b = -1$

Câu 71. (Đề thi HSG 7 huyện KON TUM, 2017 – 2018)

. Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.

Lời giải

. Ta có: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$.

$$A = (3xy - 4y^2) + x^2 - 7xy + 8y^2.$$

$$A = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Câu 72. (Đề thi HSG 7 TX CHÍ LINH 2016-2017)

a) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$

Xác định hệ số a, b biết đa thức $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

b) Cho đa thức

$$A = x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y \text{ và } B = 5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018.$$

Tìm đa thức $C = A - B$. Tính giá trị của đa thức C tìm được ở trên khi $2x + y = 1$.

Lời giải

a) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = -1$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) - 2 = 0 \Rightarrow a - b - 2 = 0 \Rightarrow a = b + 2.$$

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) - 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(b + 2) + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 4b + 8 + 2b - 2 = 0 \Rightarrow 6b + 6 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1. \text{ Vậy } a = 1; b = -1$$

$$b) C = A - B = x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y - (5x^2 - 8xy + 2017y^2 + 3y - 2018)$$

$$= x^2 - 10xy + 2017y^2 + 2y - 5x^2 + 8xy - 2017y^2 - 3y + 2018$$

$$= -4x^2 - 2xy - y + 2018$$

$$C = -4x^2 - 2xy - y + 2018 = -2x(2x + y) - y + 2018$$

$$= -2x - y + 2018 = -1 + 2018 = 2017$$

Câu 73. (Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2017-2018)

b) Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$

Xác định hệ số $a; b$ của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải

HS biết tìm nghiệm của $f(x) = (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -3$

Nghiệm của $f(x)$ cũng là nghiệm của $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$ nên:

Thay $x = 1$ vào $g(x)$ ta có: $1 - a + b - 3 = 0$

Thay $x = -3$ vào $g(x)$ ta có: $-27 - 9a - 3b - 3 = 0$

Từ đó HS biến đổi và tính được: $a = -3; b = -1$

Câu 74. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THUY 2015-2016)

a) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

b) Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có: $f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$

$$+) f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$+) f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3 \quad (1)$$

$$+) f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $(a + b) + (a - b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \quad 2B = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2B &= B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 75. (Đề thi HSG 7 huyện YÊN LẠC)

Tính tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn, biết $P(x) = (10x^2 - 7x - 4)^{2012}$

Lời giải

Tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn bằng giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x=1$

Ta có: $P(1) = (10 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 4)^{2012} = (-1)^{2012} = 1$

Vậy tổng các hệ số của các hạng tử của đa thức nhận được sau khi đã khai triển và viết đa thức $P(x)$ dưới dạng thu gọn là 1.

Câu 76. (Đề thi HSG 7 huyện Ý YÊN 2015-2016)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

Lời giải

Vì $Q(x) \vdots 3$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, nên

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \vdots 3$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = a + b + c + d \vdots 3$

mà $d \vdots 3 \Rightarrow a + b + c \vdots 3$ (1)

Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d \vdots 3$

mà $d \vdots 3 \Rightarrow -a + b - c \vdots 3$ (2)

$Q(1) + Q(-1) = 2b \vdots 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $b \vdots 3$

$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \vdots 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $a + c \vdots 3$ (3)

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = 8a + 4b + 2c + d : 3$

hay $7a + (a + c) + 2b + d : 3$

Mà $d : 3$, $a + c : 3$, $b : 3$ nên $7a : 3$ mà $(7; 3) = 1 \Rightarrow a : 3$

Từ (3) suy ra $c : 3 \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 77. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

Tìm đa thức M biết rằng : $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$.

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} (2x - 5)^{2018} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ . Thay vào ta được}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 78. (Đề thi HSG 7 huyện GIA VIÊN 2016-2017)

Cho đa thức: $A = \frac{1}{2}x^2y \cdot (-2xy^2)^2 + 3x^2y^3 \cdot (x^2y^2)$

Thu gọn đa thức A rồi tính giá trị của đa thức A tại $x; y$ thỏa mãn:

$$(x - 2)^{18} + |y + 1| = 0$$

Lời giải

HSTL

Câu 79. (Đề thi HSG 7 huyện ..(2) 2017-2018)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì $x; y; z$ nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào đầu ta có $1 + y + z = yz$

$$\Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

Trường hợp 1 $y-1=1 \Rightarrow y=2$ và $z-1=2 \Rightarrow z=3$

Trường hợp 2 $y-1=2 \Rightarrow y=3$ và $z-1=1 \Rightarrow z=2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1; 2; 3); (1; 3; 2)$

Câu 80. (Đề thi HSG 7 huyện VINH BẢO 2018)

Cho hai đa thức: $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$

Xác định hệ số $a; b$ của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải

HS biết tìm nghiệm của $f(x) = (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -3$

Nghiệm của $f(x)$ cũng là nghiệm của $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$ nên:

Thay $x=1$ vào $g(x)$ ta có: $1 - a + b - 3 = 0$

Thay $x=-3$ vào $g(x)$ ta có: $-27 - 9a - 3b - 3 = 0$

Từ đó HS biến đổi và tính được: $a = -3; b = -1$

Câu 81. (Đề thi HSG 7 huyện Ngọc Lặc 20.. -20...)

Cho đa thức: $A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$.

a) Chứng minh rằng: $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a. Ta có: $A(-1) = 1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 0 \text{ (vì có 50 số 1 và 50 số -1)}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b. Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$

$$\Rightarrow 2.A = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A = A + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow A = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Câu 82. (Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$. Mà đa thức

$$f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$$

$$\text{có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2017}$$

$$= 0 \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2017} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0.

Câu 83. (Đề thi HSG 7 Kinh Môn 2017-2018)

Cho biết $(x-1) \cdot f(x) = (x+4) \cdot f(x+8)$ với mọi x . Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất bốn nghiệm.

Lời giải

Vì đa thức $(x-1) \cdot f(x) = (x+4) \cdot f(x+8)$ đúng với mọi x nên

$$*) \text{ Với } x=1 \text{ thì ta có: } (1-1) \cdot f(1) = (1+4) \cdot f(9)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot f(1) = 5 \cdot f(9)$$

$$\Rightarrow f(9) = 0$$

Suy ra $x=9$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

$$*) \text{ Với } x=-4 \text{ thì ta có: } -5 \cdot f(-4) = 0 \cdot f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$$

Suy ra $x=-4$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

$$*) \text{ Với } x=9 \text{ thì ta có: } 8 \cdot f(9) = 13 \cdot f(17) \Rightarrow f(17) = 0 \text{ (vì } f(9) = 0 \text{)}$$

Suy ra $x=17$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

$$*) \text{ Với } x=17 \text{ thì ta có: } 16 \cdot f(17) = 21 \cdot f(25) \Rightarrow f(25) = 0 \text{ (vì } f(17) = 0 \text{)}$$

Suy ra $x = 25$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất 4 nghiệm là 9 ; - 4; 17; 25

Câu 84. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 4)

Chứng minh rằng đa thức: $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Nếu đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm thì nghiệm đó là ước của -1 .

Mặt khác $U(-1) = \{\pm 1\}$ Ta có : $f(-1) = -11 \neq 0$, $f(1) = -3 \neq 0$

Vậy đa thức đã cho không có nghiệm nguyên

Câu 85. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

Tìm một nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng đa thức có nghiệm và $a + 2b + 4c = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + c$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot (a + 2b + 4c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ nên đa thức } P(x) \text{ có một nghiệm là } x = \frac{1}{2}.$$

Câu 86. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2016-2017)

Cho đa thức $f(x) = 2016x^4 - 32(25k + 2)x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước).
Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c (với $a < b < c$). Tính hiệu của $a - c$.

Lời giải

Ta thấy đa thức $f(x)$ nếu có nghiệm $x = a$ (a khác 0) thì $x = -a$ cũng là một nghiệm của $f(x)$, nên đa thức $f(x)$ có $2m$ nghiệm

Mà đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên một trong ba nghiệm sẽ bằng 0. Thay $x = 0$ vào đa thức đã cho ta được:

$$k^2 - 100 = 0 \text{ nên } k = 10 \text{ (vì } k \text{ dương).}$$

$$\text{Với } k = 10 \text{ ta có } f(x) = 2016x^4 - 8064x^2 + 2016x^2(x^2 - 4).$$

Từ đó $f(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là $a = -2$; $b = 0$ và $c = 2$ nên $a - c = -4$.

Câu 87. (Đề thi HSG 7 Huyện Quế Sơn 2012-2013)

Cho $B = x^{2013} - 2014x^{2012} + 2014x^{2011} - 2014x^{2010} + \dots - 2014x^2 + 2014x - 1$

Tính giá trị của biểu thức B với $x = 2013$. $(x-3)^5 = 4(x-3)^3$.

Lời giải

Thay 2014 bằng $x+1$ ta được:

$$\begin{aligned} &= x^{2013} - (x+1)x^{2012} + (x+1)x^{2011} - (x+1)x^{2010} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x - 1 \\ &= x^{2013} - x^{2013} - x^{2012} + x^{2012} + x^{2011} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1 \end{aligned}$$

Thay $x = 2013$ được $A = 2013 - 1 = 2012$.

Câu 88. (Đề thi HSG 7 Huyện Hoài Nhơn 2014-2015)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 2015$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 2015 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 2015$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0.$$

Vậy: $f(-2015) = 0$.

Câu 89. (Đề thi HSG 7 Huyện Bình Giang)

Cho đa thức $M = x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x + 8y$ và $N = -x^2 + 5xy + 5y^2 - 4x - 16$.

1) Tìm đa thức Q sao cho $M - Q = N$.

2) Tính giá trị của đa thức Q tìm được ở trên khi $x + y = 4$.

Lời giải

$$1) M - Q = N \Rightarrow Q = M - N$$

$$Q = x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x + 8y - (-x^2 + 5xy + 5y^2 - 4x - 16)$$

$$= x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x + 8y + x^2 - 5xy - 5y^2 + 4x + 16$$

$$= 2x^2 + 2xy + 8y + 16$$

$$2) Q = 2x^2 + 2xy + 8y + 16 = 2x(x + y) + 8y + 16$$

Thay $x + y = 4$ ta được $Q = 8x + 8y + 16$

$$Q = 8(x + y) + 16 \text{ Thay } x + y = 4 \text{ ta được } Q = 8.4 + 16 = 48$$

Câu 90. (Đề thi HSG 7 Huyện Bình Giang)

Cho đa thức $f(x) = 2x^2 - (m+1)x - m$.

1) Tìm m biết đa thức có nghiệm $x = 2$.

2) Với m vừa tìm được hãy tìm nghiệm còn lại của đa thức.

Lời giải

1) Thay $x = 2$ vào đa thức ta được: $f(2) = 2.2^2 - (m+1).2 - m = 0$

$$\Rightarrow 8 - 2m - 2 - m = 0 \Rightarrow 6 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow m = 2$$

2- Thay $m = 2$ vào $f(x)$ ta được: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

- Xét $f(x) = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-2) + (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm còn lại là $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm còn lại là $x = -\frac{1}{2}$

Câu 91. (Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lặc 2015-2016)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Thay vào tỷ lệ thức ta được: $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$

$$\Rightarrow y = -7, z = 1.$$

$$\text{Vậy } x - 2y + 3z = 2 - 2.(-7) + 3.1 = 19$$

b) Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a+4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn x bằng 0; 1; -1 ta được:

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $b = 0; a = -3$.

Vậy $a = -3, b = 0; c = 11$

Câu 92. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2018-2019)

Cho đa thức $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Biết rằng $f(1) = f(-1); f(2) = f(-2)$. Chứng minh

$$f(x) = f(-x) \text{ với mọi } x$$

Lời giải

$$f(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0; \quad f(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\text{Do } f(1) = f(-1) \text{ nên } a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = -a_3 - a_1$$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$$

$$f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

$$\text{Vì } f(2) = f(-2) \text{ nên } 4a_3 + a_1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a_1 = a_3 = 0$$

$$\text{Vậy } f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$$

$$f(-x) = a_4 (-x)^4 + a_2 (x)^2 + a_0 = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Vậy } f(x) = f(-x) \text{ với mọi } x$$

Câu 93. (Đề thi HSG 7 Hoàng Hóa 2017-2018)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9x - y^2$

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Câu 94. (Đề thi HSG 7 2017-2018)

Cho 2 đa thức:

$$P(x) = x^2 + 2mx + m^2$$

$$Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$$

$$\text{Tìm } m \text{ biết } P(1) = Q(-1)$$

Lời giải

$$P(1) = 1^2 + 2m \cdot 1 + m^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$Q(-1) = 1 - 2m - 1 + m^2 = m^2 - 2m$$

$$\text{Để } P(1) = Q(-1) \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 - 2m \Leftrightarrow 4m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Câu 95. (Đề thi HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016-2017)

- a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số 0; -3 làm nghiệm
 b) Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x , ta có : $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

a) $P(x) = x^2 + ax + b$

Vì 0 là một nghiệm của đa thức, nên $f(0) = b = 0$

-3 là một nghiệm của đa thức, nên: $9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm

b) Với $x = 0$, ta có: $0.f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 96. (Đề thi HSG 7 Thạch Thành 2017-2018)

Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

Lời giải

Ta có:

$$A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

Câu 97. (Đề thi HSG 7 Minh An 2016-2017)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Ta có: $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c (c \text{ là hằng số tùy ý})$

Áp dụng:

Với $x = 1$, ta có: $1 = f(1) - f(0)$

Với $x = 2$ ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....

Với $x = n$ ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 98. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết: $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 2015$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 2015 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 2015$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$

Câu 99. (Đề thi HSG 7 Huyện Thái Thụy năm 2017-2018)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $x.f(x-2011) = (x-2012).f(x)$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Lời giải

*Với $x = 0$ ta có: $-2012.f(0) = 0.f(-2011) = 0$ hay $f(0) = 0$, vậy đa thức có một nghiệm $x = 0$

*Với $x = 2011$ ta có: $2011.f(2011-2011) = (2011-2012).f(2011)$

Như vậy $-1.f(2011) = 2011.f(0) = 0$, nên $f(2011) = 0$

Vậy đa thức có 1 nghiệm $x = 2011$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Câu 100. (Đề thi HSG 7)

Cho $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện $f(x_1.x_2) = f(x_1).f(x_2)$ và $f(2) = 10$. Tính $f(32)$

Lời giải

Vì $f(x_1.x_2) = f(x_1).f(x_2)$ nên:

$$f(4) = f(2.2) = f(2).f(2) = 10.10 = 100$$

$$f(16) = f(4.4) = f(4).f(4) = 100.100 = 10000$$

$$f(32) = f(16.2) = f(16).f(2) = 10000.10 = 100000$$

Câu 101. (Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Cày năm 2017-2018)

a) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

b) Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có: $f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$

$$f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3 \quad (1)$$

$$f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a + b) + (a - b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2B = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\text{Vậy } B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Câu 102. (Đề thi HSG 7 Huyện Đất Mũi 2016-2017)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn :

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) f(x)$$

a) Tính $f(5)$

b) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

a) Ta có : $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$

b) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

$$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ là một nghiệm}$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ là một nghiệm}$$

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Câu 103.(Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Trách 2017-2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^9(x-100) - x^8(x-100) + x^7(x-100) - x^6(x-100) + \dots + x(x-100) - (x-101) \\ &\Rightarrow f(100) = 1 \end{aligned}$$

Câu 104.(Đề thi HSG 7 Huyện Vị Thanh 2017-2018)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$; $f(-0,5)$

b) Chứng minh : $f(-a) = -f(a)$

Lời giải

a) $f(0) = 0$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$$

b) $f(-a) = -4 \cdot (-a)^3 - a = 4a^3 - a$

$$-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$$

$$\Rightarrow f(-a) = -f(a)$$

Câu 105.(Đề thi HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x) \div 7 \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7

Lời giải

$$P(0) \div 7 \text{ nên } c \div 7$$

$$P(1) \div 7 \text{ nên } a + b + c \div 7 \Rightarrow a + b \div 7 \quad (1)$$

$$P(-1) \div 7 \text{ nên } a - b + c \div 7 \Rightarrow a - b \div 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2a \div 7 \text{ mà } (2; 7) = 1 \text{ nên } a \div 7 \Rightarrow b \div 7$$

Câu 106.(Đề thi HSG 7 THCS Hiền Quan 2018-2019)

Cho hai đa thức $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$

$$g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}. \text{ Tính } f(x) + g(x) \text{ và } f(x) - g(x)$$

Lời giải

$$f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Câu 107.(Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lặc 2015-2016)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn x bằng $0; 1; -1$ ta được :

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $b = 0; a = -3$

Vậy $a = -3; b = 0; c = 11$

Câu 108.(Đề thi HSG 7 Huyện Tân Tạo 2018-2019)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng : $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Ta có : $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng :

Với $x=1$, ta có : $1 = f(1) - f(0)$

Với $x=2$, ta có : $1 = f(2) - f(1)$

.....

Với $x=n$ ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 109.(Đề thi HSG 7 THCS Trần Hưng Đạo 2018-2019)

a) Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42 = 0$

b) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7

Lời giải

a) Viết được $7x^2 - 35x + 42 = 7(x-3)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow f(0) = c$ chia hết cho 7

$f(1)$ và $f(-1)$ chia hết cho 7, tức là $a+b+c$ và $a-b+c$ chia hết cho 7

Suy ra $2a+2c$ chia hết cho 7 để có $a:7 \Rightarrow b:7$

Câu 110.(Đề thi HSG 7 Huyện Nam Sách 2017-2018)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a+4)x^3 - 4x + 8$$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn x bằng 0 ; 1 ; -1 ta được :

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 8 = c - 3 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4 - 4 + 8 = 1 - 4b - 4 + 8 \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a - 4 + 4 + 8 = -1 - 4b + 4 + 8 \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $b = 0$; $a = -3$

Vậy $a = -3$; $b = 0$; $c = 11$

Câu 111.(Đề thi HSG 7 huyện Sơn Dương 2017-2018)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A(-1) &= (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} \\ &= -1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 0 \text{ (có 50 số } -1 \text{ và có 50 số } 1) \end{aligned}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$

b) Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $A(x)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ \Rightarrow 2A &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Câu 112.(Đề thi HSG 7 huyện Rạch Giá 2018-2019)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn:

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) f(x).$$

a) Tính $f(5)$

b) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

$$\text{a) } x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) f(x) \quad (1)$$

Thay $x = 3$ vào (1) ta được:

$$3 \cdot f(3+2) = (3^2 - 9) f(3)$$

$$\Rightarrow f(5) = 0$$

$$\text{b) } x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là một nghiệm}$$

$$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ là một nghiệm}$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ là một nghiệm}$$

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Câu 113.(Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017-2018)

Cho hai đa thức : $f(x) = ax + b; g(x) = x^2 - x + 1$

Hãy xác định a, b biết: $f(1) = g(2)$ và $f(-2) = g(1)$

Lời giải

Ta có: $f(1) = g(2) \Rightarrow a + b = 3$ (1)

$f(-2) = g(1) \Rightarrow -2a + b = 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}$

Câu 114.(Đề thi HSG 7 huyện Hương Khê 2017-2018)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn:

$$x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$$

- 1) Tính $f(5)$
- 2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

1) Ta có: $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$

2) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

$x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

$x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Câu 115.(Đề thi HSG 7 huyện Phù Cát 2017-2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết: $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 2015$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 2015 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 2015$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$

Câu 116.(Đề thi HSG 7 huyện Bến Lức 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x.(x-3) - x.(x-7) - 3.(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$.

Tìm x để $A = 2019$

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 4$, thay $x = 4$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 117.(Đề thi HSG 7 huyện Đáp Cầu 2018-2019)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A(-1) &= (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0 \quad (\text{vì có 50 số 1 và 50 số } -1) \end{aligned}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{Với } x &= \frac{1}{2} \text{ thì giá trị của đa thức } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}} \end{aligned}$$

Câu 118.(Đề thi HSG 7 huyện Thái Thụy 2015-2016)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$\begin{aligned} B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\ 2B &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 119. (Đề thi HSG 7 huyện Tiền Hải 2016-2017)

Cho các đơn thức: $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm

Lời giải

Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm $\Rightarrow A.B.C$ có giá trị âm (1)

Mặt khác $A.B.C = \left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right) \cdot x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$

Vì $\frac{3}{8}x^6y^4z^4 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow A.B.C \geq 0 \quad \forall x, y$ (2)

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2), suy ra điều giả sử sai

Vậy ba đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$; $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$ không thể cùng có giá trị âm

Câu 120. (Đề thi HSG 7 huyện Sơn Trà 2018-2019)

1. Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

2. Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$

Tính $f(100)$

Lời giải

1. Ta có:

$$x - 2xy + y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$$

Lập bảng:

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

2. Ta có:

$$f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$$

$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101$$

$$= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101)$$

Suy ra $f(100) = 1$

Câu 121.(Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c : hệ số)

Biết rằng: $f(0) = 2018, f(1) = 2019, f(-1) = 2017$. Tính $f(-2019)$

Lời giải

Xét $x = 0 : f(0) = 2018 \Rightarrow c = 2018$

Xét $x = 1 : f(1) = 2019 \Leftrightarrow a + b + c = 2018 \Leftrightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1 : f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Leftrightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$

Từ đó tìm được $f(x) = x + 2018$

Suy ra $f(-2019) = -1$

Câu 122.(Đề thi HSG 7 cấp trường 2017-2018)

Khẳng định sau đúng hay sai ? Tổng của hai đa thức không cùng bậc là một đa thức có bậc bằng bậc cao nhất của các đa thức hạng tử.

A. Đúng

B. Sai

Lời giải

A

Câu 123.(Đề thi HSG 7 cấp huyện 2017-2018)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong 3 số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$

Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$

$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$

$-1 \leq z \leq 1, z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

• **(Đề thi HSG 7 huyện Nhon Trĩ 2018-2019)**

a) Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$

Lời giải

a) $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi :

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

• **(Đề thi HSG 7 huyện Hùng Thư 2017-2018)**

1. Cho hai đa thức :

$$A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$$

$$B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$$

Tính $A + B; A - B$

2. Cho đa thức $f(x) = (m - 2)x + 2m - 3$

a) Tìm nghiệm của $f(x)$ khi $m = 1$

b) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm là -4

c) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Lời giải

$$1) A + B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6$$

$$A - B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

2)

a) khi $m = 1$

$$f(x) = (1 - 2)x + 2 \cdot 1 - 3 = -x - 1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy nghiệm của $f(x)$ là -1 khi $m = 1$.

b) Khi $f(x)$ có nghiệm là -4 , ta có:

$$(m - 2)(-4) + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{2}$$

c) $f(x)$ có nghiệm khi $f(x) = 0$

$$(m - 2)x + 2m - 3 = 0$$

$$(m - 2)x + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 2)x = -2m + 3$$

Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta được $0x = -1 < 0$ (ktm)

$$\text{Nếu } m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2 \Rightarrow x = \frac{-2m + 3}{m - 2} = -2 - \frac{1}{m - 2}$$

x nguyên khi $m - 2 \in U(1) = \{-1; 1\}$

$$*) m - 2 = -1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$*) m - 2 = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x = -3$$

Vậy $m = 1$ thì $x = -1$; $m = 3$ thì $x = -3$

• **(Đề thi HSG 7 huyện Cao Dương 2016-2017)**

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x.f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x

Tính $f(1) = ?$

Lời giải

Thay $x = 1$ vào ta được: $f(1) + f(-1) = 2$

Thay $x = -1$ vào ta được $f(-1) - f(1) = 0$

$$\Rightarrow f(1) + f(-1) + f(-1) - f(1) = 2 + 0$$

$$\Rightarrow 2.f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$$

• **(Đề thi HSG 7 huyện Cao Dương 2016-2017)**

Cho đa thức $f(x) = x^2 + mx + 2$

a) Xác định m để $f(x)$ nhận -2 làm một nghiệm

b) Tìm tập hợp các nghiệm của $f(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của m

Lời giải

$$a) f(x) \text{ nhận } -2 \text{ làm một nghiệm} \Rightarrow (-2)^2 + m.(-2) + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$b) f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$\text{Ta có: } x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

• **(Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2016-2017)**

Cho đa thức: $f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$

Lời giải

$$f(x) = x^{17} - 1999x^{16} - x^{16} + 1995x^{15} + x^{15} - 1999x^{14} - x^{14} + \dots + 1999x + x - 1$$

$$f(1999) = 1999^{17} - 1999^{17} - 1999^{16} + 1999^{16} + 1999^{15} - 1999^{15} + \dots + 1999^2 + 1999 - 1$$

$$= 1999 - 1 = 1998$$

• **(Đề thi HSG 7 huyện Cao Dương 2016-2017)**

Cho đa thức $f(x) = x^{14} - 14x^{13} + 14x^{12} - \dots + 13x^2 - 14x + 14$. Tính $f(13)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{14} - (13+1)x^{13} + (13+1)x^{12} - \dots + (13+1)x^2 - (13+1)x + (13+1) \\ &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(Vì thay $14 = 13 + 1 = x + 1$). Vậy $f(13) = 1$.

• **(Đề thi HSG 7 trường Đặng Huy Hoàng 2016-2017)**

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Lời giải

$$x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6 > 0 (\forall x)$$

Do đó $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Câu 124. (Đề thi HSG 7 THCS Hồng Liên 2018-2019)

Cho biết $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x . Chứng minh $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Vì $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x nên:

+khi $x = -4$ thì $-5f(-4) = 0, f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$. Vậy $x = -4$ là một nghiệm của $f(x)$

+Khi $x = -12$ thì $-13f(-12) = -8.f(-4) \Rightarrow f(-12) = f(-4) = 0$. Vậy $x = -12$ là một nghiệm của $f(x)$

Do đó $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là -4 và -12

Câu 125. (Đề thi HSG 7 THCS Nguyễn Trực 2017-2018)

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ không có nghiệm.

Lời giải

Xét từng khoảng

+xét $x \leq 0$ dẫn đến $f(x) \geq 1 > 0$

+Xét $0 < x < 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

+Xét $x \geq 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

Trong cả ba khoảng trên đều có $f(x) \neq 0$ nên đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

Câu 126. (Đề thi HSG 7 THCS Sương Bình 2017-2018)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$$

Trong đó a, b, c là các hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Lời giải

Biến đổi:

$$f(x) = (a+4)x^3 - 4x + 8$$

$$g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a+4=1 \\ -4b=0 \\ c-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ c=11 \end{cases}$$

Câu 127.(Đề thi HSG 7 THCS Sương Bình 2017-2018)

Chứng minh rằng đa thức : $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Nếu đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm thì nghiệm đó là ước của -1 , mặt khác $U(-1) = \{\pm 1\}$

Ta có: $f(-1) = -11 \neq 0$; $f(1) = -3 \neq 0$

Vậy đa thức đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 128.(Đề thi HSG 7 THCS Hoàng Quyên 2018-2019)

Tìm nghiệm của đa thức sau: $x^2 + 8x + 25$

Lời giải

$$x^2 + 8x + 25 = x^2 + 4x + 4x + 16 + 9 = x(x+4) + 4(x+4) + 9$$

$$= (x+4)(x+4) + 9 = (x+4)^2 + 9$$

$$\text{Vì } (x+4)^2 \geq 0 (\forall x) \Rightarrow (x+4)^2 + 9 > 0 (\forall x)$$

$\Rightarrow$ đa thức $x^2 + 8x + 25$ vô nghiệm

Câu 129.(Đề thi HSG 7 THCS X 2018-2019)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $xf(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$

a) Tính $f(5)$

b) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải

a) Ta có với $x=3 \Rightarrow f(5) = 0$

b) $x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm

$x=3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x=5$ là một nghiệm

$x=-3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x=-1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm.

Câu 130.(Đề thi HSG 7 ... 2018-2019)

Cho đa thức $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

a. Xác định bậc của A

b. Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

$$a. A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 \Rightarrow A \text{ có bậc } 4$$

$$b. A = 2xyz(15x - 2y - 1004z) \Rightarrow A = 0 \text{ nếu } 15x - 2y = 1004$$

Câu 131.(Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$, xác định a ; b ; c biết $f(-2) = 0$; $f(2) = 0$ và a là số lớn hơn c ba đơn vị

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \text{ và } a - c = 3$$

$$\Rightarrow 4b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Từ: } 8a + 2c = 0 \text{ và } a - c = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}; c = \frac{-12}{5}$$

Câu 132.(Đề HSG 7 Trường Nguyễn Khuyến 2017 – 2018)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

a) Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức

b) Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

a) Tính được $P(1) = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Rút được $x^2 + x = 3$

$$P = (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 9x + 3 - 9x + 1 = 4$$