

Chuyên đề 11. SỐ HỌC-BẤT ĐẲNG THỨC –MIN MAX

PHẦN I. TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D :

a) Nếu $f(x) \geq m$ mà m là một hằng số và $f(x) = m$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là m , đạt được tại $x = x_0$.

Ta viết $\min(f(x)) = m$ tại $x = x_0$.

b) Nếu $f(x) \leq n$ mà n là một hằng số và $f(x) = n$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là n , đạt được tại $x = x_0$. Ta viết $\max(f(x)) = n$ tại $x = x_0$.

B. Một số ví dụ

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq n$

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = (19x - 5)^2 + 1890$;

b) $B(x) = 3x + \sqrt{15x} - 10$;

c) $C(x) = \sqrt{30 - 4x} + \sqrt{1975}$;

d) $D(x) = (x^{2018} + x^{2020} + 2019)^{2019}$.

✓ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ ta tìm hằng số m trong tập xác định D của $f(x)$ mà $f(x) \geq m$. Sau đó tìm $x = x_0 \in D$ để $f(x_0) = m$.

a) $(19x - 5)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall x$. Do đó tìm được $(19x - 5)^2 + 1890 \geq ?$. Dấu “=” xảy ra khi nào? tại $x = ?$

b), c) Điều kiện để biểu thức có nghĩa?

Lưu ý: Căn bậc hai không âm của a được kí hiệu là $\sqrt{a}$. Khi viết $\sqrt{a}$ phải có $a \geq 0$.

d) Nhận xét về bậc của các lũy thừa của x và giá trị của cả biểu thức.

Giải

a) Do $(19x - 5)^2 \geq 0, \forall x$ nên $(19x - 5)^2 + 1890 \geq 1890, \forall x$.

$$A(x) = 1890 \Leftrightarrow (19x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{19}.$$

Ta có $A(x) \geq 1890, \forall x$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{19}$.

Vậy $\min A(x) = 1890$ tại $x = \frac{5}{19}$.

b) Điều kiện để $\sqrt{15x}$ có nghĩa: $x \geq 0$.

Ta có: $B(x) = 3x + \sqrt{15x} - 10 \geq -10$ do $x \geq 0$ và $\sqrt{15x} \geq 0$ nên

$B(x) \geq -10$ với $x \geq 0$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min B(x) = -10$ tại $x = 0$.

c) Điều kiện để $\sqrt{30 - 4x}$ có nghĩa: $30 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7,5$

Ta có: $C(x) = \sqrt{30-4x} + \sqrt{1975} \geq \sqrt{1975}$ do $\sqrt{30-4x} \geq 0$ nên

$C(x) \geq \sqrt{1975}$. Lại có $C(7,5) = \sqrt{1975}$

Do đó $C(x) \geq \sqrt{1975}$ với $x \leq 7,5$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 7,5$.

Vậy min $C(x) = \sqrt{1975}$ tại $x = 7,5$.

d) Ta có $x^{2018} \geq 0; x^{2020} \geq 0, \forall x$ nên $(x^{2018} + x^{2020} + 2019)^{2019} \geq 2019^{2019}, \forall x$. Lại có $D(0) = 2019^{2019}$.

Do đó $D(x) \geq 2019^{2019} \forall x$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy min $D(x) = 2019^{2019}$ tại $x = 0$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $E(y) = 1945 - (2y+9)^2$;

b) $F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}$.

✓ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị lớn nhất của $f(y)$ ta tìm hằng số n trong tập xác định D của $f(y)$ mà $f(y) \leq n$. Sau đó tìm $y = y_0 \in D$ để $f(y_0) = n$.

a) $(2y+9)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall y$. Do đó $1945 - (2y+9)^2$ sẽ như thế nào? Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lưu ý $2y+9=0 \Leftrightarrow 2y=-9 \Leftrightarrow y=-4,5$.

b) Trước hết xét $F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}$.

Ta có: $(y-5)^2 + 9 \geq 9 \forall x \Rightarrow \frac{1}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{1}{9}$

(theo tính chất lấy nghịch đảo: Cho hai số dương a và b , nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$). Từ đó suy ra

$$\frac{2016}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{2016}{9} = 224.$$

Giải

a) $E(y) = 1945 - (2y+9)^2$

Ta có $(2y+9)^2 \geq 0, \forall y$ nên $1945 - (2y+9)^2 \leq 1945, \forall y$.

Do đó $E(y) \leq 1945, \forall y$. Mặt khác, $E(-4,5) = 1945$ nên $E(y) \leq 1945, \forall y$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = -4,5$.

Vậy max $E(y) = 1945$ tại $y = -4,5$.

b) $F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2 + 9}, \forall y$, ta có: $(y-5)^2 \geq 0 \Rightarrow (y-5)^2 + 9 \geq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y-5)^2 + 9} \leq \frac{1}{9}.$$

Từ đó suy ra: $\frac{2016}{(y-5)^2+9} \leq \frac{2016}{9}$. Mặt khác, $F(5) = \frac{2016}{(5-5)^2+9} = \frac{2016}{9} = 224$

Nên $F(y) \leq 224 \forall y$; dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 5$.

Vậy $\max F(y) = 224$ tại $y = 5$.

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

Ví dụ 3: Tìm số nguyên x để:

a) Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất với $A = \frac{2015}{2019-x}$;

b) Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất với $B = \frac{1930}{x-5}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $x \in \mathbb{Z}$ thì A và B là những phân số.

Với các phân số dương có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu số dương nhỏ nhất.

Với các phân số âm có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị nhỏ nhất khi đối của phân số đó có giá trị lớn nhất.

Giải

a) Điều kiện $x \neq 2019$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x < 2019$ thì $2019-x > 0$, mà $2015 > 0$ nên $A > 0$.

* Nếu $x > 2019$ thì $2019-x < 0$, mà $2015 > 0$ nên $A < 0$.

Do đó muốn $A_{\max}$ thì phải chọn x sao cho $A > 0$, tức là chọn $x < 2019$.

Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(2019-x)_{\min}$ do 2015 là hằng số dương. Ta có $2019-x > 0$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(2019-x)_{\min} \Leftrightarrow 2019-x=1$ hay $x=2018$.

Vậy $A = \frac{2015}{2019-x}$ đạt giá trị lớn nhất là 2015 $\Leftrightarrow x=2018$.

b) Điều kiện $x \neq 5$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x < 5$ thì $x-5 < 0$, mà $1930 > 0$ nên $B < 0$.

* Nếu $x > 5$ thì $x-5 > 0$, mà $1930 > 0$ nên $B > 0$.

Do đó muốn $B_{\min}$ phải chọn x sao cho $B < 0$, tức là chọn $x < 5$.

Khi đó $B_{\min}$ khi số đối của $B_{\max}$ hay $\left(\frac{1930}{5-x}\right)_{\max} \Leftrightarrow (5-x)_{\min}$ do 1930 là hằng số dương.

Ta có $5-x > 0$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(5-x)_{\min} \Leftrightarrow 5-x=1$ hay $x=4$.

Vậy $B = \frac{1930}{x-5}$ đạt giá trị nhỏ nhất là -1930 $\Leftrightarrow x=4$.

Ví dụ 4: Tìm số nguyên y để:

a) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với $C = \frac{58-3y}{19-y}$;

b) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với $D = \frac{59-2y}{y-25}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $y \in \mathbb{Z}$ thì C và D là những phân số. Ta biến đổi

$$C = \frac{58-3y+1}{19-y} = \frac{3(19-y)+1}{19-y} = 3 + \frac{1}{19-y} = 3 + E$$

$$D = \frac{9+50-2y}{y-25} = \frac{9-2(y-25)}{y-25} = \frac{9}{y-25} - 2 = F - 2$$

và lý luận tương tự ví dụ 3.

Giải

a) Điều kiện $y \neq 19$ ta có:

$$C = \frac{57-3y+1}{19-y} = \frac{3(19-y)+1}{19-y} = 3 + \frac{1}{19-y} = 3 + E \text{ với } E = \frac{1}{19-y}.$$

* Nếu $y < 19$ thì $19-y > 0$ mà $1 > 0$ nên $E > 0$.

* Nếu $y > 19$ thì $19-y < 0$ mà $1 > 0$ nên $E < 0$.

Ta có $C_{\max} \Leftrightarrow E_{\max}$. Muốn $E_{\max}$ thì phải chọn y sao cho $E > 0$ tức là chọn $y < 19$. Khi đó $E_{\max} \Leftrightarrow (19-y)_{\min}$ (do 1 là hằng số dương).

Ta có $19-y > 0; y \in \mathbb{Z}$ nên $(19-y)_{\min} \Leftrightarrow 19-y=1 \Leftrightarrow y=18$.

Ta có $\max C = 4$ khi và chỉ khi $y = 18$.

b) Điều kiện $y \neq 25$, ta có:

$$D = \frac{9+50-2y}{y-25} = \frac{9-2(y-25)}{y-25} = \frac{9}{y-25} - 2 = F - 2.$$

Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $y > 25$ thì $y-25 > 0$ mà $9 > 0$ nên $F > 0$.

* Nếu $y < 25$ thì $y-25 < 0$ mà $9 > 0$ nên $F < 0$.

Do đó muốn $F_{\min}$ phải chọn y sao cho $F < 0$, tức là chọn $y < 25$.

Khi đó $F_{\min}$ khi số đối của $F_{\max}$ hay $\left(\frac{9}{25-y}\right)_{\max} \Leftrightarrow (25-y)_{\min}$ do 9 là hằng số dương.

Ta có $25-y > 0$ mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $(25-y)_{\min} \Leftrightarrow 25-y=1$ hay $y=24$.

Vậy $D = \frac{59-2y}{y-25}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-11 \Leftrightarrow y=24$.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

Ví dụ 5:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4;$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x, y) = \frac{2016}{(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224};$$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $Q(x, y) = xy$ biết rằng $3(x-y)^2 + 5xy = 180$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biểu thức có ba biến, xác định với mọi giá trị của x, y và z .

Lưu ý: $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$

và $(z-3)^2 \geq 0 \forall z \in \mathbb{R}$.

b) Lưu ý tính chất nghịch đảo của số dương. Với a và b là hai số dương:

Nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

c) Từ $3(x-y)^2 + 5xy = 180$ tìm hệ thức $Q(x, y)$ nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số.

Giải

a) $M(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4$.

Do $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}; (z-3)^2 \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}$.

Nên $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4 \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$.

$M(1; -2; 3) = (1-1)^2 + (-2+2)^2 + (3-3)^2 + 4 = 4$.

Do đó $M(x, y, z) \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$ dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = -2; z = 3$.

Vậy min $M(x, y, z) = 4$ tại $x = 1; y = -2; z = 3$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ ta có $(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224 \geq 224$

do đó $P(x, y) = \frac{2016}{(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224} \leq \frac{2016}{224}$.

Mặt khác

$P(-2018; 2019) = \frac{2016}{(-2018+2018)^2 + (2019-2019)^2 + 224} = \frac{2016}{224} = 9$.

Ta có $P(x, y) \leq \frac{2016}{224} = 9 \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -2018; y = 2019$.

c) Do $3(x-y)^2 + 5xy = 180$ nên $Q(x, y) = xy = 36 - \frac{3}{5}(x-y)^2$

Do $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ ta có $\frac{3}{5}(x-y)^2 \geq 0$ nên $Q(x, y) = 36 - \frac{3}{5}(x-y)^2 \leq 36$

Và $Q(x, y) = xy = 36$ khi và chỉ khi $x = y = 6$ hoặc $x = y = -6$.

Vậy $\max Q(x, y) = 36$ tại $x = y = 6$ hoặc $x = y = -6$.

Ví dụ 6: Cho a, b là các số tự nhiên khác 0. Biết $1 > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{7}{10}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2020}{a+b}$.

✓ *Tìm cách giải:* A là phân số dương có tử số là 2020 không đổi. Vì vậy muốn A đạt giá trị lớn nhất thì $(a+b)$ phải đạt giá trị nhỏ nhất. Để tìm $(a+b)_{\min}$ ta phải tìm các giá trị có thể có của a và b rồi

tìm các giá trị nhỏ nhất của a và b . Ta thấy ngay từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow a, b > 1$. Chú ý tính chất nghịch đảo

của hai số tự nhiên m, n khác 0: $m > n$ thì $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Giải

Do $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow a, b > 1$ không mất tổng quát giả sử $1 < a \leq b$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}. \text{ Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \text{ hay } \frac{7}{10} \leq \frac{2}{a} \Rightarrow a \leq 2\frac{6}{7}$$

Do $a \in \mathbb{N}$ và $a > 1$ nên $a = 2$ (1)

$$\text{Với } a = 2 \text{ ta có } \frac{7}{10} < \frac{1}{2} + \frac{1}{b} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \Rightarrow b \in \{3; 4\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\min(a+b) = 2+3=5$

$$\text{Vậy } \max A = \frac{2020}{5} = 404.$$

C. Bài tập vận dụng

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq n$

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $f(x) = (1,5x - 4,5)^2 - 12$;

b) $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16$;

c) $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23}$;

d) $p(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{98} + x^{100} + 2)^{2015} + 2^{2015}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(y) = 15 - (30 + 2y)^2$;

b) $B(y) = \frac{2015}{(4-5y)^2 + 2018}$;

c) $C(y) = \frac{2+4+6+\dots+198+200}{(10y-5)^2 + (1+3+5+\dots+17+19)^2 + 100}$;

d) $D(y) = \sqrt{5} - (\sqrt{2y-4} - \sqrt{6})^2$.

3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{5x^2 + 4x^2 + 10}{x^4 + 2}$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{2x^4 - 4x^2 + 8}{x^4 + 4}$;

c) Cho a là hằng số và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{8y^8 + 2a(y-3)^2 + 2a^2}{4y^8 + a^2}.$$

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

4. Tìm số nguyên x để:

a) Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất với $A = \frac{16}{6-x}$;

b) Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất với $B = \frac{1945}{x-1930}$.

5. Tìm số nguyên y để:

a) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với $C = \frac{36-3y}{11-y}$;

b) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với $D = \frac{21-y}{y-2}$;

6. Tìm giá trị của số tự nhiên n để phân số $P = \frac{11n-47}{2n-9}$ có giá trị lớn nhất.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $f(x, y) = (x-2)^2 + (2y+1)^2 - 25$;

b) $g(x, y) = (x+y-1)^2 + (y-3)^2 + 4$;

c) $h(x, y) = \frac{-2}{6 + (2x-y)^2 + (x+1)^2}$;

d) $k(x, y, z) = (x+y-2z)^2 + (x-y-3)^4 + (y-1)^6 + 5$.

8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x, y) = 2017 - (11y-7)^2 - (x-100)^2$;

b) $B(x, y) = 16 - (x+y+2)^2 - (y^2-9)^2$;

c) $C(x, y) = \frac{24}{3 + (2x^3 - y - 1)^2 + (x^2 - 4)^2}$;

d) $D(x, y) = \frac{2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$.

9.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M(x, y, z) = (x+1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(2z-3) + 4;$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$N(x, y, z) = \frac{15}{(2x-4)^2 + (y+3)^2 + 10} + \frac{5}{(4z-2016)^2 + 2};$$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $P(x, y) = 2xy$ biết rằng $(x-y)^2 + 0,1xy = 10$.

10. Cho a, b, c là các số nguyên. Biết $a < 5b; b < 5c$ và $c < 25$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $(a+b+c)$.

11. Tìm giá trị lớn nhất của tỷ số giữa một số có ba chữ số với tổng các chữ số của nó.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.

a) $\min f(x) = -12 \Leftrightarrow x = 3.$

b) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $x \geq 2$

Ta có: $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16 \geq 20$ do $x \geq 2$ và $3\sqrt{3x-6} \geq 0.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2.$ Vậy $\min g(x) = 20 \Leftrightarrow x = 2.$

c) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $64 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -32$

với $x \geq -32$ thì $\sqrt{64+2x} \geq 0.$ Ta có $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23} \geq -\sqrt{23}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = -32.$ Vậy $\min h(x) = -\sqrt{23} \Leftrightarrow x = -32.$

d) Ta có $\forall x$ thì $x^2 \geq 0; x^4 \geq 0; x^6 \geq 0; \dots; x^{98} \geq 0; x^{100} \geq 0;$

nên $p(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{98} + x^{100} + 2)^{2015} + 2^{2015} \geq 2^{2015} + 2^{2015} = 2^{2016}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0.$

Vậy $\min p(x) = 2^{2016} \Leftrightarrow x = 0$

2.

a) $\max A(y) = 15$ tại $y = -15.$

b) $\forall y$ ta có $(4-5y)^2 \geq 0 \Rightarrow (4-5y)^2 + 2018 \geq 2018.$

Từ đó suy ra $B(y) = \frac{2015}{(4-5y)^2 + 2018} \leq \frac{2015}{2018}.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 0,8$

Vậy $\max B(y) = \frac{2015}{2018} \Leftrightarrow y = 0,8.$

c) Ta có $2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200 = (2 + 200).100 : 2 = 10100$

$(1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19)^2 + 100 = [(1+19).10 : 2]^2 + 100 = 10100$

$\max C(y) = 1 \Leftrightarrow y = 0,5;$

d) Điều kiện để $\sqrt{2y-4}$ có nghĩa là $2y-4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2.$

Ta có với $y \geq 2$ thì $(\sqrt{2y-4} - \sqrt{6})^2 \geq 0$

Do đó $\sqrt{5} - (\sqrt{2y-4} - \sqrt{6})^2 \leq \sqrt{5}.$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 5.$

Vậy $\max D = \sqrt{5}$ tại $y = 5.$

3.

a) $S = \frac{5x^4 + 4x^2 + 10}{x^4 + 2} = \frac{5(x^4 + 2) + 4x^2}{x^4 + 2} = 5 + \frac{4x^2}{x^4 + 2} \geq 5.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0.$

Vậy $\min S = 5 \Leftrightarrow x = 0.$

b) $T = \frac{2x^4 - 4x^2 + 8}{x^4 + 4} = \frac{2(x^4 + 4) - 4x^2}{x^4 + 4} = 2 - \frac{4x^2}{x^4 + 4} \leq 2.$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0.$

Vậy $\max T = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

$$c) M = \frac{8y^8 + 2a(y-3)^2 + 2a^2}{4y^8 + a^2} = \frac{2(4y^8 + a^2) + 2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2} = 2 + \frac{2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2}$$

Ta có $a > 0$ và $4y^8 + a^2 > 0; \forall y$ nên $\frac{2a(y-3)^2}{4y^8 + a^2} \geq 0 \forall y \Rightarrow M \geq 2 \forall y$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 3$

Vậy $\min M = 2 \Leftrightarrow y = 3$.

4.

a) Điều kiện $x \neq 6$. Nếu $x < 6$ thì $6-x > 0$, mà $16 > 0$ nên $A > 0$. Nếu $x > 6$ thì $6-x < 0$, mà $16 > 0$ nên $A < 0$. Do đó muốn $A_{\max}$ thì phải chọn $x < 6$ để $A > 0$. Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(6-x)_{\min}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $(6-x)_{\min} \Leftrightarrow 6-x=1$ hay $x=5$. Vậy $\max A = 16 \Leftrightarrow x = 5$.

b) Điều kiện $x \neq 1930$. Nếu $x < 1930$ thì $x-1930 < 0 \Rightarrow B < 0$.

Nếu $x > 1930$ thì $x-2019 > 0 \Rightarrow B > 0$. Do đó muốn $B_{\min}$ thì phải chọn x sao cho $B < 0$, tức là

chọn $x < 1930$. Khi đó $B_{\min}$ khi số đối của $B_{\max}$ hay $\left(\frac{1945}{1930-x}\right)_{\max} \Leftrightarrow (1930-x)_{\min} \Leftrightarrow 1930-x=1$

hay $x = 1929$.

Ta có B đạt giá trị nhỏ nhất là $-1945 \Leftrightarrow x = 1929$.

5.

a) Với $y \in \mathbb{Z}; y \neq 11$ thì C là một phân số và

$$C = \frac{36-3y}{11-y} = \frac{3(11-y)+3}{11-y} = 3 + \frac{3}{11-y}$$

Đáp số: $\max C = 6 \Leftrightarrow y = 10$

b) Điều kiện $y \neq 2$, ta có: $D = \frac{21-y}{y-2} = \frac{19-(y-2)}{y-2} = \frac{19}{y-2} - 1$

Đáp số: $\min D = -20 \Leftrightarrow y = 1$.

6.

$$P = \frac{2(11n-47)}{2(2n-9)} = \frac{22n-94}{2(2n-9)} = \frac{11(2n-9)+5}{2(2n-9)} = \frac{11}{2} + \frac{5}{2(2n-9)}$$

Đáp số: $\max P = 8 \Leftrightarrow n = 5$.

7.

$$a) f(x, y) = (x-2)^2 + (2y+1)^2 - 25 \geq -25.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy} \min f(x, y) = -25 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}$$

$$b) g(x, y) = (x+y-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Vậy $\min f(x, y) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $h(x, y) = \frac{-2}{6 + (2x - y)^2 + (x + 1)^2}$

Ta có: $\forall x; y$ thì $6 + [(2x - y)^2 + (x + 1)^2] \geq 6$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Do đó: $0 \leq \frac{1}{6 + (2x - y)^2 + (x + 1)^2} \leq \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 0 \geq \frac{-2}{6 + (2x - y)^2 + (x + 1)^2} \geq -\frac{1}{3}$

Vậy $\min h(x, y) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

d) $\forall x; y; z$ thì $k(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + (x - y - 3)^4 + (y - 1)^6 + 5 \geq 5$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2,5 \end{cases}$.

Vậy $\min k(x, y, z) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2,5 \end{cases}$.

8.

a) $A(x, y) = 2017 - [(11y - 7)^2 + (x - 100)^2] \leq 2017$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 11x - 7 = 0$ và $x - 100 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{11}$ và $x = 100$.

Vậy $\max A(x, y) = 2017 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = \frac{7}{11} \end{cases}$.

b) $\forall x; y$ thì $B(x, y) = 16 - [(x + y + 2)^2 + (y^2 - 9)^2] \leq 16$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y^2 - 9 = 0 \end{cases}$.

Ta tìm được $\begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

Do đó $\max B(x, y) = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$.

c) $\forall x; y$ thì $C(x, y) = \frac{24}{3 + (2x^3 - y - 1)^2 + (x^2 - 4)^2} \leq 8$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$.

Ta tìm được $\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-17 \end{cases}$

Do đó $\max C(x, y) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-17 \end{cases}$

$$d) D(x, y) = \frac{2[(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] + 96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} = 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

Do $\forall x, y$ ta có $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2$ nên $\frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq \frac{96}{2} = 48$

$$\text{Và } 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq 50.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy $\max D(x, y) = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

9.

a) $\min M(x, y, z) = 4 \Leftrightarrow (x = -1; y = 2; z = 1, 5)$

b) $\max N(x, y) = 4 \Leftrightarrow (x = 2; y = -3; z = 504)$

c) Do $(x-y)^2 + 0,1xy = 10$ nên $P(x, y) = 2xy = 200 - 20(x-y)^2$

Do $\forall x \in R, \forall y \in R$ ta có $20(x-y)^2 \geq 0$

Nên $P(x, y) = 200 - 20(x-y)^2 \leq 200$

Và $P(x, y) = 2xy = 200$ khi và chỉ khi $x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

Vậy $\max P(x, y) = 200 \Leftrightarrow x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

10. Ta có $c \in Z$, mà $c < 25$ nên $\max(c) = 24$

$b < 5c$ mà $\max(c) = 24$ nên $b < 120$ và $b \in Z \Rightarrow \max(b) = 119$

$a < 5b$ mà $\max(b) = 119$ nên $a < 595$ và $a \in Z \Rightarrow \max(a) = 594$

Vậy $\max(a + b + c) = 594 + 119 + 24 = 737$.

11. Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$ với $a, b, c \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9$.

Ta phải tìm $\max A$ với $A = \frac{\overline{abc}}{a + b + c}$.

Ta có $A = \frac{\overline{abc}}{a + b + c} = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = \frac{(a + b + c) + 99a + 9b}{a + b + c}$

$$= 1 + \frac{99a + 9b}{a + b + c} \leq 1 + \frac{99a + 9b}{a + b} \quad (1)$$

Mặt khác, ta lại có: $\frac{99a + 9b}{a + b} = \frac{9(10a + a + b)}{a + b} = \frac{9(a + b)}{a + b} + \frac{90a}{a + b}$

$$= 9 + \frac{90a}{a + b} \leq 9 + \frac{90a}{a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra: $A \leq 1 + 9 + \frac{90a}{a} = 10 + 90 = 100$.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a \in \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}; b = 0$ và $c = 0$.

Vậy $\max A = 100 \Leftrightarrow a \in \{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}; b = 0$ và $c = 0$.

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI HSG

Câu 1. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4|$

Lời giải

a) Ta có: $|x-2| + |3x-4| = |2-x| + |3x-4| \geq |2-x+3x-4| = |2x-2|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2-x)(3x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$

$|2x-3| + |2x-2| = |3-2x| + |2x-2| \geq |3-2x+2x-2| = |1| = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x-3)(2x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Do đó $\Rightarrow A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\min A = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Câu 2. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013-x| + |2014-x|$

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a+b|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu

Ta có: $P = |2013-x| + |2014-x| = |x-2013| + |2014-x|$

$P \geq |x-2013+2014-x| = |1| = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-2013)$ và $(2014-x)$ cùng dấu, hay $2013 \leq x \leq 2014$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow 2013 \leq x \leq 2014$

Câu 3. (Đề thi HSG 7 Lộc Hà 2018-2019)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (dpcm)$$

Câu 4. (Đề thi HSG 7 Lộc Hà 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x + 2| + |2x - 2013| = |2x + 2| + |2013 - 2x| \geq |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x + 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $\text{Max} A = 2015$ khi $x = -1$

Câu 5. (Đề thi HSG 7 Thạch Thành 2017-2018)

Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016$; $a + 2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$

Lời giải

Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Lấy (2) $-(1)$ ta được $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1 + 3c}{2}$. Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1 + 3c}{2} + c = \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}$$

Vì a, b, c không âm nên $P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}$, $\text{Max} P = 2016\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0$

Câu 6. (Đề thi HSG 7 Hoàng Hóa 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$

Lời giải

$$B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

B lớn nhất khi $x^2 + y^2 + 2$ lớn nhất

Ta có: $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2$ nhỏ nhất bằng 2, khi $x = y = 0$

Khi đó B lớn nhất bằng $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Câu 7. (Đề thi HSG 7 huyện Mùi Càng Chải 2016-2017)

Cho biểu thức: $C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2}$

a) Chứng tỏ rằng với mọi x , biểu thức C luôn có giá trị là một số dương.

b) Tìm tất cả các số nguyên x , để C có giá trị là một số nguyên

c) Với giá trị nào của x , thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

a) Ta thấy: $2(x-1)^2 + 1 > 0$ và $(x-1)^2 + 2 > 0, \forall x$,

Vậy biểu thức C luôn dương.

$$b) C = \frac{2\left[(x-1)^2 + 2\right] - 3}{(x-1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2}$$

Để C nguyên, ta phải có $(x-1)^2 + 2$ là ước dương của 3

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2, \text{ nên } (x-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

c) C nhỏ nhất khi $\frac{3}{(x-1)^2 + 2}$ lớn nhất

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ nên } \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{3}{2} \text{ hay } C \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 8. (Đề thi HSG 7 huyện Tiên Phước 2018-2019)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

$$\text{Vì } a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0 \text{ nên ta được: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Câu 9. (Đề thi HSG 7 huyện Tân An 2017-2018)

A, Chứng tỏ rằng: $M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

B, Cho tích a, b là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Lời giải

$$\begin{aligned} A. M &= 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25.(4-1)(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25.[4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\ &= 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25.4^{2018} - 25 + 25 \end{aligned}$$

$$= 25.4^{2018} = 25.4.4^{2017} = 100.4^{2017} \cdot 100$$

Vậy $M:10^2$

B, Đặt $a.b = c^2 (1)$

Gọi $(a, c) = d$ nên $a:d, c:d$

Hay $a = m.d$ và $c = n.d$ với $(m, n) = 1$

Thay vào (1) ta được $m.d.b = n^2.d^2$

$$\Rightarrow m.b = n^2.d \Rightarrow b:n^2 \text{ vì } (a, b) = 1 = (b, d)$$

$$\text{Và } n^2:b \Rightarrow b = n^2$$

Thay vào (1) ta có $a = d^2 \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 10. (Đề thi HSG 7 Lê Hồng Phong 2016-2017)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x-y| + |y-z| + |z-x| = |x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$$

$$\text{Với mọi số nguyên } x \text{ ta lại có } |x| + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} |x-y| + (x-y) \\ |y-z| + (y-z) \\ |z-x| + (z-x) \end{cases} \text{ là các số chẵn với mọi số nguyên } x, y, z$$

Suy ra $|x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x-y| + |y-z| + |z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

Câu 11. (Đề thi HSG 7 Lê Hồng Phong 2016-2017)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96}.(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2.31 + 2^6.31 + \dots + 2^{96}.31$$

$$D = 31.(2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho 31}$$

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 12. (Đề thi HSG 7 Sơn Dương 2016-2017)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$

Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

Vì $a, b, c > 0$ nên: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1. \text{ Do đó } M > 1 \quad (1)$$

$$\text{Mà } \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right)$$

$$= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3$$

$$\text{Vì } \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) > 1 \text{ suy ra } M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 13. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2018-2019)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right)$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38}$$

$$B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$$

$$\Rightarrow 58B = \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} = 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \right) = 2A$$

$$B = \frac{2}{58} A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{58}{2} = 29 \in \mathbb{Z}$$

Câu 14. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2018-2019)

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^8$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307

Lời giải

$$\begin{aligned} a) S &= 17 \cdot (1 + 17 + 17^2) + 17^4 \cdot (1 + 17 + 17^2) + \dots + 17^{16} \cdot (1 + 17 + 17^2) \\ &= 17 \cdot 307 + 17^4 \cdot 307 + \dots + 17^{16} \cdot 307 \\ &= 307 \cdot (17 + 17^4 + \dots + 17^{16}) : 307 \end{aligned}$$

Vậy $S : 307$

Câu 15. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2018-2019)

Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Gọi S là tổng các giá trị tuyệt đối của hiệu từng cặp số có được từ 4 số này. S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ khi đó:

$$\begin{aligned} S &= |a - b| + |a - c| + |a - d| + |b - c| + |b - d| + |c - d| \\ &= (a - b) + (a - c) + (a - d) + (b - c) + (b - d) + (c - d) = (3a + b) - (c + 3d) \end{aligned}$$

Do $c + 3d \geq 0 \Rightarrow S \leq 3a + b$; $S = 3a + b$ khi $c = d = 0$, lúc đó $a + b = 1$

Do $a \leq 1$ ta có: $S = 2a + (a + b) = 2a + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1$ hay $S \leq 3$

Câu 16. (Đề thi HSG 7 Hoàng Hóa 2017-2018)

a) Tìm hai số hữu tỷ a và b biết: $a - b = 2(a + b) = a : b$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = |2012 - x| + |2013 - x|$

c) Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương

Lời giải

a) Từ $a - b = 2(a + b) \Rightarrow a - b = 2a + 2b \Rightarrow -a = 3b \Rightarrow a = -3b$

Mặt khác: $a - b = a : b \Rightarrow -3b - b = -3b : b \Rightarrow -4b = -3 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow a = -3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$$

b) Sử dụng $|A| + |B| \geq |A + B|$. Dấu "=" xảy ra khi A, B cùng dấu (*)

Ta có:

$$M = |2012 - x| + |2013 - x| = |2012 - x| + |x - 2013| \geq |2012 - x + x - 2013| = |-1| = 1$$

Vậy $\min M = 1 \Leftrightarrow 2012 \leq x \leq 2013$

c) Nhận xét

Nếu số chính phương chia hết cho a (a là số nguyên tố) thì nó chia hết cho a^2

Giả sử: $A = n^2 + 2002$ là số chính phương.

Xét trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow A = n^2 + 2002 = 4k^2 + 2002$$

Ta có: $4k^2$ chia hết cho 2, 2002 chia hết cho 2 $\Rightarrow A$ chia hết cho 2 $\Rightarrow A$ chia hết cho 4

Do $4k^2$ chia hết cho 4, còn 2002 không chia hết cho 4 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 4 (loại)

Xét trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1$

$$\Rightarrow A \text{ là số chính phương lẻ, có dạng } (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Mà $A = (2k+1)^2 + 2002 = 4k^2 + 4k + 2003$ chia cho 4 dư 3 (loại)

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Câu 17. (Đề thi HSG 7 2017-2018)

Tìm tất cả các số nguyên a biết: $|a| \leq 4$

Lời giải

$$0 \leq |a| \leq 4 \Rightarrow |a| = 0; 1; 2; 3; 4$$

$$|a| = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$|a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$|a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

Câu 18. (Đề thi HSG 7 2017-2018)

Tìm phân số có tử là 7 biết nó lớn hơn $-\frac{9}{10}$ và nhỏ hơn $-\frac{9}{11}$

Lời giải

Gọi mẫu phân số cần tìm là x , ta có:

$$-\frac{9}{10} < \frac{7}{x} < -\frac{9}{11} \Rightarrow \frac{63}{-70} < \frac{63}{9x} < \frac{63}{-77} \Rightarrow -77 < 9x < -70, \text{ vì } 9x:9 \Rightarrow 9x = -72 \Rightarrow x = 8$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{7}{8}$

Câu 19. (Đề thi HSG 7 Thạch Thành 2017-2018)

Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

1) Gọi $x = \frac{m}{n} (m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1)$. Khi đó:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \quad (1)$$

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 : m$$

$$\Rightarrow n^2 : m \Rightarrow n : m$$

$$\text{Mà } (m, n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

*) Với $m = 1$:

$$\text{Từ (1), ta có: } x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}. \text{ Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n \text{ hay } n = \pm 1$$

*) Với $m = -1$:

$$\text{Từ (1), ta có: } x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}. \text{ Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n) \text{ hay } n = \pm 1$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m}{n} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{-1} \text{ hay } x = \pm 1$$

Câu 20. (Đề thi HSG 7 Hương Khê 2016-2017)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên :

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2) ; \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 21. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

So sánh : $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{17} > \sqrt{16}; \sqrt{26} > \sqrt{25} \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{1} = 4 + 5 + 1 = 10$

Mà $10 = \sqrt{100} > \sqrt{99}$. Vậy $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}$

Câu 22. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$$

Câu 23. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

a) Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r

b) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$

Lời giải

a) Vì chia cho 42 có số dư là r nên $p = 42k + r$ ($0 < r < 42, r \in \mathbb{N}$)

Hay $p = 2.3.7k + r$

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

$\Rightarrow r$ là hợp số không chia hết cho 2, 3, 7 và $r < 42$, Vậy hợp số $r = 25$

b) Ta có: $(a+b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên $a+b$ là số chính phương

Đặt $a+b=x^2 (x \in \mathbb{N}^*)$, suy ra $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 = x^6$

$$\Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100 \text{ và } \overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4 \text{ vì } x \in \mathbb{N}^*$$

$$\rightarrow x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2+7)^3 \Rightarrow x = 3(tm)$$

$$\rightarrow x = 4 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 \neq (6+4)^3 = 1000 \Rightarrow x = 4(ktm)$$

Vậy $\overline{ab} = 27$

Câu 24. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1 (x \neq 2)$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x-2 \text{ lớn nhất và } x-2 < 0 \Leftrightarrow x \text{ lớn nhất và } x < 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 (do \dots x \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Khi đó GTNN của } M \text{ là } M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4 \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 25. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2018-2019)

a) Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1:2:3

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b-45| + b - 45$

Lời giải

a) Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a \leq b \leq c \leq 9, \text{ ta có: } 1 \leq a+b+c \leq 27$$

Mặt khác do số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9

$$\text{Do đó } a+b+c = 9 \vee a+b+c = 18 \vee a+b+c = 27$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$$

Như vậy $a+b+c$ chia hết cho 6, nên $a+b+c = 18$

Từ đó suy ra $a = 3, b = 6, c = 9$

Do đó số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn.

Vậy hai số cần tìm là 396, 936

b) Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Leftrightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

$$\text{Khi đó } |b-45| + b - 45 = 38$$

$$\text{Nếu } b < 45, \text{ ta có: } -(b-45) + b - 45 = 38 \Leftrightarrow 0 = 38 (ktm)$$

$$\text{Nếu } b \geq 45, \text{ ta có: } 2(b-45) = 38 \Leftrightarrow b = 64 (tm)$$

Vậy $(a, b) = (0; 64)$

Câu 26. (Đề thi HSG 7 Võ Thị Sáu 2016-2017)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 27. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2017-2018)

Tìm số có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 36 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1; 2; 3

Lời giải

Gọi ba chữ số của số phải tìm là a, b, c ta có:

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số

bằng nhau ta được: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} (*)$

Do số phải tìm chia hết cho 36 nên số đó chia hết cho 9 suy ra $a+b+c$ chia hết cho 9

Mà a, b, c là các chữ số có ít nhất một chữ số khác 0 nên $a+b+c$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 9; 18; 27

Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow (*) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6} (k\text{tm})$

Nếu $a+b+c=18 \Rightarrow (*) \Rightarrow a=3, b=6, c=9$, vì số phải tìm chia hết cho 36 nên chữ số hàng đơn vị chẵn, ta có số 396 hoặc 936.

Nếu CA

Vậy số phải tìm là 936; 396

Câu 28. (Đề thi HSG 7 Việt Yên 2017-2018)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a+3 = 5^c$

Lời giải

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a+3 = 5^c$

$$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b : 5^c$$

$$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a+3) \Rightarrow a^2(a+3) + 5 : (a+3)$$

Mà $a^2(a+3) : (a+3) \Rightarrow 5 : (a+3) \Rightarrow a+3 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\} \quad (1)$

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a+3 \geq 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a+3=5 \Rightarrow a=2$

$$\Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5; 25 = 5^b \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow 2+3 = 5^c \Rightarrow c=1$$

Vậy $a = 2; b = 2; c = 1$

Câu 29. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Trong ba số a, b, c có một số dương, một số âm và một số bằng 0, ngoài ra còn biết: $|a| = b^2(b - c)$.

Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0

Lời giải

Ta có: $|a| \geq 0, b^2 \geq 0$ nên từ $|a| = b^2(b - c) \Rightarrow b - c \geq 0 \Rightarrow c \leq b$

+Nếu $b = 0 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ có hai số a và b bằng 0, vô lý

+Nếu $b < 0 \Rightarrow c \leq b < 0 \Rightarrow$ có hai số âm b và c , vô lý

+Nếu $b > 0$, ta xét $a = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c > 0 \Rightarrow$ có hai số dương b và c , vô lý
 $\Rightarrow a < 0$

Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$

Câu 30. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$

Lời giải

Từ $a^2 + a - p = 0 \Rightarrow p = a^2 + a = a(a + 1)$

Với $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = a(a + 1) : 2; p$ là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow a(a + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Câu 31. (Đề thi HSG 7 Hoài Nhơn 2014-2015)

Tìm hai số khác 0, biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3, \frac{1}{3}, \frac{200}{3}$

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y .

Ta có: $\frac{x + y}{3} = \frac{x - y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x + y + x - y}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5} = k \neq 0$

$\Rightarrow x = \frac{5k}{3} (1); x + y = 3k (2); xy = \frac{200k}{3} (3)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3} \Rightarrow xy = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9} (4)$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{200k}{3} = \frac{20k^2}{9} \Leftrightarrow k = 30 (k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50; y = \frac{4 \cdot 30}{3} = 40$

Vậy hai số cần tìm là 50; 40

Câu 32. (Đề thi HSG 7 huyện Tân An 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết :

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

Có: $|7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2000$$

Từ đó tìm được
$$\begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

$A \geq 0$, mà $A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Vậy $\min A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Câu 33. (Đề thi HSG 7 đề 139 năm 2015-2016)

Cho biểu thức $A = \frac{2012 - x}{6 - x}$. Tìm giá trị nguyên của x để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị đó

Lời giải

Ta có: $A = 1 + \frac{2006}{6 - x}$

Để A lớn nhất thì $\frac{2006}{6 - x}$ phải lớn nhất

Ta thấy 2006 là số dương nên $6 - x > 0$ và $6 - x$ phải đạt giá trị nhỏ nhất

$\Rightarrow x = 5$ (vì $x \in \mathbb{Z}$) thì A đạt giá trị lớn nhất là $A = 2007$

Câu 34. (Đề thi HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2017-2018)

Có tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao?

Lời giải

Ta có: $0 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{201100} \leq \overline{2011ab} \leq \overline{201199} \Rightarrow 448^2 < \overline{2011ab} < 449^2$

448 và 449 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $\overline{2011ab}$ không là bình phương của một số tự nhiên.

Câu 35. (Đề thi HSG 7 đề 141 năm 2018-2019)

CMR: với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

Ta có:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n)$$

$$= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có đpcm.

Câu 36. (Đề thi HSG 7 đề 142)

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \frac{-2012}{4025}; B = \frac{-1999}{3997}$

b) $A = 3^{21}; B = 2^{31}$

Lời giải

$$a) \frac{2012}{4025} < \frac{2012}{4024} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} = \frac{1999}{3998} < \frac{1999}{3997} \Rightarrow \frac{2012}{4025} < \frac{1999}{3997}$$

$$\Rightarrow \frac{-2012}{4025} > \frac{-1999}{3997}. \text{ Vậy } A > B$$

$$b) A = 3^{21} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10} \quad B = 2^{31} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$$

Suy ra $A > B$

Câu 37. (Đề thi HSG 7 đề 142)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 ($x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots \\ &+ (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 \cdot (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

Câu 38. (Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Xuyên năm 2017-2018)

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$
- b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 7 = |b-5| + b-5$

Lời giải

a) Ta có: $x \geq 0; \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ (tmdk). Vậy $P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-5| + b-5$ là số chẵn với $b-5 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

Khi đó $|b-5| + b-5 = 8$

Nếu $b < 5 \Rightarrow -(b-5) + b-5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8$ (ktm)

Nếu $b \geq 5 \Rightarrow 2(b-5) = 8 \Leftrightarrow b = 9$ (tm)

Vậy $(a, b) = (0, 9)$

Câu 39. (Đề thi HSG 7 Huyện Mỹ Xuyên năm 2017-2018)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

$$0 \leq (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$;

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

+) Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$, nhân cả 2 vế với a dương ta được:

$$a^2 < ab + ac. \text{ Tương tự: } b^2 < ba + bc; c^2 < ca + cb$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 40. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Thay vào đầu bài ta có: } 1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\text{TH1: } y-1=1 \Rightarrow y=2 \text{ và } z-1=2 \Rightarrow z=3$$

$$\text{TH2: } y-1=2 \Rightarrow y=3 \text{ và } z-1=1 \Rightarrow z=2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1; 2; 3); (1; 3; 2)$

Câu 41. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 42. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2003|$ với x là số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = |2x-2| + |2x-2003| = |2x-2| + |2003-2x| \geq |2x-2+2003-2x| = 2011$$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x-2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Câu 43. (Đề thi HSG 7 Trường thực hành Sài Gòn 2017-2018)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$

Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x

Câu 44. (Đề thi HSG 7 Huyện Đất Mũi 2016-2017)

a) Tìm chữ số tận cùng của A biết : $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Chứng minh A chia hết cho 10 suy ra chữ số tận cùng của A là chữ số 0

b) Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x = 1; 3; -3; 7$$

Câu 45. (Đề thi HSG 7 Huyện Đất Mũi 2016-2017)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow ab \geq 0$ ta có :

$$|x-a| + |x-d| \geq |x-a| + |d-x| \geq |x-a+d-x| = d-a \quad (1)$$

$$|x-b| + |x-c| \geq |x-b| + |c-x| \geq |x-b+c-x| = c-b \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c+d-a-b$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi dấu “=” ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x-a)(d-x) \geq 0 \text{ và } (x-b)(c-x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq d \text{ và } b \leq x \leq c.$$

Do đó $\min A = c+d-a-b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Câu 46. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 154 – 2017-2018)

Chứng minh rằng : với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ có tận cùng là 0.

Lời giải

Ta có:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n)$$

$$= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có đpcm

Câu 47. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 154 – 2017-2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x - 2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}, (x - 2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 2010)^2 = 4 \\ (x - 2010)^2 = 1 \\ (x - 2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{cases} \\ x - 2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2010; 6); (2010; -6)$

Câu 48. (Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Trách 2017-2018)

a) Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

b) Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

a) Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$$

Lập bảng:

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

b) Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Nhận thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3 + 2 = 5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13 + 8 = 21$$

(trái với giả thiết)

Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó, trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác

Câu 49. (Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Trạch 2017-2018)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x+y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x+y)}{y} = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} \\ &= \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}$ và $\frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1-x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{b}{a+b}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 50. (Đề thi HSG 7 Huyện Vị Thanh 2017-2018)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết $x + y = x \cdot y$

Lời giải

$$x + y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y : y-1 \Rightarrow y-1+1 : y-1 \Rightarrow 1 : y-1, \text{ do đó } y-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=2 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(0, 0); (2, 2)$

Câu 51. (Đề thi HSG 7 Huyện Vị Thanh 2017-2018)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Vì } 0 \leq a \leq b+1 \leq c+2 \text{ nên } 0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2 \\ \Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \text{ (vì } a+b+c=1) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$

Câu 52. (Đề thi HSG 7 Huyện Phú Lý 2016-2017)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1}$$

$$= \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x+1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$

Câu 53. (Đề thi HSG 7 Huyện Phú Lý 2016-2017)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a+b$

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy $ab > a+b$

Câu 54. (Đề thi HSG 7 Huyện Phú Lý 2016-2017)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng : $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 55. (Đề thi HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

a) Tìm tất cả các cặp giá trị dương $(x; y)$ sao cho $4x + 5y = 65$

b) Chứng minh rằng : $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}}$ chia hết cho 10.

Lời giải

a) $x = 16 - y - \frac{y-1}{4} > 0$ nên $y < 16$ mà $y-1:4$ nên $y \in \{1; 5; 9; 13\}$, từ đó tìm được các cặp $(x; y)$

b) Chứng minh các số mũ đều có số dư bằng 3 khi chia cho 4

Đặt $555^{777} = 4q + 3; 555^{333} = 4p + 3$, ta có:

$$333^{555^{777}} + 777^{555^{333}} = 333^{4q+3} + 777^{4p+3} = 333^3 \cdot (333^4)^q + 777^3 \cdot (777^4)^p$$

$$= (\text{số tận cùng là } 1) + (\text{số tận cùng là } 3) \times (\text{số tận cùng là } 1) = \dots 7 + \dots 3 = \dots 0$$

Câu 56. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 159 – 2016-2017)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2003|$ với x là số nguyên

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$

Lời giải

a) Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

b) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài 1 $\frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$

TH1: $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$ và $z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$

TH2: $y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$ và $z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1; 2; 3); (1; 3; 2)$

Câu 57. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 159 – 2016-2017)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 58. (Đề thi HSG 7 THCS Hiền Quan 2018-2019)

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55

Lời giải

$$7^4 \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 : 55 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 59. (Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lặc 2015-2016)

a) Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

c) Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

$$\text{a) } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b) Vì $|2015 - x| \geq 0$ nên :

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có : } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$

$$\text{Suy ra : } 2014 \leq x \leq 2016 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$

$$\text{c) Ta có : } 25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4$$

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra :

$$\text{TH1: } (x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } (x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 2016 \vee x = 2014 \Rightarrow y^2 = 17(ktm)$$

Vậy $x = 2015$, $y = 5$ và $x = 2015$, $y = -5$

Câu 60. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x - y| + |y - z| + |z - x| = |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$$

$$\text{Với mọi số nguyên } x \text{ ta lại có } |x| + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} |x - y| + (x - y) \\ |y - z| + (y - z) \\ |z - x| + (z - x) \end{cases} \text{ là các số chẵn với mọi số nguyên } x, y, z$$

Suy ra $|x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$$

Câu 61. (Đề thi HSG 7 THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

$$\begin{aligned}
 &= (2x-5y)^2 - (6x-15y)^2 - |xy-90| \\
 &= (2x-5y)^2 - 9 \cdot (2x-5y)^2 - |xy-90| \\
 &= -[8 \cdot (2x-5y)^2 + |xy-90|]
 \end{aligned}$$

Ta thấy $(2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8 \cdot (2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y
 $|xy-90| \geq 0$ với mọi x, y

Khi đó $8 \cdot (2x-5y)^2 + |xy-90| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $-[8 \cdot (2x-5y)^2 + |xy-90|] \leq 0$ với mọi x, y

Hãy $P \leq 0$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} (2x-5y)^2 = 0 \\ |xy-90| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ xy = 90 \end{cases}$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k; y = 2k$

Mà $xy = 90$ nên $5k \cdot 2k = 90 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$

Nếu $k = 3 \Rightarrow x = 15; y = 6$

Nếu $k = -3 \Rightarrow x = -15; y = -6$

Vậy $Max P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15; y = 6 \\ x = -15; y = -6 \end{cases}$

Câu 62. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Tạo 2018-2019)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y+2) - (y+2) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(y+2) = 3$

$$\Leftrightarrow (y+2)(x-1) = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$$

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Câu 63. (Đề thi HSG 7 MÃ ĐỀ 165 – 2018-2019)

Chứng minh rằng: với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ có chữ số tận cùng là 0

Lời giải

Ta có:

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n)$$

$$= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có đpcm

Câu 64. (Đề thi HSG 7 2018-2019)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$

Vì $0 \leq (x - 2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}, (x - 2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 2010)^2 = 4 \\ (x - 2010)^2 = 1 \\ (x - 2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{cases} \\ x - 2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2010; 6)$

Câu 65. (Đề thi HSG 7 THCS Trần Hưng Đạo 2018-2019)

a) Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

b) Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Lời giải

a) Viết được $(x + 1)^2 = 42 + 8y^2$

Suy ra $(x + 1)^2$ là số chẵn, để có $(x + 1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài

b) Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 66. (Đề thi HSG 7 Huyện Nam Sách 2017-2018)

a) Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

c) Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b) Vì $|2015 - x| \geq 0$ nên:

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có: } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-2014)(2016-x) \geq 0$

Suy ra : $2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$

c) Ta có : $25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x-2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x-2015)^2 < 4$

Do x nguyên nên $(x-2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra :

$$TH1: (x-2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$TH2: (x-2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2015 = 1 \\ x-2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$$

Với $x = 2016 \vee x = 2014 \Rightarrow y^2 = 17(ktm)$

Vậy $x = 2015, y = 5$ và $x = 2015, y = -5$

Câu 67. (Đề thi HSG 7 2018-2019)

Chứng minh rằng : Với mọi số nguyên dương n thì: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

Với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \\ &= 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^n \cdot (2^2 + 1) \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$ với mọi n là số nguyên dương.

Câu 68. (Đề thi HSG 7 huyện Rạch Giá 2018-2019)

a) Tìm chữ số tận cùng của A biết: $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} a) 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^n \cdot (2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $A : 10$ suy ra chữ số tận cùng của A là chữ số 0

b) Ta có:

$$\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-2 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x = 1; 3; -3; 7$$

Câu 69. (Đề thi HSG 7 huyện Rạch Giá 2018-2019)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1) \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c + d - a - b$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x - a)(d - x) \geq 0 \text{ và } (x - b)(c - x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq d \text{ và } b \leq x \leq c. \text{ Do đó}$$

$$\min A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$$

Câu 70. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên

Lời giải

$$P = |x - 2012| + |x - 2013|$$

Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

Nếu $x > 2013$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

Nếu $x < 2012$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$

Câu 71. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số

b) Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$)

Với $p = 3k + 1$

$$\text{Suy ra } p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Với $p = 3k - 1$

$$\text{Suy ra } p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số

b) Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196

Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

Với $2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

Với $2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

Với $2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

Với $2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

Vậy số cần tìm là $n = 32$

Câu 72. (Đề thi HSG 7 huyện- THCS Phan Đình Phùng 2017-2018)

a) Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

b) Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

a) Ta có $M = 25.(4 - 1)(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$$= 25.(4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 25.4^{2019} = 25.4.4^{2018} = 100.4^{2018} = 10^2.4^{2018} : 10^2$$

Vậy $M : 10^2$

b) Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a, b) = 1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó $a.b$ chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a.b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$ thì a và b đều là số chính phương

Câu 73. (Đề thi HSG 7 huyện- THCS Phan Đình Phùng 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết:

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của A là 0. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được :
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 0$. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Câu 74. (Đề thi HSG 7 huyện Sơn Tây 2018-2019)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11

Lời giải

$$\overline{abcabc} = \overline{abc}.1001 = 91.11.\overline{abc} : 11. \text{ Vậy } \overline{abcabc} : 11$$

Câu 75. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017-2018)

Tìm các số nguyên x để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên $y = \frac{2x-3}{x-2}$

Lời giải

Biểu thức $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2x-3 : x-2$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+1: x-2 \Leftrightarrow 1: x-2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Câu 76. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017-2018)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n \text{ chia hết cho } 25$$

b) Cho các số thực $a; b; c; d; e$ khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n &= (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) \\ &= 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8 \end{aligned}$$

Vì n nguyên dương nên $5^n \cdot 24$ chia hết cho 24; $3^n \cdot 8$ chia hết cho 24

Vậy $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên dương n

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} &\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4} \\ &= \frac{2a^4}{2b^4} = \frac{3b^4}{3c^4} = \frac{4c^4}{4d^4} = \frac{5d^4}{5e^4} = \frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Câu 77. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017-2018)

a) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phải là một số nguyên

$$A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b}$$

Lời giải

a) Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

$$\text{Mặt khác: } \frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} \quad (2)$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

$$\text{b) } A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Ta có: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow A > 1$

Mặt khác: $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c} \Rightarrow A < 2$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 78. (Đề thi HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018-2019)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$

b) Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $x - xy + y = 0$

Lời giải

a) $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x-2017| \geq 0$ nên $|x-2017|+2019 \geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

b) $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \frac{4^2-1}{4^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$
 $= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (1+1+1+\dots+1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$
 $\Rightarrow S < n-1 \quad (1)$

Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > -1 \Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n-1) - 1 = n-2$ Từ

$\Rightarrow S > n-2 \quad (2)$

(1) và (2) suy ra $n-2 < S < n-1$ hay S không là số nguyên

c) Ta có:

$x - xy + y = 0$

$\Rightarrow x(1-y) + y = 0$

$\Rightarrow (1-y) - x(1-y) = 1$

$\Leftrightarrow (1-x)(1-y) = 1 = 1.1 = -1. -1$

1-x	1	-1
1-y	1	-1
X	0	2
y	0	2

Vậy $(x;y) = \{(0;0); (2;2)\}$

Câu 79. (Đề thi HSG 7 huyện Phù Cát 2017-2018)

a) Trong ba số a, b, c có một số dương, một số âm và một số bằng 0, ngoài ra còn biết:

$$|a| = b^2(b-c). \text{ Hỏi số nào dương, số nào âm, số nào bằng 0}$$

b) Tìm hai số x và y sao cho $x + y = xy = x : y$ ($y \neq 0$)

c) Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$

Lời giải

a) Ta có: $|a| \geq 0, b^2 \geq 0$ nên từ $|a| = b^2(b-c) \Rightarrow b-c \geq 0 \Rightarrow c \leq b$

+Nếu $b = 0 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ có hai số a và b bằng 0, vô lý

+Nếu $b < 0 \Rightarrow c \leq b < 0 \Rightarrow$ có hai số âm b và c , vô lý

+Nếu $b > 0$, ta xét $a = 0 \Rightarrow b-c = 0 \Rightarrow b = c > 0 \Rightarrow$ có hai số dương b và c , vô lý
 $\Rightarrow a < 0$

Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$

b) Từ $x + y = xy \Rightarrow x = xy - y = y(x-1) \Rightarrow x : y = x - 1$

Ta lại có: $x : y = x + y \Rightarrow x + y = x - 1 \Rightarrow y = -1$

$$\Rightarrow x = xy - y = -x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy hai số cần tìm là $x = \frac{1}{2}; y = -1$

c) Từ $a^2 + a - p = 0 \Rightarrow p = a^2 + a = a(a+1)$

Với $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = a(a+1) : 2; p$ là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$

$$\Rightarrow a(a+1) = 2 = 1.2 = (-1).(-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Câu 80. (Đề thi HSG 7 huyện Phù Cát 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4|$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x-2| + |3x-4| = |2-x| + |3x-4| \geq |2-x+3x-4| = |2x-2|$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (2-x)(3x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$$|2x-3| + |2x-2| = |3-2x| + |2x-2| \geq |3-2x+2x-2| = |1| = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (2x-3)(2x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Do đó $\Rightarrow A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\min A = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Câu 81. (Đề thi HSG 7 huyện Bến Lức 2018-2019)

- a) Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2
- b) Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a,b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{Ta có } M = 25.(4-1)(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ & = 25.(4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ & = 25.4^{2019} - 25.4^{2018} = 100.4^{2018} = 10^2.4^{2018} : 10^2 \end{aligned}$$

Vậy $M : 10^2$

- b) Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a,b) = 1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó a.b chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a.b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu a.b là số chính phương và $(a,b) = 1$ thì a và b đều là số chính phương

Câu 82. (Đề thi HSG 7 huyện Bến Lức 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết:

$$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000|$$

Lời giải

Ta có $|7x-5y| \geq 0; |2z-3x| \geq 0$ và $|xy+yz+zx-2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của A là 0. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được : $\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$

Vậy $\min A = 0$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$

Câu 83. (Đề thi HSG 7 huyện Đáp Cầu 2017-2018)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 84. (Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2016-2017)

Cho $M = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta thấy $F = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow \frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$. Vậy $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất

Hay $x-15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Vậy $x = 14 \Leftrightarrow F_{\min} = -28$

Câu 85. (Đề thi HSG 7 huyện VIỆT YÊN 2016-2017)

Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17 (a, b \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$*3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

Ta có: $3a + 2b : 17$

$$\Rightarrow 9(3a + 2b) : 17$$

$$\Rightarrow 27a + 18b : 17$$

$$\Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$$

$$\Rightarrow 10a + b : 17$$

$$*10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Ta có: $10a + b : 17$

$$\Rightarrow 2(10a + b):17$$

$$\Rightarrow 20a + 2b:17$$

$$\Rightarrow 17a + 3a + 2b:17$$

$$\Rightarrow 3a + 2b:17$$

Câu 86. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY 2015-2016)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

$$0 \leq (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ca;$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$, nhân cả 2 vế với a dương ta được:

$$a^2 < ab + ac. \text{ Tương tự: } b^2 < ba + bc; c^2 < ca + cb$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 87. (Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY 2015-2016)

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

d) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$

Lời giải

c) Ta có: $x \geq 0; \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ (tmdk). Vậy $P_{\min} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

d) Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

Khi đó $|b - 5| + b - 5 = 8$

Nếu $b < 5 \Rightarrow -(b - 5) + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8$ (ktm)

Nếu $b \geq 5 \Rightarrow 2(b - 5) = 8 \Leftrightarrow b = 9$ (tm)

Vậy $(a, b) = (0, 9)$

Câu 88. (Đề thi HSG 7 huyện TIỀN HẢI 2016-2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 3.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

Lời giải

Đặt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

Đặt $T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$. Tính được: $T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

Câu 89. Đề thi HSG 7 huyện ĐỨC PHỐ 2015-2016)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy $ab > a + b$

Câu 90. (Đề thi HSG 7 huyện ĐỨC PHỐ 2015-2016)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 91. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27-2x}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$, suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất

*Nếu $x > 12$ thì $12-x < 0 \Rightarrow \frac{3}{12-x} < 0$

*Nếu $x < 12$ thì $12-x > 0 \Rightarrow \frac{3}{12-x} > 0$

Từ 2 trường hợp trên suy ra $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất khi $12-x > 0$

Vì phân số $\frac{3}{12-x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất

Hay $12-x=1 \Leftrightarrow x=11$

Suy ra A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x=11$

Câu 92. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a+3 = 5^c$.

Lời giải

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a+3 = 5^c$

Vậy $5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b : 5^c$

Hay $(a^3 + 3a^2 + 5) : (a+3) \Leftrightarrow a^2 : (a+3) + 5 : a+3$

Mà $a^2 : (a+3) : (a+3) \Rightarrow 5 : (a+3) \Rightarrow a+3 \in U(5)$

Hay $a+3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$, do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a+3 \geq 4$

Từ (1) và (2) suy ra $a+3=5 \Rightarrow a=2$

Từ đó tính được $5^b = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 25 = 5^2 \Rightarrow b=2$

Và $5^c = a+3 = 2+3 = 5 \Rightarrow c=1$

Vậy $a=2, b=2, c=1$

Câu 93. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Từ 200 số tự nhiên $1; 2; 3; \dots; 200$, ta lấy ra k số bất kỳ sao cho trong các số vừa lấy luôn tìm được 2 số mà số này là bội của số kia. Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

Lời giải

Xét 100 số $101; 102; 103; \dots; 200$. Trong 100 số này rõ ràng không có số nào là bội của số kia (vì $101 \cdot 2 > 200$). Do đó $k \geq 101$ (1)

Xét 101 số bất kỳ lấy ra từ 200 số đã cho: $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{101} \leq 200$

Ta viết 101 số vừa lấy ra dưới dạng:

$$a_1 = 2^{n_1} \cdot b_1 \quad a_2 = 2^{n_2} \cdot b_2$$

$$a_3 = 2^{n_3} \cdot b_3 \dots \dots \dots a_{101} = 2^{n_{101}} \cdot b_{101}$$

Với n_i là số tự nhiên, còn b_i là các số lẻ ($i = \overline{1; 101}$)

Suy ra các b_i là các phần tử của tập gồm 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên: $\{1; 3; 5; \dots; 199\}$. Vì có 101 các số b_i mà chỉ có 100 giá trị nên sẽ tồn tại ít nhất 2 số b_i và b_j nào đó bằng nhau.

Suy ra trong hai số $a_i = 2^{n_i} \cdot b_i$ và $a_j = 2^{n_j} \cdot b_j$ sẽ có một số là bội của số còn lại

Như vậy nếu lấy ra 101 số trong 200 số đã cho thì luôn có 2 số mà số này là bội của số kia (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị nhỏ nhất của k là 101

Câu 94. (Đề thi HSG 7 trường Thạch Bình 2017-2018)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (1), ta lại có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

Câu 95. (Đề thi HSG 7 trường THCS Trục Lĩnh 2016-2017)

Cho một tam giác cân có độ dài hai cạnh là 3cm và 21cm. Chu vi của tam giác đó bằng:

A. 39cm B. 27cm C. 45cm D. 46cm

Lời giải

B

Câu 96. (Đề thi HSG 7 trường THCS Trục Lĩnh 2016-2017)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + a.10^2 + b.10 + c \\ &= a.10^2.(10^3 + 1) + b.10.(10^3 + 1) + c.(10^3 + 1) \\ &= (10^3 + 1).(a.10^2 + b.10 + c) = 1001.(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= 11.91.(a.10^2 + b.10 + c) : 11\end{aligned}$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 97. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nghĩa Điền 2017-2018)

Chứng minh rằng $(81^7 - 27^9 - 9^{13}) : 405$

Lời giải

$$\begin{aligned}81^7 - 27^9 - 9^{13} &= 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 5 = 3^{22} \cdot 405 \\ \Rightarrow (81^7 - 27^9 - 9^{13}) &: 405\end{aligned}$$

Câu 98. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Văn Trỗi 2017-2018)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 99. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Văn Trỗi 2017-2018)

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x-7}{x-2}$; $B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a) Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

Để A nguyên thì $\frac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$

$B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

Để B nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Do đó $x=5, x=1, x=4, x=2$

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$

b) Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x=1$.

Câu 100. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2017-2018)

Chứng minh rằng: với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có đpcm.

Câu 101. (Đề thi HSG 7 huyện Quang Trung 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi:

$$B = |x-2| + |3-x|$$

Lời giải

Ta xét các trường hợp:

+Nếu $x < 2 \Rightarrow x-2 < 0; 3-x > 0$

Do đó: $|x-2| = -(x-2); |3-x| = 3-x \Rightarrow B = -(x-2) + 3-x = -2x+5$

Vì $x < 2 \Rightarrow -x > -2$. Do đó $B = -2x+5 > (-2) \cdot 2 + 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B$ nhỏ nhất $= 2$

+nếu $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x-2 \geq 0; 3-x \geq 0 \Rightarrow B = x-2 + 3-x = 1 \Rightarrow B = 1$

+Nếu $x > 3 \Rightarrow x-2 > 0; 3-x < 0 \Rightarrow B = x-2 - (3-x) = 2x-5$

Vì $x > 3 \Rightarrow B = 2x-5 > 2 \cdot 3 - 5 \Leftrightarrow B > 1 \Rightarrow B = 2$

Từ 3 trường hợp trên ta được $B_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Câu 102.(Đề thi HSG 7 huyện Quang Trung 2018-2019)

(3 điểm) Tìm các số tự nhiên a, b sao cho:

$$(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$$

Lời giải

Theo đề bài $\Rightarrow 2008a + 3b + 1$ và $2008^a + 2008a + b$ là hai số lẻ

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a + 2008a$ là số chẵn

Để $2008^a + 2008a + b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ, nếu b lẻ $\Rightarrow 3b + 1$ chẵn, do đó $2008a + 3b + 1$ chẵn (không thỏa mãn), vậy $a = 0$

Với $a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$

Vì $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3.75 = 5.45 = 9.25$

$$3b + 1 \text{ không chia hết cho } 3 \text{ và } 3b + 1 > b + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$$

Vậy $a = 0, b = 8$

Câu 103.(Đề thi HSG 7 huyện Trà Lý 2017-2018)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x + 1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$

Câu 104.(Đề thi HSG 7 huyện Quang Trung 2018-2019)

Chứng minh rằng

a) $10^6 - 5^7$ chia hết cho 59

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36$ chia hết cho 7

Lời giải

a) $10^6 - 5^7 = (2.5)^6 - 5^7 = 2^6 \cdot 5^6 - 5^7 = 5^6 \cdot (2^6 - 5) = 5^6 \cdot 59 = 59 \cdot 5^6$

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot (1 + 35)$

$$= 313^5 \cdot 229 - 313^6 - 313^6 \cdot 35$$

$$= 313^5 \cdot (229 - 313) - 313^6 \cdot 35$$

$$= 313^5 \cdot (-14) - 313^6 \cdot 35$$

$$= 7 \cdot (-2 \cdot 313^5 - 313^6 \cdot 5) : 7$$

Câu 105.(Đề thi HSG 7 huyện Nhơn Trí 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức: $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có:

$$(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

$$\min_{g(x)} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 106. (Đề thi HSG 7 huyện Nhơn Trí 2018-2019)

Tìm số chia và số dư biết rằng số bị chia bằng 112 và thương bằng 5

Lời giải

Gọi số chia là a và số dư là r ($a, r \in \mathbb{N}^*; a > r$)

$$\text{Ta có: } 112 = 5a + r \Rightarrow 5a < 112 \Rightarrow a \leq 22 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } a > r \Rightarrow 5a + r < 5a + a \Rightarrow 112 < 6a \Rightarrow a \geq 19 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a = 19; 20; 21; 22$$

Lập bảng số

a	19	20	21	22
$r = 112 - 5a$	17	12	7	2

Câu 107. (Đề thi HSG 7 huyện Hùng Thư 2017-2018)

1. Cho hai đa thức :

$$A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$$

$$B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$$

Tính $A + B$; $A - B$

2. Cho đa thức $f(x) = (m - 2)x + 2m - 3$

a) Tìm nghiệm của $f(x)$ khi $m = 1$

b) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm là -4

c) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Lời giải

$$1) A + B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6$$

$$A - B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

2)

a) khi $m = 1$

$$f(x) = (1 - 2)x + 2 \cdot 1 - 3 = -x - 1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy nghiệm của $f(x)$ là -1 khi $m = 1$.

b) Khi $f(x)$ có nghiệm là -4 , ta có:

$$(m - 2)(-4) + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{2}$$

c) $f(x)$ có nghiệm khi $f(x) = 0$

$$(m-2)x + 2m - 3 = 0$$

$$(m-2)x + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-2)x = -2m + 3$$

Nếu $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, ta được $0x = -1 < 0$ (ktm)

$$\text{Nếu } m-2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2 \Rightarrow x = \frac{-2m+3}{m-2} = -2 - \frac{1}{m-2}$$

x nguyên khi $m-2 \in U(1) = \{-1; 1\}$

$$*) m-2 = -1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$*) m-2 = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x = -3$$

Vậy $m=1$ thì $x=-1$; $m=3$ thì $x=-3$

Câu 108. (Đề thi HSG 7 huyện Hưng Thụ 2017-2018)

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$

Lời giải

$$A = (|-x+2013| + |x-2015|) + |x-2014|$$

$$A \geq |-x+2013+x-2015| + |x-2014| = 2 + |x-2014| \geq 2$$

$$A = 2 \Leftrightarrow (-x+2013)(x-2015) \geq 0 \text{ và } x-2014 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2013 \leq x \leq 2015; x = 2014 \Leftrightarrow x = 2014$$

Vậy $\min A = 2 \Leftrightarrow x = 2014$

Câu 109. (Đề thi HSG 7 huyện Trà Lý 2017-2018)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$

Lời giải

$$\text{Từ } a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$$

Vậy $ab > a + b$

Câu 110. (Đề thi HSG 7 huyện Trà Lý 2017-2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

$$\text{Suy ra } a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$$

$$\text{Vậy } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Câu 111.(Đề thi HSG 7 huyện Cao Dương 2016-2017)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$

Lời giải

Để A có GTLN thì $(2x-3)^2+5$ đạt GTLN

Mà $(2x-3)^2+5 \geq 5 \Rightarrow$ GTLN của $A = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Câu 112.(Đề thi HSG 7 Trường Ngô gia tự 2017-2018)

a) Chứng minh với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ ta có: $|a|+|b| \geq |a+b|$

b) Áp dụng tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x-2|+|x-8|$

Lời giải

a) Chứng minh đúng BĐT

b) Ta có: $B = |x-2|+|8-x| \geq 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)(8-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$

Vậy $\text{Min} B = 6 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$

Câu 113.(Đề thi HSG 7 Trường Nguyễn Trung Trực 2018 -2019)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số:

$A = (5m+n+1)(3m-n+4)$ là số chẵn

Lời giải

Ta xét hiệu $(5m+n+1)-(3m-n+4) = \dots = 2m+2n-3$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m+2n-3$ là một số lẻ. Do đó trong hai số $5m+n+1$ và $3m-n+4$ phải có một số chẵn. Suy ra tích của chúng là một số chẵn. Vậy A là số chẵn.

Câu 114.(Đề thi HSG 7 Trường Nguyễn Trung Trực 2018 -2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đặt

$$A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{2(7x-8)}{2(2x-3)} = \frac{7(2x-3)+5}{2(2x-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

Đặt $B = \frac{5}{2(2x-3)}$ thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất

..... GTLN của $A = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 115.(Đề thi HSG 7 Trường Đặng Ngọc Liên 2018 -2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

$$M = \frac{x-14}{4-x}$$

Lời giải

$$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

Xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x} < 0$; $x > 4$ thì $\frac{-10}{4-x} > 0$

Ta chỉ xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất

$\Rightarrow 4-x=1$ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)

Vậy $x=3$ khi đó $\text{Min}M = -11$

Câu 116. (Đề thi HSG 7 Trường Đặng Huy Hoàng 2017-2018)

Tìm các số tự nhiên a, b, c có ba chữ số khác nhau sao cho $3a+5b=8c$

Lời giải

$$3a+5b=8c \Leftrightarrow 3a-3b=8c-8b \Leftrightarrow 3(a-b)=8(c-b)$$

Do đó: $3(a-b):8 \Rightarrow a-b:8$

Do $a \neq b$ nên $a-b = \{8; -8\}$

-Trường hợp $a-b=8 \Rightarrow c-b=3 \Rightarrow a=8, b=0, c=3$ hoặc $a=9, b=1, c=4$

-Trường hợp: $a-b=-8 \Rightarrow c-b=3 \Rightarrow a=1, b=9, c=6$

Vậy tất cả có ba số thỏa mãn bài toán: 803, 914, 196.

Câu 117. (Đề thi HSG 7 Trường Đặng Huy Hoàng 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x+2}{|x|}$ với x là số nguyên.

Lời giải

Xét các trường hợp:

+) $x \leq -2 \Rightarrow A \leq 0$

+) $x = -1 \Rightarrow A = 1$

+) $x \geq 1 \Rightarrow A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow A$ lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{2}{x}$ lớn nhất

Vì x là số nguyên dương, nên $\frac{2}{x}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x$ nhỏ nhất, tức là $x=1$, khi đó $A=3$

Vậy giá trị lớn nhất của $A=3 \Leftrightarrow x=1$

Câu 118. (Đề thi HSG 7 Trường Đặng Thái Sơn 2018-2019)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $P = -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 8x - 16 + 21 = -(x^2 + 8x + 16) + 21$

$$= -(x+4)^2 + 21$$

Do $-(x+4)^2 \leq 0 (\forall x) \Rightarrow -(x+4)^2 + 21 \leq 21 (\forall x)$

$\Rightarrow \text{Max}P = 21 \Leftrightarrow x = -4$

Câu 119. (Đề thi HSG 7 Trường THCS Thân Thiện 2018-2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - 2008| + |x - 2009| + |y - 2010| + |x - 2011| + 2011$$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu " $=$ " xảy ra khi $ab \geq 0$ và $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a = 0$. Ta có:

$$|x - 2008| + |x - 2011| = |x - 2008| + |2011 - x| \geq |x - 2008 + 2011 - x| = 3$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $2008 \leq x \leq 2011$ và $|x - 2009| \geq 0$, dấu " $=$ " xảy ra khi $x = 2009$

$|y - 2010| \geq 0$, dấu " $=$ " xảy ra khi $y = 2010$

$\Rightarrow A \geq 3 + 2010 = 2014$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2009, y = 2010$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2014 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2009 \\ y = 2010 \end{cases}$$

Câu 120.(Đề thi HSG 7 THCS Hồng Liên 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \\ &\geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011 \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Câu 121.(Đề thi HSG 7 THCS Phương Trung 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2001| + |x - 1|$

Lời giải

$$A = |x - 2001| + |x - 1| = |x - 2001| + |1 - x| \geq |x - 2001 + 1 - x| = 2000$$

Vậy biểu thức đạt GTNN là 2000 $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2001$

Câu 122.(Đề thi HSG 7 THCS Nguyễn Trục 2017-2018)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A = \frac{32 - 2x}{11 - x}$ đạt GTLN. Tìm GTLN đó.

Lời giải

$$\text{Biến đổi } A = 2 + \frac{10}{11 - x}. \text{ Để } A_{\max} \Leftrightarrow B = \frac{10}{11 - x} \text{ max}$$

$$\left. \begin{aligned} 11 - x < 0 &\Rightarrow B < 0 \\ 11 - x > 0 &\Rightarrow B > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_{\max} \Leftrightarrow B > 0$$

Lập luận để có $11 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow x = 10$

Suy ra GTNN của A là 12 $\Leftrightarrow x = 10$

Câu 123.(Đề thi HSG 7 THCS Sương Bình 2017-2018)

Tìm GTNN của biểu thức : $A = |x - 2006| + |2007 - x|$

Lời giải

$$\text{Có } A = |x - 2006| + |2007 - x| \geq |x - 2006 + 2007 - x|$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2006)(2007 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Vậy $A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Câu 124.(Đề thi HSG 7 THCS Hoàng Quyên 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= |2x - 2| + |2x - 2013| \\ &= |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0$

Vậy $\min A = 2011 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1006,5$

Câu 125.(Đề thi HSG 7 THCS X 2018-2019)

Tìm chữ số tận cùng của $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ biết $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\ &= 9 \cdot 3^n + 3^n - 4 \cdot 2^n - 2^n = (9+1) \cdot 3^n - (4+1) \cdot 2^n = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n \\ 10 \cdot 3^n : 10 &\& 5 \cdot 2^n : 10 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow A : 10 \end{aligned}$$

Vì A chia hết cho 10 nên A có chữ số tận cùng là 0

Câu 126.(Đề thi HSG 7 THCS X 2018-2019)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$, ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c + d - a - b$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x - a)(d - x) \geq 0 \text{ và } (x - b)(c - x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq d, b \leq x \leq c$$

Do đó $\min A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Câu 127.(Đề thi HSG 7 huyện THƯỜNG TÍN 2018-2019)

a. Tìm GTLN của: $A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$

b. Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$

Lời giải

$$a. A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021} = \frac{|x - 2019| + 2021 - 1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \quad (\text{Vì } |x - 2019| + 2021 \geq 2021. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2019)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-2019|+2021} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{|x-2019|+2021} \geq 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

GTNN của $A = \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow x = 2019$

b. Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 128.(Đề thi HSG 7 TRƯỜNG THCS LÊ HỒNG PHONG 2018-2019)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra :

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 129.(Đề thi HSG 7 ... 2018-2019)

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \quad \frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \quad \frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$$\Rightarrow 1 < M < 2$$

Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên.

Câu 130.(Đề thi HSG 7 THCS LÊ HỒNG PHONG 2018-2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$

Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x

Câu 131.(Đề thi HSG 7 huyện Giao Thủy 2016-2017)

Cho các số nguyên dương $a; b; c; d; e$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ chia hết cho 2. Chứng tỏ rằng $a + b + c + d + e$ là hợp số

Lời giải

Đặt $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$; $B = a + b + c + d + e$

Xét: $A + B = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + (a + b + c + d + e)$

$= (a^2 + a) + (b^2 + b) + (c^2 + c) + (d^2 + d) + (e^2 + e)$

$A + B = a(a+1) + b(b+1) + c(c+1) + d(d+1) + e(e+1)$

Với n là số nguyên thì tích 2 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 nên $A + B$ chia hết cho 2.

Theo đề bài A chia hết cho 2 nên B chia hết cho 2. Và $B > 2$

Vậy B là hợp số

Câu 132.(Đề thi HSG 7 huyện Cù Chính Lan 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

Vì: $|x - 2015| = |2015 - x|$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

Mà $|x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2 + |x - 2014| \\ |x - 2014| &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

Đấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2013)(2015 - x) \geq 0 \\ x - 2014 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014$

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2014$

Câu 133.(Đề thi HSG 7 huyện Hà Trung 2015-2016)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $4 < 2^n \leq 2.32$

Lời giải

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $4 < 2^n \leq 2.32$

Ta có: $4 < 2^n \leq 2.32 \Rightarrow 2^2 < 2^n \leq 2^6$

Vậy $n \in \{3; 4; 5; 6\}$

Câu 134.(Đề thi HSG 7 huyện Hà Trung 2015-2016)

Chứng minh rằng $8^{10} - 8^9 - 8^8$ chia hết cho 55

Lời giải

Chứng minh rằng $8^{10} - 8^9 - 8^8$ chia hết cho 55

Ta có: $8^{10} - 8^9 - 8^8 = 8^8(8^2 - 8 - 1)$

$= 8^8.55$

Câu 135.(Đề thi HSG 7 huyện Hà Trung 2015-2016)

Tìm số nguyên dương bé nhất, biết rằng khi chia nó cho 3 và cho 14 thì được các số dư tương ứng là 1 và 9.

Lời giải

Gọi n là số nguyên dương bé nhất.

Vì n chia cho 3 và cho 14 có số dư lần lượt là 1 và 9 nên ta có:

$$n = 3y + 1 = 14k + 9 \quad (\text{Với } y, k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 3y = 14k + 8 \Rightarrow y = \frac{14k + 8}{3} = 4k + 2 + \frac{2k + 2}{3}$$

Vì k là số tự nhiên nên $\frac{2k + 2}{3}$ là số tự nhiên

$$\text{Đặt } \frac{2k + 2}{3} = t \Rightarrow 2k = 3t - 2 \text{ hay } k = t - 1 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt } t = 2m \Rightarrow k = 3m - 1$$

$$\Rightarrow n = 14(3m - 1) + 9 = 42m - 5$$

Vì n là số nguyên dương bé nhất nên $m = 1$ suy ra $n = 37$

Câu 136.(Đề thi HSG 7 huyện Quảng Xương 2018-2019)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số

Lời giải

$$\text{Xét } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$$

$$= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$$

Vì a là số nguyên dương nên $a, (a - 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp

$\Rightarrow a(a - 1)$ chia hết cho 2. Tương tự ta có $b(b - 1); c(c - 1); d(d - 1)$ đều chia hết cho 2

$\Rightarrow a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$ là số chẵn

Lại có $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2)$ là số chẵn.

Do đó $a + b + c + d$ là số chẵn mà $a + b + c + d > 2$ (Do a, b, c, d thuộc $\mathbb{N}^*$)

$a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 137.(Đề thi HSG 7 huyện Quảng Xương 2018-2019)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+5}$

Lời giải

Đặt $A = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$

$$\Rightarrow 2A - A = 2(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$\Rightarrow A = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1} - 2.2^2 - 3.2^3 - 4.2^4 - \dots - n.2^n$$

$$= -2.2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1}$$

$$= -2^2 - (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1}$$

Đặt $B = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$

$$\Rightarrow 2B = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2B - B = B = 2^{n+1} - 2^2$$

$$\Rightarrow A = -2^2 - (2^{n+1} - 2^2) + n.2^{n+1} = (n-1)2^{n+1}$$

$$\text{Vì } A = 2^{n+5} \Rightarrow (n-1)2^{n+1} = 2^{n+5} \Rightarrow 2(n-1) = 2^5 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$$

Vậy $n = 17$ là giá trị cần tìm.

Câu 138.(Đề thi HSG 7 huyện Thường Xuân 2018-2019)

1) Tìm tất cả các số tự nhiên $a; b$ sao cho $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

2) Tìm các số a, b sao cho $\overline{2007ab}$ là bình phương của số tự nhiên

Lời giải

1. Tìm tất cả các số tự nhiên $a; b$ sao cho $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

$$\text{Xét TH1: } b \geq 45 \text{ ta có: } 2^a + 37 = b - 45 + b - 45 = 2(b - 45) \Rightarrow 2^a + 37 = 2(b - 45)$$

$$\Rightarrow 2^a \text{ là số lẻ} \Rightarrow 2^a = 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 2^0 + 37 = 2(b - 45) \Rightarrow 1 + 37 = 2(b - 45) \Rightarrow b = 64$$

$$\text{Xét TH1: } b < 45 \text{ ta có: } 2^a + 37 = 45 - b + b - 45 = 0 \Rightarrow 2^a = -37 \Rightarrow a \in \emptyset$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow a = 0; b = 64$$

2. Tìm các số a, b sao cho $\overline{2007ab}$ là bình phương của số tự nhiên

$$\text{Ta thấy: } 447^2 = 199809; 449^2 = 201601$$

$$\text{mà } 199809 < \overline{2007ab} < 201601 \Rightarrow 447^2 < \overline{2007ab} < 449^2$$

$$\overline{2007ab} = 448^2 = 200704 \Rightarrow a = 0; b = 4$$

Câu 139.(Đề thi HSG 7 huyện Thường Xuân 2018-2019)

Tìm các số có ba chữ số, sao cho hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Lời giải

Tìm các số có ba chữ số, sao cho hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ có hiệu của số ấy và số gồm ba chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{abc} - \overline{cba}$ là số chính phương nên $a \geq c$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 99a - 99c = 99(a - c)$$

$\overline{abc} - \overline{cba} = 9.11(a - c) = 3^2.11(a - c)$ mà $\overline{abc} - \overline{cba}$ là số chính phương nên $(a - c):11$
 $(a - c):11$ mà $a \geq c$; $a, c \in \mathbb{N}; 0 < a, c \leq 9$ nên $a - c = 0 \Rightarrow a = c$

Vậy số cần tìm là số có 3 chữ số có dạng $\overline{aba}$

Câu 140.(Đề thi HSG 7 huyện Đông Hưng 2019-2020)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90| \\ &= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90| \\ &= (2x - 5y)^2 - 9.(2x - 5y)^2 - |xy - 90| \\ &= -[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \end{aligned}$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với $\forall x, y$ nên $8.(2x - 5y)^2 \geq 0$ với $\forall x, y$

Và $|xy - 90| \geq 0$ với $\forall x, y$

Khi đó $8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với $\forall x, y$

Suy ra : $-[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \leq 0$ với $\forall x, y$

Hay $P \leq 0$ với $\forall x, y$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x - 5y)^2 = 0$ và $|xy - 90| = 0$

+ Với $(2x - 5y)^2 = 0$ thì $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$

+ Với $|xy - 90| = 0$ thì $xy = 90$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k$; và $y = 2k$

Mà $xy = 90$ nên $5k.2k = 90 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$

+ Nếu $k = 3$ thì $x = 15$; $y = 6$

+ Nếu $k = -3$ thì $x = -15$; $y = -6$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 0 khi và chỉ khi $x = 15$; $y = 6$ hoặc $x = -15$; $y = -6$

Câu 141.(Đề thi HSG 7 huyện Đông Hưng 2018-2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0.

Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right)$$

$$\Rightarrow M < 2$$

$$\Rightarrow M^{10} < 2^{10} \text{ (vì } M > 0 \text{)}$$

$$\text{Mà } 2^{10} = 1024 < 1025$$

$$\text{Vậy } M^{10} < 1025$$

Câu 142. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2018-2019)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Cách 1:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = 2(ac + bd) \Rightarrow (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2(ac + bd)$$

$$\Rightarrow a+c \equiv (b+d) \pmod{2} \Rightarrow a+c+b+d \vdots 2 \text{ mà } a, b, c, d \text{ nguyên dương nên}$$

$$a+b+c+d > 2 \text{ nên } a+b+c+d \text{ là hợp số}$$

Cách 2:

$$\text{Xét } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a+b+c+d) = a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$$

Vì a, b, c, d là các số nguyên dương nên

$$a(a-1) \vdots 2; b(b-1) \vdots 2; c(c-1) \vdots 2; d(d-1) \vdots 2$$

$$\Rightarrow a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \text{ là số chẵn}$$

$$\text{Mà } a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \text{ nên } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2) \text{ suy ra } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ chẵn}$$

Do đó $a+b+c+d$ chẵn lớn hơn 2 nên $a+b+c+d$ là hợp số

Câu 143. (Đề thi HSG 7 huyện Hậu Lộc 2013-2014)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

$$\text{Vì: } 0 \leq a \leq b+1 \leq c+2 \text{ nên } 0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \text{ (vì } a+b+c=1 \text{)}$$

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } c \text{ là: } -\frac{2}{3} \text{ khi đó } a+b=\frac{5}{3}$$

Câu 144. (Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{z+t+x}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$\Rightarrow 1 < M < 2$. Vậy M không phải là số tự nhiên

Câu 145.(Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016-2017)

Với a; b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6. Chứng minh rằng $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Lời giải

Cách 1

$$\text{Vì } a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Mà } 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 4^a + 2 \vdots 6$$

$$\text{Khi đó ta có: } 4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2007 - 2010 \vdots 6$$

Vậy với a; b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6. Thì $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} 4^a + a + b &= 4^a + a + 1 + b + 2007 - 2008 \\ &= (4^a - 2008) + (a + 1) + (b + 2007) \end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy: } \begin{cases} 4^a \equiv 4 \pmod{6} \\ 2008 \equiv 4 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow 4^a - 2008 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$\text{Hay: } (4^a - 2008) \vdots 6 \text{ mà } (a+1) \vdots 6; (b+2007) \vdots 6 \text{ suy ra } 4^a + a + b \vdots 6$$

Câu 146.(Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2014-2015)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

- a_1 là số dương.
- Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.
- Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$a_1 > 0$$

$$a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

Cũng như vậy :

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0.$$

$$\text{Mặt khác: } a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0$$

$$\Rightarrow a_{12} > 0.$$

Từ các điều kiện $a_1 > 0$; $a_{12} > 0$; $a_{14} < 0$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} a_{12} < a_1 \cdot a_{12} \text{ (đpcm).}$$

Câu 147.(Đề thi HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

Cho $P = 75 \cdot (4^{2016} + 4^{2015} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$. Chứng minh rằng: $P : 100$

Lời giải

Do $4^{2016} + 4^{2015} + \dots + 4^2 + 4 + 1$ chia cho 4 dư 1

$$\Rightarrow 4^{2016} + 4^{2015} + \dots + 4^2 + 4 + 1 = 4k + 1 \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

$$\text{Do đó } P = 75 \cdot (4k + 1) + 25 = 75 \cdot 4k + 75 = 300k + 100 : 100$$

nên $P : 100$.

Câu 148.(Đề HSG 7 huyện....)

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$$

Vì n nguyên dương nên $2^n : 2 \Rightarrow 5 \cdot 2^n : 10$ và $10 \cdot 3^n : 10$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$

Câu 149.(Đề HSG 7 huyện....)

Cho 2 đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2009} + x^{2010}$ và

$$Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{2009} + x^{2010}. \text{ Giá trị của biểu thức } P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right) \text{ có dạng biểu thức}$$

hữu tỉ là $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$; a, b là 2 số nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh $a : 5$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } 4A = 10 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2007} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 3A = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \Rightarrow A = \frac{8 - \frac{1}{2^{2009}}}{3} = \frac{2^{2012} - 1}{3 \cdot 2^{2009}} = \frac{a}{b}$$

Ta thấy: $2^{2012} - 1 = 4^{1006} - 1 : 3$; $2^{2012} - 1$ và 2^{2009} là hai số nguyên tố cùng nhau nên $2^{2012} - 1 = 3a$.

$3a = 2^{2012} - 1 = 16^{503} - 1$. Vì 16^{503} có chữ số tận cùng là 6 nên $3a$ có chữ số tận cùng là 5, suy ra số này chia hết cho 5. 3 và 5 nguyên tố cùng nhau nên $a \vdots 5$

Câu 150.(Đề HSG 7 huyện....)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$

- a) Chứng minh $M > 1$
b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

a) Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Vậy $M > 1$

$$\begin{aligned} \text{b) Mà } & \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \\ &= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) > 1 \text{ (tương tự câu a)}$$

$$\text{Suy ra : } M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 151.(Đề HSG 7 huyện)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết: $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$$

$$\text{Vì } y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$$

Vì $0 \leq (x - 2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}, (x - 2010)^2$ là số chính phương nên

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - 2010)^2 = 4 \\ (x - 2010)^2 = 1 \\ (x - 2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{cases} \\ x - 2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2010; 6); (2010; -6)$

Câu 152.(Đề HSG 7 cấp trường ... 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$

CMR: với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$, áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \\ \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x + z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Vì $10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương nên ta có đpcm

Câu 153. (Đề HSG huyện Thái Thịnh 2018 – 2019)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên.}$$

Lời giải

S có $(n-1)$ số hạng

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $n - 2 < S < n - 1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Câu 154. (Đề HSG huyện Thái Thịnh 2018 – 2019)

So sánh : 222^{333} và 333^{222}

Lời giải

Ta có: $222^{333} = (222^3)^{111}$; $333^{222} = (333^2)^{111}$

$$222^3 = (2.111)^3 = 8.111^3 = 8.111.111^2 = 888.111^2$$

$$333^2 = (3.111)^2 = 9.111^2$$

Vì $888 > 9 \Rightarrow 888.111^2 > 9.111^2 \Rightarrow 222^3 > 333^2 \Rightarrow (222^3)^{111} > (333^2)^{111} \Rightarrow 222^{333} > 333^{222}$

Vậy $222^{333} > 333^{222}$

Câu 155.(Đề HSG 7 trường)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x| - |x - 2|$

Lời giải

Xét các trường hợp:

+ **Trường hợp 1:** $x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$

+ **Trường hợp 2:** $0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$

+ **Trường hợp 3:** $x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$

$\Rightarrow$ Với mọi giá trị của x thì $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Câu 156.(Đề HSG huyện Thái Thịnh 2018 – 2019)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$

Lời giải

$$Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$$

$$Q = (|x - 2017| + |x - 2019|) + |x - 2018|, \text{ vì } |x - 2019| = |2019 - x|$$

$$\Rightarrow Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) + |x - 2018|$$

$$\text{Mà } |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) \geq 2 + |x - 2018| \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow Q \geq 2 \\ |x - 2018| \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2017)(2019 - x) \geq 0 \\ x - 2018 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2017 \leq x \leq 2019 \\ x = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2018$$

Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2018$

Câu 157.(Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2014x$

Lời giải

Ta có : $x^2 + 2014x = x(x + 2014)$

x	--2014	-0	+
$x+2014$	-	0	+
$x(x+2014)$	+	-	+

Vậy $x^2 + 2014x > 0 \Rightarrow x < -2014$ hoặc $x > 0$

Câu 158.(Đề thi HSG 7 cấp huyện)

a. Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ Tìm số nguyên x để A là số nguyên

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$

Lời giải

$$a. A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 4, tức là $\sqrt{x}-3 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Vậy giá trị x cần tìm là : 1 ; 4 ; 16 ; 25 ; 49

$$b. B = \frac{x^2+15}{x^2+3} = \frac{x^2+3+12}{x^2+3} = 1 + \frac{12}{x^2+3}.$$

Ta có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$ (2 vế dương)

$$\frac{12}{x^2+3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2+3} \leq 5$$

$\Rightarrow B \leq 5$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

Vậy $\max B = 5 \Rightarrow x = 0$.

Câu 159.(Đề thi HSG 7 huyện Tĩnh Gia)

Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng: $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Lời giải

Ta có: $9 \cdot 10^n + 18 = 9(10^n + 2) : 9$ (1)

Mặt khác 10^n là số có tổng các chữ số là 1

Nên $10^n + 2$ là số có tổng các chữ số là 3

Suy ra: $10^n + 2 : 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $9(10^n + 2) : 27$ hay $9 \cdot 10^n + 18 : 27$

Câu 160.(Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản: $\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \dots, \frac{31}{n+33}$

Lời giải

Các số đã cho có dạng: $\frac{k}{k+(n+2)}$ (với $k = 7, 8, \dots, 31$)

Nếu $\frac{k}{k+(n+2)}$ là phân số tối giản thì $\frac{k+(n+2)}{k}$ cũng là phân số tối giản

Mà $\frac{k+(n+2)}{k} = 1 + \frac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow (n+2, k) = 1$

$\Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau với $7, 8, \dots, 31$ và $n+2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow n+2 = 37 \Leftrightarrow n = 35$

Câu 161.(Đề thi HSG 7 huyện)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0.

Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

+ Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{y+x} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 1025$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Câu 162.(Đề thi HSG 7 cấp huyện)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0$$

$$+) \text{ Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

KL: Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Câu 163.(Đề thi HSG 7 huyện)

a) Tìm các số a, b, c không âm sao cho $a + 3c = 8; a + 2b = 9$ và tổng $a + b + c$ có giá trị lớn nhất.

b) Cho $A = 200.(9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1)$. Chứng minh rằng $A + 25$ là số chính phương.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } 2(a+b+c)+c=17 \text{ vì } a, b, c \text{ không âm nên } 2(a+b+c) \leq 17 \Rightarrow a+b+c \leq \frac{17}{2}$$

$$\text{Dấu (=) xảy ra khi } c = 0 \Rightarrow a = 8; b = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Đặt } B = 9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1$$

$$\Rightarrow 9B = 9^{2014} + 9^{2013} + \dots + 9^3 + 9^2 + 9$$

$$\Rightarrow 8B = 9^{2014} - 1 \Rightarrow B = \frac{9^{2014} - 1}{8}$$

$$\Rightarrow A = 200 \cdot \frac{9^{2014} - 1}{8} = 25 \cdot (9^{2014} - 1)$$

$$\Rightarrow A + 25 = 25 \cdot 9^{2014} = (5 \cdot 9^{1007})^2$$

Vậy $A + 25$ là số chính phương

Câu 164.(Đề thi HSG 7 huyện)

Cho các số $x = b^c + a$; $y = a^b + c$; $z = c^a + b$ là các số nguyên tố ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng ba số x, y, z ít nhất có hai số bằng nhau.

Lời giải

Trong ba số a, b, c chắc chắn có hai số cùng tính chẵn lẻ. Giả sử a và b cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì x là số chẵn. Mà x là số nguyên tố nên $x=2$.

$$\Rightarrow a = b = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + c \text{ và } z = c + 1$$

$$\Rightarrow y = z.$$

Vậy trong ba số x, y, z có ít nhất hai số bằng nhau.

Câu 165.(Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{\sqrt{x-2}+5}{\sqrt{x-2}+2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\frac{\sqrt{x-2}+5}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{\sqrt{x-2}+2+3}{\sqrt{x-2}+2} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x-2}+2}$$

Để biểu thức C nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x-2}+2$ là ước của 3

$$\sqrt{x-2}+2=3 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

Không tồn tại x để $\sqrt{x-2}+2=1$; $\sqrt{x-2}+2=-1$; $\sqrt{x-2}+2=-3$

Câu 166.(Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn)

Chứng minh rằng: $81^7 - 27^9 + 9^{13}$ chia hết cho 567.

Lời giải

$$\text{Có: } 567 = 7 \cdot 3^4 = (3^4)^7 - (3^3)^9 + (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} + 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 + 1)$$

$$= 3^{26} \cdot 7 = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 7$$

$$\text{Do đó } 81^7 - 27^9 + 9^{13} \vdots 567$$

Câu 167.(Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2014x$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 2014x = x(x + 2014)$$

x	--2014	-0	+	
$x+2014$	-	0	+	+
$x(x+2014)$	+	-		+

$$\text{Vậy } x^2 + 2014x > 0 \Rightarrow x < -2014 \text{ hoặc } x > 0$$

Câu 168.(Đề thi HSG 7 cấp huyện)

a. Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ Tìm số nguyên x để A là số nguyên

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2+15}{x^2+3}$

Lời giải

$$a. A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 4, tức là $\sqrt{x}-3 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Vậy giá trị x cần tìm là : 1 ; 4 ; 16 ; 25 ; 49

$$b. B = \frac{x^2+15}{x^2+3} = \frac{x^2+3+12}{x^2+3} = 1 + \frac{12}{x^2+3}.$$

Ta có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$ (2 vế dương)

$$\frac{12}{x^2+3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2+3} \leq 5$$

$\Rightarrow B \leq 5$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

Vậy $\max B = 5 \Rightarrow x = 0$.

Câu 169.(Đề thi HSG 7 huyện Tĩnh Gia)

Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng: $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Lời giải

Ta có: $9 \cdot 10^n + 18 = 9(10^n + 2) : 9$ (1)

Mặt khác 10^n là số có tổng các chữ số là 1

Nên $10^n + 2$ là số có tổng các chữ số là 3

Suy ra: $10^n + 2 : 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $9(10^n + 2) : 27$ hay $9 \cdot 10^n + 18 : 27$

Câu 170.(Đề thi HSG 7 huyện)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản: $\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \dots, \frac{31}{n+33}$

Lời giải

Các số đã cho có dạng: $\frac{k}{k+(n+2)}$ (với $k = 7, 8, \dots, 31$)

Nếu $\frac{k}{k+(n+2)}$ là phân số tối giản thì $\frac{k+(n+2)}{k}$ cũng là phân số tối giản

Mà $\frac{k+(n+2)}{k} = 1 + \frac{n+2}{k}$ tối giản $\Leftrightarrow (n+2, k) = 1$

$\Leftrightarrow n+2$ nguyên tố cùng nhau với 7, 8, ..., 31 và $n+2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow n+2 = 37 \Leftrightarrow n = 35$

Câu 171.(Đề thi HSG 7 huyện)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0.

Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

+ Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{y+x} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 1025$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Câu 172.(Đề thi HSG 7 cấp huyện)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0$$

$$+) \text{ Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

KL: Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Câu 173.(Đề thi HSG 7 huyện)

a) Tìm các số a, b, c không âm sao cho $a + 3c = 8; a + 2b = 9$ và tổng $a + b + c$ có giá trị lớn nhất.

b) Cho $A = 200.(9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1)$. Chứng minh rằng $A + 25$ là số chính phương.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } 2(a+b+c)+c=17 \text{ vì } a, b, c \text{ không âm nên } 2(a+b+c) \leq 17 \Rightarrow a+b+c \leq \frac{17}{2}$$

$$\text{Dấu (=) xảy ra khi } c = 0 \Rightarrow a = 8; b = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Đặt } B = 9^{2013} + 9^{2012} + 9^{2011} + \dots + 9^2 + 9 + 1$$

$$\Rightarrow 9B = 9^{2014} + 9^{2013} + \dots + 9^3 + 9^2 + 9$$

$$\Rightarrow 8B = 9^{2014} - 1 \Rightarrow B = \frac{9^{2014} - 1}{8}$$

$$\Rightarrow A = 200 \cdot \frac{9^{2014} - 1}{8} = 25 \cdot (9^{2014} - 1)$$

$$\Rightarrow A + 25 = 25 \cdot 9^{2014} = (5 \cdot 9^{1007})^2$$

Vậy $A + 25$ là số chính phương

Câu 174.(Đề thi HSG 7 huyện)

Cho các số $x = b^c + a$; $y = a^b + c$; $z = c^a + b$ là các số nguyên tố ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng ba số x, y, z ít nhất có hai số bằng nhau.

Lời giải

Trong ba số a, b, c chắc chắn có hai số cùng tính chẵn lẻ. Giả sử a và b cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì x là số chẵn. Mà x là số nguyên tố nên $x=2$.

$$\Rightarrow a = b = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + c \text{ và } z = c + 1$$

$$\Rightarrow y = z.$$

Vậy trong ba số x, y, z có ít nhất hai số bằng nhau.

Câu 175.(Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{\sqrt{x-2}+5}{\sqrt{x-2}+2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\frac{\sqrt{x-2}+5}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{\sqrt{x-2}+2+3}{\sqrt{x-2}+2} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x-2}+2}$$

Để biểu thức C nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x-2}+2$ là ước của 3

$$\sqrt{x-2}+2=3 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

Không tồn tại x để $\sqrt{x-2}+2=1$; $\sqrt{x-2}+2=-1$; $\sqrt{x-2}+2=-3$

Câu 176.(Đề thi HSG 7 huyện Quế Sơn)

Chứng minh rằng: $81^7 - 27^9 + 9^{13}$ chia hết cho 567.

Lời giải

$$\text{Có: } 567 = 7 \cdot 3^4 = (3^4)^7 - (3^3)^9 + (3^2)^{13} = 3^{28} - 3^{27} + 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 + 1) \\ = 3^{26} \cdot 7 = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 7$$

$$\text{Do đó } 81^7 - 27^9 + 9^{13} \vdots 567$$

Câu 177.(Đề thi HSG 7 thành phố Thái Bình 2016-2017)

Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $(20a + 7b + 3) \cdot (20^a + 20a + b) = 803$

Lời giải

$$(20a + 7b + 3) (20^a + 20a + b) = 803$$

Từ đề bài $\Rightarrow 20a + 7b + 3$ và $20^a + 20a + b$ lẻ (vì 803 lẻ)

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 20^a + 20a$ chẵn.

Mà $20^a + 20a + b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ $\Rightarrow 7b + 3$ chẵn

$\Rightarrow 20a + 7b + 3$ chẵn (không thỏa mãn)

$$\text{Vậy } a = 0 \Rightarrow (7b + 3) (b + 1) = 803 = 11 \cdot 73$$

$$\text{Vì } b \in \mathbb{N} \Rightarrow 7b + 3 > b + 1. \text{ Do đó: } \begin{cases} 7b + 3 = 803 \\ b + 1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 7b + 3 = 73 \\ b + 1 = 11 \end{cases}$$

Trường hợp $\begin{cases} 7b + 3 = 803 \\ b + 1 = 1 \end{cases}$ không tìm được b thỏa mãn đề bài.

$$\text{Trường hợp } \begin{cases} 7b + 3 = 73 \\ b + 1 = 11 \end{cases} \Rightarrow b = 10.$$

Vậy $a = 0$, $b = 10$ thỏa mãn đề bài.

Câu 178.(Đề thi HSG 7 huyện Quan Sơn)

Tìm x, y để biểu thức $N = (x + 2)^{2010} + \left| y - \frac{1}{5} \right| - 10$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Lí luận $(x + 2)^{2010} \geq 0$; $\left| y - \frac{1}{5} \right| \geq 0$

$\Rightarrow N \geq -10$ GTNN của N là -10

Tìm được $x = -2$; $y = \frac{1}{5}$

Câu 179.(Đề thi HSG 7 PGD Duy Xuyên)

a) Cho $x > 0$; $y > 0$ CMR: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

b) Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $a+b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + ab} + \frac{1}{a^2 + b^2}$$

Lời giải

a/ Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} (*)$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ (vì $x > 0$; $y > 0$)

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (Đúng)

Vậy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

b/

Từ $(*) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Với $a, b > 0$ nên ta áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \\ &= \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{b^2 + ab} \right) + \frac{1}{2ab} \\ &\geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = \frac{10}{(a+b)^2} \geq 10 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy $\text{Min } M = 10 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Câu 180.(Đề thi HSG 7 Huyện Sơn Tịnh)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2011

Dấu “=” xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Câu 181.(Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành)

a/ Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

Lời giải

a/ Ta có : $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n = (3^n \cdot 9 + 3^n) - (2^n \cdot 4 + 2^n)$
 $= 3^n(9+1) - 2^n(4+1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$ chia hết cho 10 với n là số nguyên dương (ĐPCM)

b/ $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$.

Cách 1 : Ta xét 4 trường hợp xảy ra

TH 1 : $x < 2014$

$$A = 2014 - x + 2015 - x + 2016 - x = 6045 - 3x > 3 \text{ (Vì } x < 2014\text{)}(1)$$

TH 2 : $2014 \leq x < 2015$

$$A = x - 2014 + 2015 - x + 2016 - x = 2017 - x > 2 \text{ (Vì } x < 2015\text{)}(2)$$

TH 3 : $2015 \leq x < 2016$

$$A = x - 2014 + x - 2015 + 2016 - x = x - 2013 \geq 2 \text{ (Vì } x \geq 2015\text{)}(3)$$

TH 4 : $x > 2016$

$$A = x - 2014 + x - 2015 + x - 2016 = 3x - 6045 > 3 \text{ (Vì } x > 2016\text{)}(4)$$

Từ 1,2,3,4 $\Rightarrow A \geq 2$ Vậy A nhỏ nhất = 2 khi $x = 2015$

Cách 2 : Sử dụng BĐT $|A| + |B| \geq |A + B|$, Dấu = xảy ra khi $AB \geq 0$

$$\text{Do } |2015 - x| \geq 0 \Rightarrow A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu = xảy ra khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có : } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu = xảy ra khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0 \Rightarrow 2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ 1,2 $\Rightarrow A \geq 2$. Dấu = xảy ra khi $x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất = 2 khi $x = 2015$

Câu 182.(Đề thi HSG 7 PGD Kim Thành)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (|x - 3| + 2)^2 + |y + 3| + 2007$

Lời giải

Ta có $(|x - 3| + 2) \geq 2, \forall x \Rightarrow (|x - 3| + 2)^2 \geq 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$

$|y + 3| \geq 0, \forall y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = -3$

$$\text{Vậy } P = (|x - 3| + 2)^2 + |y + 3| + 2007 \geq 4 + 2007 = 2011.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2011 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = -3$.

Câu 183.(Đề thi HSG 7 huyện THÁI THUY)

Có tìm được hai chữ số a và b để là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 201100 \leq \overline{2011ab} \leq 201199$$

$$448^2 < \overline{2011ab} < 449^2$$

448 và 449 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $\overline{2011ab}$ không là bình phương của một số tự nhiên.

Câu 184.(Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY)

Cho $a; b$ là các số tự nhiên thỏa mãn : $a + 4b$ chia hết cho 13.

Chứng minh rằng $10a + b$ cũng chia hết cho 13.

Lời giải

$$(a + 4b) : 13 \Rightarrow 10(a + 4b) : 13$$

$$\text{Xét } 10.(a + 4b) - (10a + b) = 10a + 40b - 10a - b = 39b : 13$$

$$\text{Do } 10(a + 4b) : 13 \text{ nên } (10a + b) : 13$$

Câu 185.(Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG)

$$\text{Cho } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} + 3^{2016}.$$

1. Tính A .

2. Tìm chữ số tận cùng của A .

3. A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

$$1. \text{ Ta có: } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} + 3^{2016}$$

$$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} + 3^{2017}$$

$$\text{Suy ra: } 3A - A = (3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} + 3^{2017}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015} + 3^{2016})$$

$$A = \frac{3^{2017} - 3}{2}.$$

$$2. \text{ Ta có: } A = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + (3^{2013} + 3^{2014} + 3^{2015} + 3^{2016})$$

$$= 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{2013}(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 3.40 + \dots + 3^{2013}.40 = 40.(3 + 3^5 + \dots + 3^{2013})$$

Suy ra A có chữ số tận cùng là 0.

3. Lập luận được A chia hết cho 3.

Lập luận được A không chia hết cho 3^2

Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra A không là số chính phương.

Câu 186.(Đề thi HSG 7 huyện KIẾN XƯƠNG)

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2016a + 13b - 1)(2016^a + 2016a + b) = 2015$

Lời giải

$$\text{Vì } (2016a + 13b - 1)(2016^a + 2016a + b) = 2015$$

$$\Rightarrow 2016a + 13b - 1 \text{ và } 2016^a + 2016a + b \text{ là 2 số lẻ (*)}$$

$$* \text{ Nếu } a \neq 0 \Rightarrow 2016^a + 2016a \text{ là số chẵn}$$

$$\text{Vì } 2016^a + 2016a + b \text{ lẻ} \Rightarrow b \text{ lẻ}$$

$$\text{Với } b \text{ lẻ} \Rightarrow 13b - 1 \text{ chẵn do đó } 2016a + 13b - 1 \text{ chẵn (không t/m (*))}$$

$$* \text{ Nếu } a = 0 \Rightarrow (13b - 1)(b + 1) = 2015 = 1.5.13.31$$

$$\text{Vì } b \in \mathbb{N} \Rightarrow (13b - 1)(b + 1) = 5.403 = 13.155 = 31.65$$

$$\text{và } 13b - 1 > b + 1$$

$$+) \text{ Nếu } b + 1 = 5 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 13b - 1 = 51 \text{ (loại)}$$

$$+) \text{ Nếu } b + 1 = 13 \Rightarrow b = 12 \Rightarrow 13b - 1 = 155 \text{ (t/m)}$$

$$+) \text{ Nếu } b + 1 = 31 \Rightarrow b = 30 \Rightarrow 13b - 1 = 389 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } (a; b) = (0; 12)$$

Câu 187.(Đề thi HSG 7 - Thị xã Sầm Sơn - 2012 -2013)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho : $2.3^n + 3 : 11$

Lời giải

$n=0$: không thỏa mãn

$n>0$: ta có $2.3^n + 3 = 3(2.3^{n-1} + 1) \equiv 1 \pmod{11}$ mà $(3;11) = 1$ buộc $2.3^{n-1} + 1 \equiv 1 \pmod{11}$

suy ra $3^{n-1} \equiv 5 \pmod{11}$

Cách 1: Ta có bảng sau:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$3^{n-1} \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1

Có chu kỳ lặp lại là 5 nên ta có $n = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2.3^n + 3 \equiv 1 \pmod{11}$

Cách 2: xét $n = 5k + r$ ($r=0;1;2;3;4$) chỉ có $n = 5k + 4$ thỏa mãn nên

các số $n = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$) là các số cần tìm.

Câu 188.(Đề thi HSG 7 - Thành phố Sầm Sơn - 2017 -2018)

Chứng minh: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}} < \frac{3}{4}$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2018}{3^{2017}}$$

$$3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{2017}{3^{2017}} + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$3A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$3A = A + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

Suy ra $2A < 1 + B$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{1}{3^{2017}}$$

$$3B = 1 + B - \frac{1}{3^{2017}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2017}} < 1 \text{ suy ra } B < \frac{1}{2} \Rightarrow B + 1 < \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Cách 2:

Tính đến được:

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2018}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2018}{3^{2018}} = \frac{3^{2018} - 1 - \frac{2018 \cdot 2}{3}}{2 \cdot 3^{2017}}$$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{3^{2018} - 1 - \frac{2018 \cdot 2}{3}}{4 \cdot 3^{2017}} = \frac{3}{4} - \frac{1 + \frac{2018 \cdot 2}{3}}{4 \cdot 3^{2017}} < \frac{3}{4}$$

Câu 189. (Đề thi HSG 7 - Huyện Thạch Thành - 2014 - 2015)

Tìm giá trị lớn nhất của: $H = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$

Lời giải

Ta có $H = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2}{x^2 + y^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$

$$H = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

H đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = 0 \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } H \text{ là } \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } y = 0$$

Câu 190. (Đề thi HSG 7 huyện Thạch Bàn 2016 -2017)

1. Tìm số hữu tỉ x, sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

2. Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016$; $a + 2b = 2017$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = a + b + c$.

Lời giải

1. Gọi $x = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1$).

Khi đó: $x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{m \cdot n}$

Để nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$

$$m^2 + n^2 : m ; n^2 : m \text{ (Vì } m^2 : m) ; n : m$$

Mà $(m, n) = 1$ nên $m = 1$ hoặc $m = -1$

*) Với $m = 1$:

Từ (1), ta có: $\frac{m^2 + n^2}{m \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}$ Để $\frac{1 + n^2}{n}$ nguyên thì $1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n$ hay $n = 1$

*) Với $m = -1$: Từ (1), ta có: $\frac{m^2 + n^2}{m \cdot n} = -\frac{1 + n^2}{n}$.

Để $-\frac{1 + n^2}{n}$ nguyên thì $1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n)$ hay $n = 1$

Khi đó $x = 1$ hay $x = -1$

2. Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Lấy (2) – (1) ta được : $2b - 3c = 1 \Rightarrow b = \frac{1+3c}{2}$

Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1+3c}{2} + c = \frac{4032 - 6c + 1 + 3c + 2c}{2} = \frac{4033 - c}{2}.$$

Vì a, b, c không âm nên $P \leq \frac{4033}{2}$, $\text{Max}P = \frac{4033}{2}$ khi $c = 0$

Câu 191. (Đề thi HSG 7 - THIỆU HÓA - 2016 - 2017)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0.$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với $\forall x$; $|3y + 12| \geq 0$ với $\forall y$, do đó:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \text{ với } \forall x, y. \text{ Theo đề bài thì } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0.$$

Từ đó suy ra: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$ và $y = -4.$

Vậy $x = \frac{1}{12}$ và $y = -4.$

Câu 192. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2016-2017)

Chứng minh rằng với n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\ &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^{n-1} \cdot (2^3 + 2) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10 : 10 \end{aligned}$$

Câu 193. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành 2016-2017)

Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $x + 2y = 3xy + 3$

Lời giải

Ta có $x + 2y = 3xy + 3$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 9xy + 9 \Rightarrow (3x - 9xy) + (6y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 3x \cdot (1 - 3y) - 9 \cdot (1 - 3y) = 0 \Rightarrow (3x - 9) \cdot (1 - 3y) = 0$$

Vì x, y $\in \mathbb{Z}$ nên $3x - 9$; $1 - 3y$ là các số nguyên.

Mà $(3x - 9) \cdot (1 - 3y) = 0 \Rightarrow 3x - 9$; $1 - 3y$ là ước của 0.

Ta lại có $U(0) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow 3x - 9$; $1 - 3y \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Bảng giá trị

$3x-9$	-9	-3	3	9
--------	----	----	---	---

1-3y	-1	-7	7	1
x	-5/3	1/3	1	3
y	2/3	8/3	-2	0
	KTM	KTM	TM	TM

Vậy $(x,y) \in \{(1;-2);(3;0)\}$

Câu 194. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : $P = (x^2 + 1)^2 + (y^4 + 2)^4 + 3$.

Lời giải

Ta có $x^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \forall x \Rightarrow (x^2 + 1)^2 \geq 1^2 = 1 \forall x$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

$y^2 \geq 0 \forall y \Rightarrow y^2 + 2 \geq 2 \forall y \Rightarrow (y^2 + 2)^4 \geq 2^4 = 16 \forall y$

Dấu “=” xảy ra khi $y = 0$

$P \geq 1 + 16 + 3 = 20$

Vậy GTNN của P bằng 20 khi $x = 0; y = 0$.

Câu 195. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2017-2018)

Cho a, b, c, d là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng:

$S = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{a+b+d} < \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{b+c+d} < \frac{c}{c+d}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{a+c+d} < \frac{d}{c+d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < S < \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} \right)$$

suy ra $1 < S < 1 + 1$ hay $1 < S < 2$

Vậy S có giá trị không phải số tự nhiên.

Câu 196. (Đề thi HSG 7 huyện Kim Thành)

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm.

Lời giải

Ta có $P(x) = x^2 + 2x + 2 = (x^2 + x) + (x+1) + 1$

$= x^2 + 2x + 2 = x(x+x) + (x+1) + 1 = (x+1)(x+1) + 1$

$= (x+1)^2 + 1$

Vì $(x+1)^2 \geq 0$ với mọi x nên suy ra $P(x) = (x+1)^2 + 1 > 0$ với mọi x. Vậy đa thức $P(x) = x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm.

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned}
 & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\
 &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\
 &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\
 &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\
 &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (đpcm)}
 \end{aligned}$$

Câu 197. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh 2016 - 2017)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a + b = c + d = 25$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$.

Lời giải

Vì $a + b = c + d = 25$ nên $1 \leq a, b, c, d \leq 24$

Nếu cả hai phân số $\frac{c}{b}$ và $\frac{d}{a}$ đều lớn hơn 1 thì $c + d > a + b$. Trái giả thiết.

Vậy có một phân số không vượt quá 1.

Không mất tính tổng quát giả sử $\frac{c}{b} \leq 1$

+ Nếu $d \leq 23$ thì $\frac{d}{a} \leq 23$ (vì $a \geq 1$) $\Rightarrow M = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} \leq 1 + 23 = 24$ (1)

+ Nếu $d = 24$ thì $c = 1 \Rightarrow M = \frac{1}{b} + \frac{24}{a}$

- Nếu $a > 1$ thì $\Rightarrow M \leq 1 + \frac{24}{2} = 13$ (2)

- Nếu $a = 1$ thì $b = 24 \Rightarrow M \leq \frac{1}{24} + \frac{24}{1} = \frac{577}{24}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{Max}(M) = \frac{577}{24}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = c = 1$; $b = d = 24$

hoặc $a = c = 24$; $b = d = 1$.

Câu 198. (Đề thi HSG 7 huyện Chí Linh)

Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{2}{5} < S < \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chứng minh được: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ ($a \in \mathbb{N}; a > 1$).

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

Áp dụng kết quả trên suy ra $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

...

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} < \frac{1}{9^2} < \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

Cộng vế với vế của các BĐT trên ta được: $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} < S < 1 - \frac{1}{9}$

$$\text{Hay } \frac{2}{5} < S < \frac{8}{9}$$

Câu 199.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -5)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$$

Câu 200.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -6)

Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ có ba chữ số khác nhau sao cho $3a + 5b = 8c$.

Lời giải

$$3a + 5b = 8c$$

$$\Leftrightarrow 3a - 3b = 8c - 8b \Leftrightarrow 3(a - b) = 8(c - b)$$

$$\text{Do đó } 3(a - b) : 8, \text{ từ đó } a - b : 8$$

$$\text{Do } a \neq b \text{ nên } a - b \in \{8; -8\}$$

- Trường hợp: $a - b = 8$ cho $c - b = 3$, ta có:

$$a = 8; b = 0; c = 3$$

$$a = 9; b = 1; c = 4.$$

- Trường hợp: $a - b = -8$ cho $c - b = 3$, ta có:

$$a = 1; b = 9; c = 6.$$

Vậy tất cả có ba số thỏa mãn bài toán: 803, 914, 196.

Câu 201.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -6)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x+2}{|x|}$ với x là số nguyên.

Lời giải

Xét các trường hợp:

$$+) x \leq -2 \text{ thì } A \leq 0.$$

$$+) x = -1 \text{ thì } A = 1$$

$$+) x \geq 1 \text{ khi đó: } A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}.$$

$$A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{2}{x} \text{ lớn nhất.}$$

$$\text{Vì } x \text{ là số nguyên dương, nên: } \frac{2}{x} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x \text{ nhỏ nhất, tức là } x = 1, \text{ khi đó } A = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 3 khi và chỉ khi $x = 1$

Câu 202.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai -7)

Cho biểu thức $A = \frac{2014 - x}{14 - x}$. Tìm giá trị nguyên của x để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm Giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$A = 1 + \frac{2000}{14-x}$$

$$A_{\text{Max}} \Leftrightarrow 14 - x > 0 \text{ và nhỏ nhất}$$

$$\Rightarrow 14 - x = 1 \Rightarrow x = 13$$

Vậy $x=13$ thoả mãn điều kiện bài toán khi đó $A_{\text{Max}} = 2001$

Câu 203.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 8)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-2)^2 + |y-x| + 3$

Lời giải

Ta có $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y-x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y

Suy ra A nhỏ nhất bằng 3 khi $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ |y-x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 204.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 9)

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x-2013| + |x-2014| + |x-2015|$.

Lời giải

$$A = (|-x+2013| + |x-2015|) + |x-2014|$$

$$A \geq |-x+2013+x-2015| + |x-2014| = 2 + |x-2014| \geq 2$$

$$A = 2 \text{ khi và chỉ khi } (-x+2013)(x-2015) \geq 0 \text{ và } x-2014 = 0 \Leftrightarrow 2013 \leq x \leq 2015; x = 2014 \\ \Leftrightarrow x = 2014$$

Vậy $\text{Min}(A) = 2$ khi $x=2014$

Câu 205.(Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Bảo 2017-2018)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thoả mãn: $x+y+z=xyz$.

Lời giải

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra: } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\text{Suy ra: } x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có:

$$1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y-1=2 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị

Câu 206.(Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẠC, 2017-2018)

Cho a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng:

$A = ab+ac+bc$ và $B = a+b+c$ và $C = abc$ nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Gọi $\text{UCLN}(ab, ac, bc, abc) = d \Rightarrow ab, ac, bc, abc$ đều chia hết cho d

$ab+ac+bc$ chia hết cho d và abc chia hết cho da

- Nếu $d > 1$ thì do a, b, c nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên chỉ có hoặc a , hoặc b , hoặc c chia hết cho d

không làm mất tính tổng quát của câu toán ta giả sử d là ước của a mà không phải là ước của b và c

$\Rightarrow d$ là ước của ac mà không phải là ước của bc

khi đó $ac + bc + ac$ không chia hết cho d vì bc không chia hết cho d mâu thuẫn với gt

$(ab, ac, bc, abc) = d \Rightarrow ab, ac, bc, abc$ đều chia hết cho d

suy ra $d = 1$ suy ra ĐPCM

Câu 207.(Đề thi HSG 7 huyện KON TUM, 2017 – 2018)

1. Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

2. Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016$; $a + 3b = 2017$; . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$

Lời giải

1. Gọi $x = \frac{m}{n}$ ($n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1$) . Khi đó:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \quad (1)$$

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 : m$$

$$\Rightarrow n^2 : m \text{ (Vì } m^2 : m)$$

$$\Rightarrow n : m$$

Mà $(m, n) = 1$ nên $m = 1$ hoặc $m = -1$

*) Với $m = 1$:

$$\text{Từ (1), ta có: } x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n} \quad \text{Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n \text{ hay } n = \pm 1$$

*) Với $m = -1$:

$$\text{Từ (1), ta có } x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{-1 \cdot n} = \frac{-1 - n^2}{n} \quad \text{Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n) \text{ hay } n = \pm 1$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m}{n} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{-1} \text{ hay } x = \pm 1$$

2. Ta có: $a + 3c = 2016$; (1) và $a + 3b = 2017$; (2)

$$\text{Từ (1) } a = 2016 - 3c \Rightarrow a = 2016 - 3c$$

Lấy (2) – (1) ta được: $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+3c}{2}$. Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1+3c}{2} + c = (2016 - \frac{1}{2}) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}$$

$$\text{Vì } a, b, c \text{ không âm nên } P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}, \text{ Max } P = 2016\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0$$

Câu 208.(Đề thi HSG 7 huyện Nga Sơn 2017-2018)

1. Chứng minh rằng không có số tự nhiên n nào để $n^2 + 2018$ là số chính phương

2. Biết x, y là các số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2018}{2017}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x

Lời giải

1. Ta có $n^2 + 2018 = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$

suy ra $m^2 - n^2 = 2018$ suy ra m và n cùng tính chẵn lẻ

*Nếu n, m cùng chẵn thì m^2 và n^2 cùng chia hết cho 4 suy ra $m^2 - n^2$ chia hết cho 4 mà 2018 không chia hết cho 4 (vô lí)

*Nếu n, m cùng lẻ thì m^2 và n^2 chia cho 4 dư 1

Suy ra $m^2 - n^2$ chia hết cho 4 mà 2018 không chia hết cho 4 (vô lí)

Vậy không có số tự nhiên n nào để $n^2 + 2018$ là số chính phương

2. Ta có

$$\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2018}{2017} \Rightarrow \frac{x+y+y}{x+y} = \frac{2018}{2017} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2017}$$

$$\Rightarrow x = 2016y$$

$$\text{Mà } y \geq 1 \Rightarrow x \geq 2016$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $x = 2016$ khi $y = 1$

Câu 209. (Đề thi HSG 7 huyện Nga Sơn 2017-2018)

Từ hai tập hợp $X = \{22; 23; 24; 25\}$ và $Y = \{2; 3; 4; 5\}$ có thể tìm được hay không một hàm số biểu thị sự tương quan cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $x \in X, y \in Y$ sao cho $x+y$ chia hết cho 9.

Lời giải

Ta có: $22 \in X$ và $5 \in Y$ và $22+5=27:9$; $22+2$; $22+3$; $22+4$ không chia hết cho 9

Tương tự xét số 23; 24; 25

ta có, ứng với mỗi phần tử của $x \in X$ ta tìm được duy nhất một phần tử thuộc $y \in Y$ mà $x+y:9$.

Vậy tương quan đó là hàm số

ta có công thức $y=27-x$

Câu 210. (Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẶC, 2015-2016)

a) chứng minh rằng: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ Chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

Lời giải

a) Ta có: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

$$= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$$

$$= 3^n (9+1) - 2^n (4+1)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

Vậy: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi n nguyên dương.

$$\text{b) Vì } |2015 - x| \geq 0 \text{ nên } A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } |2015 - x| = 0 \Leftrightarrow x = 2015 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } (x - 2014)(2016 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2014 \leq x \leq 2016 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$ Dấu "=" xảy ra khi $x = 2015$

Vậy GTNN của A bằng 2 khi $x = 2015$

Câu 211.(Đề thi HSG 7 huyện NGỌC LẠC, 2017-2018)

Cho n là số tự nhiên c/m rằng: $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Lời giải

Cho n là số tự nhiên chứng minh: $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Ta có : $9 \cdot 10^n + 18 = 9 \cdot (10^n + 2)$

$(10^n + 2) = 1000000 \dots 2$ (có $n - 1$ chữ số 0)

số này có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên $(10^n + 2)$ chia hết cho 3

do đó $(10^n + 2) = 3k$ (k là số tự nhiên)

$9 \cdot 10^n + 18 = 9 \cdot (10^n + 2) = 9 \cdot 3k = 27k$

vậy $9 \cdot 10^n + 18 = 9 \cdot (10^n + 2)$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n

Câu 212.(Đề thi HSG 7 TX CHÍ LINH 2016-2017)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a + b = c + d = 25$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$.

Lời giải

Vì $a + b = c + d = 25$ nên $1 \leq a, b, c, d \leq 24$

Nếu cả hai phân số $\frac{c}{b}$ và $\frac{d}{a}$ đều lớn hơn 1 thì $c + d > a + b$. Trái giả thiết.

Vậy có một phân số không vượt quá 1.

Không mất tính tổng quát giả sử $\frac{c}{b} \leq 1$

+ Nếu $d \leq 23$ thì $\frac{d}{a} \leq 23$ (vì $a \geq 1$) $\Rightarrow M = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} \leq 1 + 23 = 24$ (1)

+ Nếu $d = 24$ thì $c = 1 \Rightarrow M = \frac{1}{b} + \frac{24}{a}$

- Nếu $a > 1$ thì $\Rightarrow M \leq 1 + \frac{24}{2} = 13$ (2)

- Nếu $a = 1$ thì $b = 24 \Rightarrow M \leq \frac{1}{24} + \frac{24}{1} = \frac{577}{24}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{Max}(M) = \frac{577}{24}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = c = 1$; $b = d = 24$

hoặc $a = c = 24$; $b = d = 1$.

Câu 213.(Đề thi HSG 7 huyện YÊN MÔ 2017-2018)

1) Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức $A = \frac{14-x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất? Hãy tìm giá trị lớn của A tại x ?

2) Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác

0. Chứng minh rằng: $M^{10} < 2017$

Lời giải

1) $A = 1 + \frac{10}{4-x}$ A lớn nhất $\rightarrow \Leftrightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất

- Xét $x > 4$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$

- Xét $x < 4$ thì $\frac{10}{4-x} > 0 \rightarrow A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \rightarrow 4 - x \text{ nhỏ nhất } x = 3$

Vậy giá trị lớn nhất A tại $x=3$ là: $A=11$

2)+ Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$; $\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$; $\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$; $\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$

$M < \Rightarrow M < 2$

+ Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 2017$

Vậy $M^{10} < 2017$

Câu 214.(Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài ra: $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

Suy ra: $x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có:

$1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$

$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$

TH1: $\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ (loại)

Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị

Câu 215.(Đề thi HSG 7 huyện THANH CHUÔNG)

a. Chứng minh: $5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012}$ chia hết cho 105.

b. Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

a) $5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012} = 5^{2011}(5^3 - 5^2 + 5)$

$= 5^{2011}(125 - 25 + 5) = 5^{2011}.105$ chia hết cho 105

b)

*) Nếu $p = 3k + 1$ ta có: $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ là hợp số (trái gt)

*) Nếu $p = 3k + 2$ ta có $2p + 4 = 2(3k + 2) + 2 = 6(k + 1)$ là hợp số (trái gt)

Vậy $p = 3k$, mặt khác p là số nguyên tố nên $p = 3$

Câu 216.(Đề thi HSG 7 huyện THANH CHUÔNG)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015|$.

Lời giải

$A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015| = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$

Ta có: $|x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$. Dấu “=” xảy ra khi: $2013 \leq x \leq 2015$ (1)

Lại có: $|x - 2014| \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2014$ (2). Từ (1) và (2) Ta có $\min A = 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2014$

Câu 217.(Đề thi HSG 7 huyện THÁI THỤY 2015-2016)

1) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x + 4^x = 5^x$

2a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$.

3) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

1) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn: $3^x + 4^x = 5^x$

+) Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn

+) $x > 2$

$$3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \quad (*)$$

$$\text{Với } x > 2 \text{ ta có } \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\left(\text{vì } \frac{3}{5} < 1; \frac{4}{5} < 1 \right)$$

Suy ra $x > 2$ không thỏa mãn

Vậy $x = 2$

2a) ĐK: $x \geq 0$

$$\text{Ta có } x \geq 0; \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$ (tmđk)

Vậy $P_{\min} = 0$ tại $x = 0$

b) Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

$$\text{Khi đó } |b - 5| + b - 5 = 8$$

+ Nếu $b < 5$, ta có $-(b - 5) + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8$ (loại)

+ Nếu $b \geq 5$, ta có $2(b - 5) = 8 \Leftrightarrow b - 5 = 4 \Leftrightarrow b = 9$ (thỏa mãn)

vậy $(a; b) = (0; 9)$

$$3) 0 \leq (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$;

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

+) Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$

Nhân cả hai vế với a dương ta được: $a^2 < ab + ac$

Tương tự: $b^2 < ba + bc$; $c^2 < ca + cb$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 218.(Đề thi HSG 7 huyện YÊN LẠC)

1)Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$

2)Tìm các số không âm x, y, z thỏa mãn: $x + 3z = 8$; $x + 2y = 9$ và $x + y + z$ lớn nhất.

Lời giải

1)+Với $x=1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$

+Với $x=2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài

+Với $x=3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 \Rightarrow y = \pm 3$

+Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng bằng 0) nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương $\Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn đề bài là $(x, y) = (1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)$

2)Ta có : $x + 3z = 8$; $x + 2y = 9$

Suy ra: $2x + 2y + 3z = 17$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) = 17 - z \leq 17 \Rightarrow (x+y+z) \leq 17/2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=0$ khi đó $x=8$; $y=1/2$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của $(x+y+z)$ là $17/2$

Vậy các số x, y, z cần tìm là $(x, y, z) = (8; 1/2; 0)$

Câu 219.(Đề thi HSG 7 huyện Ý YÊN 2015-2016)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{22-3x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Biến đổi } C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$$

C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau

$$\text{Với } x > 4 \Rightarrow 4-x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4-x} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Với } x > 4 \Rightarrow 4-x > 0$$

Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$ Suy ra $4-x \in \mathbb{Z}$

Suy ra $4-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-x = 1 \Rightarrow x = 3$

khi đó $\frac{10}{4-x}$ có giá trị là 10 (2)

Từ (1) và (2), phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10

Vậy GTLN của C bằng 13 khi và chỉ khi $x = 3$

Câu 220.(Đề thi HSG 7 huyện PHÚ THIỆN 2009-2010)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overline{abcabc} &= a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + a.10^2 + b.10 + c \\ &= a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1) \\ &= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= (1000 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) = 1001(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= 11.91(a.10^2 + b.10 + c) : 11\end{aligned}$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 221. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN)

a) So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$

b) Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

c) Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Lời giải

a) Ta có: $(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$$

Ta thấy: $125^{13} < 128^{13} - 125^{13} > -128^{13} > (-5)^{39} > (-2)^{91}$

b) Chứng minh: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra: $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

c) Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

$$\text{Do đó, từ } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa} \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

$$\text{Mặt khác: } \frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999 \Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hoặc $n = 37$, hoặc $n+1 = 37$

$$\text{- Với } n = 37 \text{ thì } \overline{aaa} = \frac{37.38}{2} = 703 \text{ (không thỏa)}$$

$$\text{- Với } n+1 = 37 \text{ thì } \overline{aaa} = \frac{36.37}{2} = 666 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 222. (Đề thi HSG 7 huyện VŨ THƯ 2015-2016)

a) Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

b) Tìm các số nguyên dương $x; y; z$ thỏa mãn:

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015 \cdot |x-z| = 2017$$

Lời giải

a) Gọi kích thước hình chữ nhật cần tìm là x, y (đơn vị độ dài)

$$(x, y \in \mathbb{N}^*; x \geq y)$$

Ta có diện tích và chu vi hình chữ nhật lần lượt là: $x \cdot y$ và $2(x+y)$

Theo bài ra ta có: $x \cdot y = 2(x+y)$ với $x, y \in \mathbb{N}^*; x \geq y$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(x-2) = 4$$

Với $x, y \in \mathbb{N}^*$ ta có $(y-2); (x-2) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y-2; x-2 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ nhưng vì } x-2; y-2 > -2 \text{ và } x \geq y$$

Ta có 2 trường hợp sau:

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

Có hai hình chữ nhật thỏa mãn bài toán:

Hình chữ nhật có kích thước 6 và 3; 4 và 4.

b) Chứng minh: $(x-y)^3 - (x-y)$ chia hết cho 2

$$(y-z)^2 - (y-z) \text{ chia hết cho 2}$$

$$|z-x| - (z-x) \text{ chia hết cho 2}$$

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015|x-z| =$$

$$(x-y)^3 - (x-y) + (y-z)^2 - (y-z) + |z-x| - (z-x) + 2014|z-x|$$

Chia hết cho 2

Mà 2017 không chia hết cho 2 nên không tồn tại các số nguyên dương $x; y; z$ thỏa mãn đề bài

Câu 223. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN CHÍCH 2017-2018)

a) Tìm x, y nguyên biết $2xy - x - y = 2$

b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

$$a) 2xy - x - y = 2 \Leftrightarrow 4xy - 2x - 2y = 4 \Leftrightarrow 2x(2y-1) - 2y+1 = 5 \Leftrightarrow (2y-1)(2x-1) = 5$$

$$\text{HS xét 4 trường hợp tìm ra } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

$$\text{Vậy } (x, y) = \{(1; 3); (3; 1); (-2; 0); (0; -2)\}$$

$$b) \text{ Ta có } a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

$$\text{Mà } 3c^3 - 15d^3 : 3 \text{ nên } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3 \quad (1)$$

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay

$$a \equiv a^3 \pmod{3}$$

$$\text{Tương tự ta có } b \equiv b^3 \pmod{3}; \quad c \equiv c^3 \pmod{3}; \quad d \equiv d^3 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Câu 224.(Đề thi HSG 7 huyện)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$.

c) Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

a) Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x|$
 $\geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

b) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo bài ra $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào đầu bài ta có $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$

$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$

TH1: $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$ và $z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$

TH2: $y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$ và $z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

c) $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$ (1)

Tương tự: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$ (2); $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$ (3)

Do đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ (4)

Mà $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ (đpcm)

Câu 225.(Đề thi HSG 7 huyện GIA VIÊN 2016-2017)

1) Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng $x.y \leq 1$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $E = \frac{x^2 + 8}{x^2 + 2}$

Lời giải

HSTL

Câu 226.(Đề thi HSG 7 huyện GIA VIÊN)

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.

b) So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$.

c) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

a) So sánh: $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$.

Ta có

$$\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4; \sqrt{26} > \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 = 4 + 5 + 1 = 10$$

$$\sqrt{99} < \sqrt{100} = 10$$

$$\text{Vậy } \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{10}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{10}; \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{10}; \dots; \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \frac{1}{10} = 10$$

$$c) 2^x + 2^y = 72$$

$$\text{Giả sử } x > y \text{ ta có } 2^x + 2^y = 2^y(1 + 2^{x-y}) = 9 \cdot 2^3$$

$$\text{Do } 1 + 2^{x-y} \text{ là số lẻ nên: } 1 + 2^{x-y} = 1; 3; 9$$

Ta có bảng giá trị sau:

$1 + 2^{x-y} = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 9$	$2^y = 2^3$

Ta thấy $2^y = 2^3$ là phù hợp

$$\text{Vậy } \begin{cases} 2^{x-y} + 1 = 9 \\ 2^y = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-y} = 8 = 2^3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ và } y = 3.$$

Câu 227. (Đề thi HSG 7 Trường NGUYỄN HỒNG LỄ 2017-2018)

$$a) \text{ Tìm số nguyên } x, y \text{ biết: } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$$

b) Chứng minh rằng $(2017^n + 2)(2017^n + 1)$ chia hết cho 3 với $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

$$a) \text{ Từ: } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8} \Rightarrow x(1-2y) = 40$$

$$\Rightarrow 1-2y \in \text{ước lẻ của } 40 \text{ là: } \pm 1; \pm 5$$

Lập bảng:

$1-2y$	-5	-1	1	5
x	-8	-40	40	8
y	3	1	0	-2

Vậy ta có các cặp số $(x; y)$ là: $(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)$

b) Ta có $2017^n, 2017^n + 1, 2017^n + 2$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3

Mà 2017^n không chia hết cho 3

Do đó $2017^n + 1$ và $2017^n + 2$ có một số chia hết cho 3

Suy ra $(2017^n + 2)(2017^n + 1)$ chia hết cho 3 với $n \in \mathbb{N}$ (đpcm)

Câu 228. (Đề thi HSG 7 huyện .(1)... 2017-2018)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0$$

+) Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

Câu 229. (Đề thi HSG 7 huyện ...(2).. 2017-2018)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 230. (Đề thi HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2017-2018)

a) Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r .

b) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$

Lời giải

a) Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: $p = 42k + r$ ($0 < r < 42$, k, r tự nhiên) Hay $p = 2.3.7k + r$.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

$\Rightarrow r$ là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và $r < 42$

Học sinh chỉ ra được $r = 25$

Vậy hợp số $r = 25$

b) Ta có $(a+b)^3 = \overline{ab}^2$ là số chính phương nên $a+b$ là số chính phương.

Đặt $a+b = x^2$ ($x \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Suy ra: } \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = x^6$$

$$\Rightarrow x^3 = \overline{ab} < 100 \text{ và } \overline{ab} > 8 \Rightarrow 8 < x^3 < 100 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x = 3; 4 \text{ vì } x \in \mathbb{N}^*$$

- Nếu $x = 3 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 3^6 = 729 = 27^2 = (2+7)^3 \Rightarrow x = 3$ (nhận)

- Nếu $x = 4 \Rightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^3 = 4^6 = 4096 = 64^2 = (6+4)^3 = 1000 \Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là $\overline{ab} = 27$

Câu 231. (Đề thi HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2017-2018)

Cho biểu thức $M = \frac{5-x}{x-2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{5-x}{x-2} = \frac{3-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1 \quad (x \neq 2)$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x-2 \text{ lớn nhất và } x-2 < 0$$

$$x \text{ lớn nhất và } x < 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x \text{ nguyên)}$$

$$\text{Khi đó GTNN của } M \text{ là: } M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4 \text{ khi } x = 1$$

Câu 232. (Đề thi HSG 7 huyện HOÀI NHƠN 2018)

a) So sánh hai số:

b) Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

a) So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$

$$\text{Ta có: } (-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$$

$$\text{Ta thấy: } 125^{13} < 128^{13} \Rightarrow -125^{13} > -128^{13} \Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$$

$$\text{b) Ta có: } A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= (133-12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$$

$$\text{Ta thấy: } 133 \cdot 11^n \vdots 133$$

$$(144^n - 11^n)(144-11) = 133 \cdot 12 \cdot (144^n - 11^n) \vdots 133$$

$$\text{Do đó suy ra: } 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \text{ chia hết cho } 133$$

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 233. (Đề thi HSG 7 huyện KINH MÔN 2020)

1) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x + 2y = 3xy + 3$

2) CMR với n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } x + 2y = 3xy + 3 \Rightarrow 3x + 6y = 9xy + 9$$

$$(3x - 9xy) + (6y - 9) = 0 \Rightarrow 3x(1 - 3y) - 3(3y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 2) \cdot (1 - 3y) = 7$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3x - 2$; $1 - 3y$ là các số nguyên.

Mà $(3x - 2) \cdot (1 - 3y) = 7 \Rightarrow 3x - 2 ; 1 - 3y$ là ước của 7.

Ta lại có $U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow 3x - 2 ; 1 - 3y \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Bảng giá trị

$3x - 2$	-7	-1	1	7
$1 - 3y$	-1	-7	7	1
x	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3
y	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	-2	0
	KTM	KTM	TM	TM

Vậy $(x, y) \in \{(1; -2); (3; 0)\}$

b) Ta có $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

$$= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^{n-1} \cdot (2^3 + 2)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10$$

Câu 234. (Đề thi HSG 7 huyện KRÔNG ANA năm 2013)

Chứng minh rằng: Tích của tổng 3 số nguyên liên tiếp và tổng của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 15.

Lời giải

- Gọi 5 số nguyên liên tiếp là :

$a ; a + 1; a + 2; a + 3; a + 4$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Đặt biểu thức :

$$A = [a + (a + 1) + (a + 2)][a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4)]$$

- Lập được tổng 3 số bất kì là bội của 3

$$\text{Chẳng hạn: } a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1) : 3$$

- Lập được tổng 5 số là bội của 5

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5(a + 2) : 5$$

- Vì 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $A : 15$

Câu 235. (Đề thi HSG 7 huyện KINH MÔN 2020)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có:

$$a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac \quad (1)$$

$$b < c + a \Rightarrow b^2 < ab + bc \quad (2)$$

$$c < a + b \Rightarrow c^2 < ac + bc \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a - b)(a - b) \geq 0 \Rightarrow a(a - b) - b(a - b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - ab - ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (4)$$

Chứng minh tương tự có $b^2 + c^2 \geq 2bc$ (5), $a^2 + c^2 \geq 2ac$ (6)

Cộng từng vế của (4), (5),(6) ta có:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Vậy $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Câu 236.(Đề thi HSG 7 cấp huyện tỉnh BẮC GIANG 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

Lời giải

$$P = |x - 2012| + |x - 2013|$$

+ Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

+ Nếu $x > 2013$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

+ Nếu $x < 2012$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

+ Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

Câu 237.(Đề thi HSG 7 cấp huyện tỉnh BẮC GIANG 2018)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.

2) Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

1)+ Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$

+Với $p = 3k + 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012):3$$

+Với $p = 3k - 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012):3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số.

2) + Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

+ Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị : 36 ; 64 ; 100 ; 144 ; 196

+ Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

$$2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36 \text{ là số chính phương}$$

$$2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54 \text{ không là số chính phương}$$

$$2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76 \text{ không là số chính phương}$$

$$2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102 \text{ không là số chính phương}$$

+ Vậy số cần tìm là $n = 32$.

Câu 238.(Đề thi HSG 7 huyện VĨNH BẢO 2018)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

c) Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra: } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\text{Suy ra: } x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có:

$$1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị

Câu 239.(Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 20.. -20...)

a) Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n - 1}{n - 1}$ có giá trị là số nguyên.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho : $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$.

d) Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này ?

Lời giải

a)

$$M = \frac{3n - 1}{n - 1} \text{ có giá trị là số nguyên} = 3n - 1 : n - 1$$

$$\Rightarrow 3(n - 1) + 2 : n - 1 \Rightarrow 2 : n - 1 \Rightarrow n - 1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\}$$

Ta có bảng

$n-1$	-1	1	-2	2
n	0	2	-1	3

Thử lại ta có $n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

b) Nhận xét:

$$\text{-Với } x \geq 0 \text{ thì } |x| + x = 2x$$

$$\text{-Với } x < 0 \text{ thì } |x| + x = 0.$$

Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$.

$$\text{Khi đó } |n - 2016| + n - 2016 = 2016$$

$$+ \text{ Nếu } n < 2016, \text{ ta có } -(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0 = 2016 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } n \geq 2016, \text{ ta có } 2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n - 2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } (m; n) = (0; 3024)$$

$$\text{c) } P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$$

$$\text{Ta có: } |x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi: $2015 \leq x \leq 2017$ (1)

Lại có: $|x - 2016| \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$

d) Nhận xét : Bốn số phải có cùng số dư khi chia cho 2 và 3.

Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1.

Từ đó ta có các số 1, 7, 13 và 19. Tổng của chúng là : $1+7+13+19=40$.

Câu 240. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2018 -2019)

a) Cho các số nguyên dương m, n và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$.

Chứng minh rằng: $p^2 = n + 2$.

b) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $\frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5}$.

c) Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

a) Theo giả thiết ta có: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$ (*)

+) Nếu $m+n \vdots p$ thì từ (*) suy ra $p \vdots (m-1)$. Do p là số nguyên tố nên $m-1=1$ hoặc $m-1=p$. Từ đó suy ra $m=2$ hoặc $m=p+1$.

Với $m=2$ hoặc $m=p+1$ thay vào (*) ta có: $p^2 = n + 2$

+) Nếu $m+n$ không chia hết cho p . Từ (*) $\Rightarrow (m+n)(m-1) = p^2$

Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m-1 = p^2$ và $m+n=1$

$\Leftrightarrow m = p^2 + 1$ và $n = -p^2 < 0$ (loại)

Vậy $p^2 = n + 2$

b) Ta có: $\frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow \frac{5a-3}{15} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow (5a-3)b = 60$.

Suy ra: $5a-3 \in U(60) = \{\pm 60, \pm 30, \pm 20, \pm 15, \pm 12, \pm 10, \pm 6, \pm 4, \pm 5, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$

mà $5a-3$ chia 5 dư -3 hoặc 2 nên có:

$5a-3$	-3	2	12
a	0	1	3
b	-20	15	5

c) Với mọi $\forall k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$).

Ta có: $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$

Suy ra $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$

Cho $k = 2; 3; \dots; n$ ta có:

$$\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ (đpcm)}$$

Câu 241.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Chương 20.. -20..)

Tìm $x; y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có: $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 3$

$$\Leftrightarrow (y + 2)(x - 1) = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$$

$y + 2$	3	1	-1	-3
$x - 1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Câu 242.(Đề thi HSG 7 thị xã Chí Linh 20.. -20..)

Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{2}{5} < S < \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chứng minh được: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ ($a \in \mathbb{N}; a > 1$).

Áp dụng kết quả trên suy ra

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} < \frac{1}{9^2} < \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

Cộng vế với vế của các BĐT trên ta được: $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} < S < 1 - \frac{1}{9}$

$$\text{Hay } \frac{2}{5} < S < \frac{8}{9}$$

Câu 243.(Đề thi HSG 7 huyện Yên Lập 2014 -2015)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên âm.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$.

3) Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

$$\text{Ta có: } A = |2x + 2| + |2x - 2013| = |2x + 2| + |2013 - 2x| \geq |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015$$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $\max A = 2015$ khi $x = -1$

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x+y+z=xyz$.

Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Từ } x+y+z=xyz \Rightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào $x+y+z=xyz$ ta có :

$$1+y+z=1.yz \Rightarrow y-z+1+z=0 \Rightarrow y(1-z)-(1-z)+2=0 \Rightarrow (y-1)(z-1)=2$$

$$\text{TH1: } y-1=1 \Rightarrow y=2 \text{ và } z-1=2 \Rightarrow z=3$$

$$\text{TH2: } y-1=2 \Rightarrow y=3 \text{ và } z-1=1 \Rightarrow z=2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

3) Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{c+a} \quad (2); \quad \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{c+b} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{b}{c+a} + \frac{a}{c+b} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{c+b} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 244. (Đề HSG Lâm Thao 1016-2017).

a) Chứng tỏ rằng: $M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

b) Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$ Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Lời giải

$$M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 25.(4-1)(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$a) = 25.[4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25$$

$$= 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 25.4^{2018} - 25 + 25 = 25.4^{2018} = 25.4.4^{2017} = 100.4^{2017}$$

Vậy $M:10^2$

b) Đặt $a.b=c^2$ (1) Gọi $(a, c)=d$ nên $a:d, c:d$

$\Rightarrow a=md$ và $c=nd$ với $(m, n)=1$ Thay vào (1) ta được $m.d.b=n^2.d^2$

$$m.b=n^2.d \Rightarrow b:n^2 \text{ vì } (a, b)=1=(b, d) \text{ Và } n^2:b \Rightarrow b=n^2$$

Thay vào (1) ta có $a=d^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Câu 245. (Đề HSG huyện Thanh Hà 2016-2017).

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

- a) Tích của 100 số đó là một số dương;
b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm.

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương.

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$.

Các số này đều khác 0 (vì nếu có 1 thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài).

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm.

Xét tích $a_1 a_2 a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$

Xét tích $a_1 a_2 a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Câu 246. (Đề HSG huyện Thanh Hà 2016-2017).

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 ($x \in \mathbb{N}$).

Lời giải

$$\begin{aligned} & a) 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (dpcm)}. \end{aligned}$$

Câu 247. (Đề HSG Lâm Thao 1016-2017).

Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết:

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|.$$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

$$\text{Có: } |7x - 5y| = 0 \Rightarrow 7x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

$$|2z - 3x| = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 2000$$

Từ đó tìm được
$$\begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 0$ khi $(x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$.

Câu 248.(Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Cho $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên ?

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$

$$\text{Biến đổi } Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2 \cdot (12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$$

Ta có $2 \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$

nên Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{3}{12 - x}$ có giá trị nguyên

Mà $\frac{3}{12 - x}$ có giá trị nguyên khi và chỉ khi $12 - x \in U(3)$

$$U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

+Nếu $12 - x = -3$ thì $x = 15$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12 - x = -1$ thì $x = 13$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12 - x = 1$ thì $x = 11$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12 - x = 3$ thì $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $x \in \{9; 11; 13; 15\}$

Câu 249.(Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 90|$$

$$= -[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|]$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$|xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Khi đó $8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $-[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \leq 0$ với mọi x, y

Hay $P \leq 0$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 5y)^2 = 0$ và $|xy - 90| = 0$

+ Với $(2x - 5y)^2 = 0$ thì $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$

+ Với $|xy - 90| = 0$ thì $xy = 90$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k$; và $y = 2k$

Mà $xy = 90$ nên $5k.2k = 90$

Tìm được $k = 3$ hoặc $k = -3$

+ Nếu $k = 3$ thì $x = 15; y = 6$

+ Nếu $k = -3$ thì $x = -15; y = -6$

Kết luận : Vậy giá trị lớn nhất của P là 0 khi và chỉ khi:

$x = 15; y = 6$ hoặc $x = -15; y = -6$

Câu 250.(Đề thi HSG 7 Đông Hưng 2018-2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0.

Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$

Vậy $M^{10} < 1025$

Câu 251.(Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Chứng minh rằng với n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

Ta có $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

$$= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n)$$

$$= 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^{n-1} \cdot (2^3 + 2)$$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10 : 10. \text{ Vậy } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$$

Câu 252.(Đề thi HSG 7 Kim Thành 2016-2017)

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x + 2y = 3xy + 3$

Lời giải

Ta có $x + 2y = 3xy + 3$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 9xy + 9 \Rightarrow (3x - 9xy) + (6y - 2) = 7$$

$$\Rightarrow 3x \cdot (1 - 3y) - 2 \cdot (1 - 3y) = 7 \Rightarrow (3x - 2) \cdot (1 - 3y) = 7$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3x - 2; 1 - 3y$ là các số nguyên.

Mà $(3x - 2) \cdot (1 - 3y) = 7 \Rightarrow 3x - 2; 1 - 3y$ là ước của 7.

Ta lại có $U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow 3x - 2; 1 - 3y \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Bảng giá trị

$3x - 2$	-7	-1	1	7
$1 - 3y$	-1	-7	7	1
x	-5/3	1/3	1	3
y	2/3	8/3	-2	0
	KTM	KTM	TM	TM

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2); (3; 0)\}$

Câu 253.(Đề thi HSG 7 Kinh Môn 2017-2018)

a) Tìm các cặp số nguyên thỏa mãn $x - 3y + 2xy = 4$

b) Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2018$ là số chính phương

Lời giải

a) Ta có: $x - 3y + 2xy = 4$

$$\Rightarrow 2x + 4xy - 6y = 8$$

$$\Rightarrow 2x + 2x \cdot 2y - 3 \cdot 2y - 3 = 8 - 3$$

$$\Rightarrow 2x(1 + 2y) - 3 \cdot (2y + 1) = 5$$

$$\Rightarrow (2x - 3)(1 + 2y) = 5$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x - 3; 1 + 2y \in \mathbb{Z}$ suy ra $2x - 3; 1 + 2y \in \mathbb{Z}$ phải là các ước của 5.

$2x - 3$	-1	-5	1	5
$1 + 2y$	-5	-1	5	1
x	1	-1	2	4
y	-3	-1	2	0

Vậy các cặp $x; y$ thỏa mãn là: $(x; y) \in \{(1; -3); (-1; -1); (2; 2); (4; 0)\}$

b) Giả sử $n^2 + 2018$ là số chính phương với n là số tự nhiên

Khi đó ta có $n^2 + 2018 = m^2 (m \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Từ đó suy ra: } m^2 - n^2 = 2018 \Leftrightarrow m^2 - mn + mn - n^2 = 2018$$

$$\Leftrightarrow m(m - n) + n(m - n) = 2018 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2018$$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác ta có: $m + n + m - n = 2m$

$\Rightarrow 2$ số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$ nhưng 2018 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2018$ là số chính phương

Câu 254.(Đề thi HSG 7 Kinh Môn 2017-2018)

Cho 2016 số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$ thỏa mãn: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}} = 300$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 số trong 2016 số đã cho bằng nhau

Lời giải

Giả sử trong 2016 số đã cho không có 2 số nào bằng nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2016}$$

Vì $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2016}$ đều là các số nguyên dương

nên: $a_1 \geq 1; a_2 \geq 2; a_3 \geq 3; \dots, a_{2016} \geq 2016$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2016}} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2016}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \dots + \frac{1}{2016} \right)$$

$$< 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{512} \cdot 512 + \frac{1}{1024} \cdot 993$$

$$< 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2^{10}} \cdot 2^{10} = 11 < 300$$

Mâu thuẫn với giả thiết. Do đó điều giả sử là sai.

Vậy trong 2016 số đã cho phải có ít nhất 2 số bằng nhau.

Câu 255.(Đề thi HSG 7 Việt Yên 2013-2014)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013 - x| + |2014 - x|$.

b) Tìm số có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 36 và các chữ số của nó tỷ lệ với 1 ; 2 ; 3.

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu

$$\text{Ta có } P = |2013 - x| + |2014 - x| = |x - 2013| + |2014 - x|$$

$$P \geq |x - 2013 + 2014 - x| = |1| = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2013)$ và $(2014 - x)$ cùng dấu

$$\text{Hay } 2013 \leq x \leq 2014$$

Vậy $\min P = 1$ khi và chỉ khi $2013 \leq x \leq 2014$

b) Gọi ba chữ số của số phải tìm là a, b, c ta có :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \quad (*)$$

Do số phải tìm chia hết cho 36 nên số đó chia hết cho 9 suy ra $a + b + c$ chia hết cho 9

Mà a, b, c là các chữ số có ít nhất một chữ số khác 0 nên $a + b + c$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị : 9; 18; 27

$$\text{Nếu } a + b + c = 9 \text{ Từ } (*) \text{ ta có } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6}$$

(không thỏa mãn vì a là chữ số)

Nếu $a + b + c = 18$ kết hợp (*) ta có $a = 3; b = 6; c = 9$ vì số phải tìm chia hết cho 36 nên chữ số hàng đơn vị chẵn ta có số 396; hoặc 936

Nếu $a+b+c=27$ từ (*) $\Rightarrow a = \frac{27}{6}$ (loại)

Thử lại ta thấy cả hai số 396 và 936 đều thỏa mãn

Vậy số phải tìm là 936 và 396

Câu 256.(Đề thi HSG 7 Việt Yên 2013-2014)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Lời giải

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$

$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c$

$\Rightarrow 5^b : 5^c$

$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3)$

$\Rightarrow a^2(a + 3) + 5 : a + 3$

Mà $a^2(a + 3 : a + 3)$ [do $(a + 3) : (a + 3)$]

$\Rightarrow 5 : a + 3$

$\Rightarrow a + 3 \in U(5)$

$\Rightarrow a + 3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$ (1)

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \geq 4$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 5 - 3 = 2$

$\Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^b$

$25 = 5^b$

$5^2 = 5^b$

$b = 2$

Câu 257.(Đề thi HSG 7 huyện Phú Thiện 2019-2020)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

$\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

$= a \cdot 10^2(10^3 + 1) + b \cdot 10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$

$= (10^3 + 1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$

$= (1000 + 1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) = 1001(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$

$= 11 \cdot 91(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) : 11$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 258.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai-1)

Tìm số nguyên a để: $\frac{2a+9}{a+3} + \frac{5a+17}{a+3} - \frac{3a}{a+3}$ là số nguyên.

Lời giải

Tìm số nguyên a để: $\frac{2a+9}{a+3} + \frac{5a+17}{a+3} - \frac{3a}{a+3}$ là số nguyên.

Ta có : $\frac{2a+9}{a+3} + \frac{5a+17}{a+3} - \frac{3a}{a+3} = \frac{4a+26}{a+3} = \frac{4a+12+14}{a+3} = \frac{4(a+3)+14}{a+3} = 4 + \frac{14}{a+3}$ là số nguyên

Khi đó $(a+3)$ là ước của 14 ;

Suy ra: $a = -2; -4; -1; -5; 4; -10; 11; -17$.

Câu 259.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai- 2)

Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Từ: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1-2y}{8} \Rightarrow x(1-2y) = 40$

$\Rightarrow 1-2y \in$ ước lẻ của 40 là: $\pm 1; \pm 5$

Lập bảng:

$1-2y$	-5	-1	1	5
x	-8	-40	40	8
y	3	1	0	-2

Vậy ta có các cặp số $(x; y)$ là: $(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)$

Câu 260.(Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai - 3)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15-x}{5-x}$.

Lời giải

$M = \frac{15-x}{5-x} = 1 + \frac{10}{5-x}$ M lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất

+) $x > 5$ thì $\frac{10}{5-x} < 0$ (1)

+) $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$ mà $\frac{10}{5-x}$ có tử không đổi nên pt có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5-x=1 \Rightarrow x=4$

Khi đó $\frac{10}{5-x} = 10$ (2)

So sánh (1) với (2) thấy $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất bằng 10

Vậy GTLN của $M=11$ khi và chỉ khi $x=4$

Câu 261.(Đề thi HSG 7 huyện ĐÔNG HƯNG 2005 - 2006)

Cho a, b, c là 3 số đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \left[\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} \right] = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

Lời giải

Ta có : $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-b)} - \frac{1}{(a-c)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$

$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} \left[\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} \right] = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}.$$

Câu 262.(Đề thi HSG 7 Huyện Như Xuân 2014-2015)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho: $2xy + x - 2y = 4$
- 2) Tìm số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó chia hết cho 7 và tổng các chữ số đó bằng 14.

Lời giải

$$1) \text{Ta có: } 2xy + x - 2y = 4 \Leftrightarrow x(2y+1) - (2y+1) = 3 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y+1) = 3 = (\pm 1).(\pm 3) = (\pm 3).(\pm 1)$$

$x-1$	1	-1	3	-3
x	2	0	4	-2
$2y+1$	3	-3	1	-1
y	1	-2	0	-1

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (0; -2); (4; 0); (-2; -1)\}$.

2) Ta có

$$\overline{abc} : 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c) : 7 \Leftrightarrow (98a + 7b + 2a + 3b + c) : 7 \Leftrightarrow (2a + 3b + c) : 7 \quad (1)$$

Mặt khác theo bài ra :

$$a + b + c = 14 \Rightarrow (a + b + c) : 7 \Rightarrow (2a + 2b + 2c) : 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow b - c : 7 \Rightarrow b - c \in \{-7; 0; 7\}$$

$$+) \text{ Nếu } b - c = 7 \text{ có } c = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = 7$$

$$c = 1 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$c = 2 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$+) \text{ Nếu } b - c = 0 \text{ có } b = c = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$b = c = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$b = c = 4 \Rightarrow a = 6$$

$$b = c = 3 \Rightarrow a = 8$$

$$+) \text{ Nếu } b - c = -7 \text{ có } c = b + 7 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow a = 7$$

$$b = 1 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 2 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow a = 3$$

Vậy có 10 số thỏa mãn : 770; 581; 392; 266; 455; 644; 833; 707; 518; 329.

Câu 263.(Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

Chứng minh rằng nếu $a + 5b$ chia hết cho 7 với $a; b \in \mathbb{Z}$ thì $10a + b$ cũng chia hết cho 7.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $10a + 50b - 49b$ chia hết cho 7 hay $10a + b$ chia hết cho 7.

Câu 264.(Đề thi HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

2) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.

3) Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

$$1) P = |x - 2012| + |x - 2013|$$

+ Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

+ Nếu $x > 2013$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

+ Nếu $x < 2012$ thì $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

+ Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

2) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$

+ Với $p = 3k + 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

+ Với $p = 3k - 1$

$$\text{suy ra } p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số.

3) Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

+ Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

+ Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

$2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

$2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

$2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

$2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

+ Vậy số cần tìm là $n = 32$.

Câu 265. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lạc 2014-2015)

a) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

c) Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số 1; 0 hoặc -1. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

$$a) M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672(3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3360}{3x + 2} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét } 3x + 2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } 3x + 2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} > 0$$

$$\frac{3360}{3x + 2} \text{ lớn nhất khi } 3x + 2 \text{ nhỏ nhất}$$

Mà x nguyên, $3x + 2$ dương và $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên $3x + 2 = 2$ nên $x = 0$

Khi đó: $\frac{3360}{3x+2} = \frac{3360}{3.0+2} = 1680$ (2)

So sánh (1) và (2) thì $\frac{3360}{3x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1680

Vậy $M_{\min} = -1008 \Leftrightarrow x = 0$

b) Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^p + p^2 \equiv 3 \pmod{3}$.

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

c) Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng.

Mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số 1; 0 hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5. Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là -5; -4; ...; 0; 1; ...; 5.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau (đpcm).

Câu 266.(Đề thi HSG 7 Huyện Quế Sơn 2012-2013)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $|x - 2012| + |2013 - y| = 1$

Lời giải

a) $|x - 2012|, |2013 - y|$ là các số tự nhiên. Tổng của chúng bằng 1 nên:

Trường hợp 1: $|x - 2012| = 0$ và $|2013 - y| = 1$

Giải được: $(x; y) = (2012; 2012)$ và $(x; y) = (2012; 2014)$

Trường hợp 2: $|x - 2012| = 1$ và $|2013 - y| = 0$

Giải được: $(x; y) = (2013; 2013)$ và $(x; y) = (2011; 2013)$

Vậy: $(2012; 2012); (2012; 2014); (2013; 2013); (2011; 2013)$ là các cặp số nguyên cần tìm.

Câu 267.(Đề thi HSG 7 Cấp Trường 2018-2019)

1) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có

$4^{n+3} + 4^{n+2} - 5^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

2) Cho $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên ?

Lời giải

Câu 1 : Với mọi n nguyên dương, ta có $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n = 4^n.(4^3 + 4^2 - 4 - 1)$

$$= 4^n.(64 + 16 - 4 - 1) = 4^n.75$$

$$= 4^{n-1}.4.75 = 300.4^{n-1}$$

Mà 300.4^{n-1} chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Câu 2 : Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$

$$\text{Biến đổi } Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2.(12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$$

Ta có $2 \in \mathbb{Z}$; $x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$ nên Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{3}{12-x}$ có giá trị nguyên

Mà $\frac{3}{12-x}$ có giá trị nguyên khi và chỉ khi $12-x \in U(3)$

$$U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

+Nếu $12-x = -3 \Rightarrow x = 15$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12-x = -1 \Rightarrow x = 13$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12-x = 1 \Rightarrow x = 11$ (thỏa mãn điều kiện)

+Nếu $12-x = 3 \Rightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $x \in \{9; 11; 13; 15\}$.

Câu 268.(Đề thi HSG 7 Cấp Trường 2018-2019)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $H = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |xy - 24|$

Lời giải

$$\text{Ta có } H = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |xy - 24|$$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (2y - 3x)^2 - |xy - 24| = (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (3x - 2y)^2 - |xy - 24|$$

$$= -3 \cdot (3x - 2y)^2 - |xy - 24| = - \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |xy - 24| \right]$$

Ta có $3 \cdot (3x - 2y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

$|xy - 24| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Do đó $3 \cdot (3x - 2y)^2 + |xy - 24| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Nên $- \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |xy - 24| \right] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Hay $H \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2y = 0$ và $xy - 24 = 0$ (1)

$$+ \text{ Với } 3x - 2y = 0 \text{ thì } 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k. \text{ Khi đó } x = 2k; y = 3k$$

Thay $x = 2k; y = 3k$ vào (1) ta được

$$2k \cdot 3k - 24 = 0$$

$$k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$+ \text{ Với } k = 2 \Rightarrow x = 4; y = 6$$

$$+ \text{ Với } k = -2 \Rightarrow x = -4; y = -6$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức H là 0 khi và chỉ khi $x = 4; y = 6$ hoặc $x = -4; y = -6$.

Câu 269.(Đề thi HSG 7 Huyện Hoài Nhơn 2014-2015)

1) Tìm hai số x và y sao cho $x + y = xy = x : y (y \neq 0)$

2) Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$.

Lời giải

$$1) \text{ Từ } x+y=xy \Rightarrow x = xy-y=y(x-1) \Rightarrow x:y=x-1$$

$$\text{Ta lại có } x:y=x+y \Rightarrow x:y=x+y \Rightarrow x+y=x-1 \Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow x=xy-y=-x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}. \text{ Vậy hai số cần tìm là } x=\frac{1}{2}, y=-1.$$

$$2) \text{ Từ } a^2+a-p=0 \Rightarrow p=a^2+a=a(a+1)$$

$$\text{Với } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p=a(a+1):2; p \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow p=2$$

$$\Rightarrow a(a+1)=2=1.2=(-1).(-2) \Rightarrow a=1; \text{ hoặc } a=-2.$$

$$3) \text{ Ta có: } |x-2|+|3x-4|=|2-x|+|3x-4| \geq |2-x+3x-4|=|2x-2|$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow (2-x)(3x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$$|2x-3|+|2x-2|=|3-2x|+|2x-2| \geq |3-2x+2x-2|=|1|=1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow (2x-3)(2x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow A=|x-2|+|2x-3|+|3x-4| \geq 1; \text{ Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } A \text{ là } \min A=1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 270.(Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2018-2019)

$$a) \text{ Cho các số nguyên dương } m, n \text{ và } p \text{ là số nguyên tố thỏa mãn: } \frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}.$$

$$\text{Chứng minh rằng: } p^2 = n+2.$$

$$b) \text{ Tìm các số nguyên } a, b \text{ thỏa mãn: } \frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Theo giả thiết ta có: } \frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p} (*)$$

$$+) \text{ Nếu } m+n:p \text{ thì từ } (*) \text{ suy ra } p:(m-1). \text{ Do } p \text{ là số nguyên tố nên } m-1=1 \text{ hoặc } m-1=p. \\ \text{Từ đó suy ra } m=2 \text{ hoặc } m=p+1.$$

$$\text{Với } m=2 \text{ hoặc } m=p+1 \text{ thay vào } (*) \text{ ta có: } p^2 = n+2$$

$$+) \text{ Nếu } m+n \text{ không chia hết cho } p. \text{ Từ } (*) \Rightarrow (m+n)(m-1) = p^2$$

$$\text{Do } p \text{ là số nguyên tố và } m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m-1 = p^2 \text{ và } m+n=1$$

$$\Leftrightarrow m=p^2+1 \text{ và } n=-p^2 < 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } p^2 = n+2$$

$$b) \text{ Ta có: } \frac{a}{3} - \frac{4}{b} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{a}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow \frac{5a-3}{15} = \frac{4}{b} \Leftrightarrow (5a-3)b = 60.$$

$$\text{Suy ra: } 5a-3 \in U(60) = \{\pm 60, \pm 30, \pm 20, \pm 15, \pm 12, \pm 10, \pm 6, \pm 4, \pm 5, \pm 3, \pm 2, \pm 1\} \text{ mà } 5a-3 \text{ chia 5 dư } -3 \text{ hoặc } 2 \text{ nên có:}$$

5a-3	-3	2	12
a	0	1	3

b	-20	15	5
---	-----	----	---

Câu 271. (Đề thi HSG 7 Huyện Tam Dương 2018-2019)

Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi $\forall k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$).

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

Cho $k = 2; 3; \dots; n$ ta có:

$$\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2 \text{ (đpcm)}$$

Câu 272. (Đề thi HSG 7 Huyện Giao Thủy 2016-2017)

Cho các số nguyên dương $a; b; c; d; e$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ chia hết cho 2. Chứng tỏ rằng: $a + b + c + d + e$ là hợp số.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

$$B = a + b + c + d + e$$

$$\text{Xét } A + B = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + (a + b + c + d + e)$$

$$= (a^2 + a) + (b^2 + b) + (c^2 + c) + (d^2 + d) + (e^2 + e)$$

$$A + B = a \cdot (a + 1) + b \cdot (b + 1) + c \cdot (c + 1) + d \cdot (d + 1) + e \cdot (e + 1)$$

Chỉ ra được với n là số nguyên thì tích hai số nguyên liên tiếp $n(n + 1)$ là số chia hết cho 2

Do đó $A + B$ chia hết cho 2

Theo đề bài A chia hết cho 2, suy ra B chia hết cho 2

và lập luận để có $B > 2$. Kết luận B là hợp số.

Câu 273. (Đề thi HSG 7 Huyện Ngọc Lặc 2014-2015)

a/ Chứng minh rằng: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

c/ Tìm x, y thuộc Z biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10(3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

$$\text{b) Vì } |2015 - x| \geq 0 \text{ nên : } A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có : } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra :

$$2014 \leq x \leq 2016 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$.

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$.

$$\text{c) Ta có : } 25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4.$$

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra :

$$\text{TH 1 : } (x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015, \text{ khi đó } y = 5 \text{ hoặc } y = -5.$$

$$\text{TH 2 : } (x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$$

Với $x = 2016$ hoặc $x = 2014$ thì $y^2 = 17$ (loại)

Vậy $x = 2015, y = 5$ và $x = 2015, y = -5$.

Câu 274. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 2014-2015)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{1) Ta có : } A &= |2x + 2| + |2x - 2013| = |2x + 2| + |2013 - 2x| \\ &\geq |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (2x + 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$$

Vậy $\text{Max} A = 2015$ khi $x = -1$

2) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Thay vào đầu bài ta có } 1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow y(1 - z) - 1(1 - z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$\text{TH1: } y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ và } z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{TH2: } y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3 \text{ và } z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Câu 275. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 2014-2015)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên ta suy ra

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Tương tự ta có $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$

Do đó $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$

Mặt khác $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Câu 276. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2014-2015)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{8-x}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Biến đổi $B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$

B đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất

Xét $x > 3$ và $x < 3$, ta được $\frac{5}{x-3}$ có giá trị nhỏ nhất bằng -5 tại $x = 2$

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của B bằng -6 tại $x = 2$

Câu 277. (Đề thi HSG 7 huyện Xuân Dương 2013-2014)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15-x}{5-x}$

Lời giải

$M = \frac{15-x}{5-x} = 1 + \frac{10}{5-x}$. M lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất

+) $x > 5$ thì $\frac{10}{5-x} < 0 \quad (1)$

+) $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$ mà $\frac{10}{5-x}$ có tử không đổi nên phương trình có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất. $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5-x=1 \Rightarrow x=4$

Khi đó $\frac{10}{5-x} = 10 \quad (2)$

So sánh (1) và (2) thấy $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy GTLN của M = 11 khi và chỉ khi x = 4

Câu 278. (Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2012-2013)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = xyz$

Lời giải

Vì x, y, z nguyên nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

Theo đề bài ta có: $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$

Thay vào $x + y + z = xyz$ ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$$\Rightarrow y(1 - z) - (1 - z) + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \\ z - 1 = 2 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \quad \text{TH2: } \begin{cases} y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3 \\ z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1; 2; 3); (1; 3; 2)$

Câu 279. (Đề thi HSG 7 huyện Việt Yên 2012-2013)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$ (1)

Tương tự: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$ (2) ; $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$ (3)

Do đó:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) } \Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Câu 280. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Oai năm 2014-2015)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$

Lời giải

Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y - x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y

$$\text{Suy ra } A \text{ nhỏ nhất} = 3 \text{ khi } \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ |y - x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 281. (Đề thi HSG 7 huyện Hạ Hòa 2010- 2011)

Chứng minh rằng: $M = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ có tận cùng là 0 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^n \cdot (2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 5 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M:10(n \in N^*)$$

Vậy với $n \in N^*$ ta có M luôn tận cùng là 0

Câu 282. (Đề thi HSG 7 huyện Hạ Hòa 2010- 2011)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + (y + 20)^{10} + 2010$

Lời giải

Ta có: $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 \geq 0; (y + 20)^{10} \geq 0$ với mọi x, y nên $A \geq 2010$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{2}{5}; y = -20$

Vậy GTNN của A là $A_{\min} = 2010$ khi $x = \frac{2}{5}; y = -20$

Câu 283. (Đề thi HSG 7 Cấp Trường năm 2014-2015)

Cho $M = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta thấy $M = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow \frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$. Vậy $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất hay

$$x-15 = -1 \Leftrightarrow x = 14$$

Vậy $x = 14$ thì M nhỏ nhất và $M = -28$

Câu 284. (Đề thi HSG 7 Cấp Trường năm 2014-2015)

Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17 \ (a, b \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

Ta có: $3a + 2b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$

$$\Rightarrow 10a + b : 17 \Rightarrow 9.(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17$$

$$* 10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Ta có: $10a + b : 17$

$$\Rightarrow 2(10a + b) : 17 \Rightarrow 20a + 2b : 17$$

$$\Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Câu 285. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Lê Quý Đôn năm học 2016-2017)

Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17 \ (a, b \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$*3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

Ta có: $3a + 2b : 17$

$$\Rightarrow 9(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$$

$$\Rightarrow (10a + b) : 17$$

$$*10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Ta có: $10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17$

$$20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Câu 286. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Lê Quý Đôn năm học 2016-2017)

a) Cho $M = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tìm x sao cho: $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

a) Ta thấy $F = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow \frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$. Vậy $\frac{27}{x-15}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất hay $x-15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Vậy $F_{\min} = -28 \Leftrightarrow x = 14$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = \frac{1}{17}$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{16}{289} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-4} \Rightarrow x = 4$$

Câu 287. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016-2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có:

$$(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

$$\min_{g(x)} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 288. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016-2017)

Tìm số chia và số dư biết rằng số bị chia bằng 112 và thương bằng 5

Lời giải

Gọi số chia là a và số dư là r ($a, r \in \mathbb{N}^*; a > r$)

Ta có: $112 = 5a + r \Rightarrow 5a < 112 \Rightarrow a \leq 22$ (1)

Lại có: $a > r \Rightarrow 5a + r < 5a + a \Rightarrow 112 < 6a \Rightarrow a \geq 19$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = 19; 20; 21; 22$

Lập bảng số

a	19	20	21	22
$r = 112 - 5a$	17	12	7	2

Câu 289. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Phú Thiện năm học 2015-2016)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11

Lời giải

$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = 91 \cdot 11 \cdot \overline{abc} : 11$. Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 290. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Đức Thọ năm học 2015-2016)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x + 5| + 5$ b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7}$

Lời giải

a) Ta có: $|x + 5| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow A \geq 5$. Vậy $\text{Min} A = 5 \Leftrightarrow x = -5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{x^2 + 7 + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}$

Ta có: $x^2 \geq 0$, Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7$

$\Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\text{Max} B = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$

Câu 291. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Thăng Bình năm học 2018-2019)

a) Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

b) Cho tích $a \cdot b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Lời giải

a) $M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$
 $= 25 \cdot (4 - 1)(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$
 $= 25 \cdot [4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1)] + 25$
 $= 25 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$
 $= 25 \cdot 4^{2018} - 25 + 25$
 $= 25 \cdot 4^{2018} = 25 \cdot 4 \cdot 4^{2017} = 100 \cdot 4^{2017} : 100$

Vậy $M : 10^2$

b) Đặt $a \cdot b = c^2$ (1)

Gọi $(a, c) = d$ nên $a : d, c : d$

Hay $a = m \cdot d$ và $c = n \cdot d$ với $(m, n) = 1$

Thay vào (1) ta được $m \cdot d \cdot b = n^2 \cdot d^2$

$\Rightarrow m \cdot b = n^2 \cdot d \Rightarrow b : n^2$ vì $(a, b) = 1 = (b, d)$

Và $n^2 : b \Rightarrow b = n^2$

Thay vào (1) ta có $a = d^2 \Rightarrow d^2 \mid a$

Câu 292. (Đề thi HSG Toán 7 huyện Thăng Bình năm học 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A, biết:

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Nên $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

Mà $A = 0$ khi và chỉ khi

$$|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$$

$$\text{Có: } |7x - 5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

$$|2z - 3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3}$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 2000$$

$$\text{Từ đó tìm được } \begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

$A \geq 0$, mà $A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Vậy $\text{Min} A = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x, y, z) = (-20; -28; -30)$

Câu 293. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$

Lời giải

Ta có: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$

$$\text{Với mọi số nguyên } x \text{ ta lại có } |x| + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} |x - y| + (x - y) \\ |y - z| + (y - z) \\ |z - x| + (z - x) \end{cases} \text{ là các số chẵn với mọi số nguyên } x, y, z$$

Suy ra $|x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$$

Câu 294. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2.(1+2+2^2+2^3+2^4) + 2^6.(1+2+2^2+2^3+2^4) + \dots + 2^{96}.(1+2+2^2+2^3+2^4)$$

$$D = 2.31 + 2^6.31 + \dots + 2^{96}.31$$

$$D = 31.(2+2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho } 31$$

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 295. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Giao Tân năm học 2016-2017)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9.(2x - 5y)^2 - |xy - 90|$$

$$= -[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90|]$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8.(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$|xy - 90| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

Khi đó $8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $-[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \leq 0$ với mọi x, y

Hãy $P \leq 0$ với mọi x, y

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (2x - 5y)^2 = 0 \\ |xy - 90| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ xy = 90 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k \text{ ta được } x = 5k, y = 2k$$

$$\text{Mà } xy = 90 \text{ nên } 5k.2k = 90 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } k = 3 \Rightarrow x = 15, y = 6$$

$$\text{Nếu } k = -3 \Rightarrow x = -15, y = -6$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15; y = 6 \\ x = -15; y = -6 \end{cases}$$

Câu 296. (Đề thi HSG Toán 7 Trường Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$$

$$= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100})$$

$$= 3^x(3+3^2+3^3+3^4) + 3^{x+4}(3+3^2+3^3+3^4) + \dots + 3^{x+96}(3+3^2+3^3+3^4)$$

$$= 3^x.120 + 3^{x+4}.120 + \dots + 3^{x+96}.120$$

$$= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (đpcm)}$$

Câu 297. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2015-2016)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Lời giải

$$\text{Xét } x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 298. (Đề thi HSG Toán 7 Trường 038 năm học 2016-2017)

Chứng minh rằng $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên

($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

Hay $1 < M < 2$. Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên

Câu 299. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu sơn năm học 2015-2016)

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác

Lời giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Nhận thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b+c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1+1=2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2+1=3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3+2=5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5+3=8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8+5=13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13+8=21$$

(trái với giả thiết)

Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó, trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác

Câu 300. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Triệu Sơn năm học 2015-2016)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x+y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x+y)}{y} = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} = \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}$ và $\frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1-x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}. \text{ Suy ra } y = \frac{b}{a+b}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$

Câu 301. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Vĩnh Lộc năm học 2016-2017)

Chứng minh rằng $\sqrt{10}$ là số vô tỉ

Lời giải

Giả sử $\sqrt{10}$ là số hữu tỷ $\Rightarrow \sqrt{10} = \frac{a}{b}$ (a, b là số tự nhiên, b khác 0; $(a, b) = 1$)

$$\frac{a^2}{b^2} = 10 \Rightarrow a^2 = 10b^2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow a^2 : 4 \Rightarrow 10b^2 : 4 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow b : 2$$

Vậy $(a, b) \neq 1$ nên $\sqrt{10}$ là số vô tỷ.

Câu 302. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Hiền Quan năm học 2015-2016)

a) Tìm số dư khi chia 2^{2011} cho 31

b) Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6.

Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6

Lời giải

a) Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{402} \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow 2^{2011} \equiv 2 \pmod{31}$. Vậy số dư khi chia 2^{2011} cho 31 là 2

b) Vì a nguyên dương nên ta có $4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

Mà $4^a + 2 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 4^a + 2 : 6$

Khi đó ta có $4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2007 - 2010 : 6$

Vậy với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6 thì $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Câu 303. (Đề thi HSG Toán 7 Trường THCS Hiền Quan năm học 2015-2016)

Trên bảng có ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2008, người ta làm như sau: lấy ra hai số bất kỳ và thay vào bằng hiệu của chúng, cứ làm như vậy đến khi còn một số trên bảng thì dừng lại. Hỏi có thể làm để trên bảng chỉ còn lại số 1 được không? Giải thích?

Lời giải

Gọi S là tổng tất cả các số được ghi trên bảng

Ta có $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2008 = \frac{2008 \cdot 2009}{2} = 1004 \cdot 2009$ là một số chẵn. Khi lấy ra hai số a, b và

thay vào bằng hiệu của hai số thì tổng S bớt đi $(a + b) - (a - b) = 2b$ là số chẵn.

Nên tổng mới phải là một số chẵn

Vậy trên bảng không thể còn lại số 1.

Câu 304. (Đề thi HSG Toán 7 Huyện Phú Thiện năm học 2009-2010)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 91 \cdot 11 : 11$

Câu 305. (Đề thi HSG 7 Huyện Phú Thiện 2009 -2010)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có:

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 91 \cdot 11 : 11$$

Câu 306. (Đề thi HSG 7 Trường Võ Thị Sáu 10-11)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi: $B = |x - 2| + |3 - x|$

Lời giải

Ta xét các trường hợp:

+Nếu $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0; 3 - x > 0$

Do đó: $|x - 2| = -(x - 2); |3 - x| = 3 - x \Rightarrow B = -(x - 2) + 3 - x = -2x + 5$

Vì $x < 2 \Rightarrow -x > -2$. Do đó $B = -2x + 5 > (-2) \cdot 2 + 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B$ nhỏ nhất $= 2$

+nếu $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 2 \geq 0; 3 - x \geq 0 \Rightarrow B = x - 2 + 3 - x = 1 \Rightarrow B = 1$

+Nếu $x > 3 \Rightarrow x - 2 > 0; 3 - x < 0 \Rightarrow B = x - 2 - (3 - x) = 2x - 5$

Vì $x > 3 \Rightarrow B = 2x - 5 > 2 \cdot 3 - 5 \Leftrightarrow B > 1 \Rightarrow B = 2$

Từ 3 trường hợp trên ta được $B_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Câu 307. (Đề thi HSG 7 Trường Võ Thị Sáu 10-11)

Chứng minh rằng:

a) $10^6 - 5^7$ chia hết cho 59

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36$ chia hết cho 7

Lời giải

$$a) 10^6 - 5^7 = (2 \cdot 5)^6 - 5^7 = 2^6 \cdot 5^6 - 5^7$$

$$= 5^6 \cdot (2^6 - 5) = 5^6 \cdot 59 : 59$$

$$b) 313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot (1 + 35)$$

$$= 313^5 \cdot 229 - 313^6 - 313^6 \cdot 35$$

$$= 313^5 \cdot (229 - 313) - 313^6 \cdot 35$$

$$= 313^5 \cdot (-14) - 313^6 \cdot 35$$

$$= 7 \cdot (-2 \cdot 313^5 - 313^6 \cdot 5) : 7$$

Câu 308. (Đề thi HSG 7 Huyện Bồ Lý 15-16)

a) Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$. Tìm số nguyên x để A là số nguyên

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{x^2+15}{x^2+3}$

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 4, tức là $\sqrt{x}-3 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Vậy giá trị x cần tìm là: 1; 4; 16; 25; 49

$$b) B = \frac{x^2+15}{x^2+3} = \frac{x^2+3+12}{x^2+3} = 1 + \frac{12}{x^2+3}$$

Ta có: $x^2 \geq 0$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2+3 \geq 3$ (2 vế dương)

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2+3} \leq 1 + 4$$

$$\Rightarrow B \leq 5$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

Vậy $\text{Max} B = 5 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 309. (Đề thi HSG 7 Huyện Kim Thành 18-19)

Chứng minh rằng với n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\ &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10 : 10. \text{ Vậy } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10 \end{aligned}$$

Câu 310. (Đề thi HSG 7 Huyện Kim Thành 18-19)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 2y = 3xy + 3$

Lời giải

Ta có: $x + 2y = 3xy + 3$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 9xy + 9 \Rightarrow (3x - 9xy) + (6y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 3x(1 - 3y) - 3(1 - 3y) = 0 \Leftrightarrow (3x - 3)(1 - 3y) = 0$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3x - 3; 1 - 3y$ là các số nguyên

Mà $(3x - 3) \cdot (1 - 3y) = 0 \Rightarrow 3x - 3; 1 - 3y$ là ước của 0.

Ta lại có $U(0) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\} \Rightarrow 3x - 3; 1 - 3y \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

Bảng giá trị:

$3x-2$	-7	-1	1	7
$1-3y$	-1	-7	7	1
x	-5/3	1/3	1	3
y	2/3	8/3	-2	0
	ktm	ktm	tm	tm

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2); (3; 0)\}$

Câu 311. (Đề thi HSG 7 Huyện Yên Lập 17-18)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x+2| + |2x-2013|$ với x là số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x + y + z = xyz$

Lời giải

1) Ta có:

$$A = |2x+2| + |2x-2013| = |2x+2| + |2013-2x| \\ \geq |2x+2+2013-2x| = 2015$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $\max A = 2015$ khi $x = -1$

2) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có: $1 + y + z = yz \Rightarrow y - yz + 1 + z = 0$

$$\Rightarrow y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\text{Th1: } y-1=1 \Rightarrow y=2 \text{ và } z-1=2 \Rightarrow z=3$$

$$\text{Th2: } y-1=2 \Rightarrow y=3 \text{ và } z-1=1 \Rightarrow z=2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1, 2, 3); (1, 3, 2)$

Câu 312. (Đề thi HSG 7 huyện Lâm Thao 2016-2017)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Đặt $a.b = c^2$ (1)

Gọi $(a, c) = d$ nên $a = d \cdot a'$, $c = d \cdot c'$

Hay $a = m.d$ và $c = n.d$ với $(m, n) = 1$

Thay vào (1) ta được $m.d.b = n^2 \cdot d^2$

$$\Rightarrow m.b = n^2 \cdot d \Rightarrow b = \frac{n^2 \cdot d}{m} \text{ vì } (a, b) = 1 = (b, d)$$

$$\text{Và } n^2 : b \Rightarrow b = n^2$$

Thay vào (1) ta có $a = d^2 \Rightarrow a$ là số chính phương

Câu 313. (Đề thi HSG 7 Trường Cự Khê 2016-2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (x-2)^2 + |y-x| + 3$$

Lời giải

Ta có : $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y-x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y

Suy ra A nhỏ nhất $= 3$ khi $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ |y-x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Câu 314. (Đề thi HSG 7 Trường Thanh Văn 2017-2018)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{2(7x-8)}{2(2x-3)} = \frac{7(2x-3)+5}{2(2x-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{5}{2(2x-3)} \text{ thì } A \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } B \text{ lớn nhất}$$

..... GTLN của $A = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 315. (Đề thi HSG 7 Trường Thanh Văn 2017-2018)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số:

$$A = (5m+n+1)(3m-n+4) \text{ là số chẵn}$$

Lời giải

$$\text{Ta xét hiệu } (5m+n+1) - (3m-n+4) = \dots = 2m+2n-3$$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m+2n-3$ là một số lẻ. Do đó trong hai số $5m+n+1$ và $3m-n+4$ phải có một số chẵn. Suy ra tích của chúng là một số chẵn. Vậy A là số chẵn

Câu 316. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

$$\text{Cho biểu thức: } C = \frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2}$$

a) Chứng tỏ rằng với mọi x , biểu thức C luôn có giá trị là một số dương.

b) Tìm tất cả các số nguyên x , để C có giá trị là một số nguyên

c) Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$\text{a) Ta thấy: } 2(x-1)^2+1 > 0 \text{ và } (x-1)^2+2 > 0 \quad \forall x,$$

Vậy biểu thức C luôn dương.

$$\text{b) } C = \frac{2[(x-1)^2+2]-3}{(x-1)^2+2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2+2}$$

Để C nguyên, ta phải có $(x-1)^2+2$ là ước dương của 3

$$\text{Vì } (x-1)^2+2 \geq 2, \text{ nên } (x-1)^2+2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } C \text{ nhỏ nhất khi } \frac{3}{(x-1)^2+2} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Vì } (x-1)^2+2 \geq 2 \text{ nên } \frac{3}{(x-1)^2+2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2+2} \geq 2 - \frac{3}{2} \text{ hay } C \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 317. (Đề thi HSG 7 huyện Khoái Châu 2014-2015)

Có hay không một tam giác với độ dài ba cạnh là : $\sqrt{26}; \sqrt{17} + 1; 3\sqrt{11}$

Lời giải

$3\sqrt{11} = \sqrt{99}$ là số lớn nhất trong 3 số

Xét tổng: $\sqrt{26} + \sqrt{17} + 1 > \sqrt{25} + \sqrt{16} + 1 = 5 + 4 + 1 = 10 = \sqrt{100} > \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

Đoạn thẳng dài nhất nhỏ hơn tổng độ dài hai đoạn thẳng kia. Vậy tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh nói trên

Câu 318. (Đề thi HSG 7 TRÀ MY 2018-2019)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15-x}{5-x}$

Lời giải

$M = \frac{15-x}{5-x} = 1 + \frac{10}{5-x}$. M lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất

+) $x > 5$ thì $\frac{10}{5-x} < 0$ (1)

+) $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$ mà $\frac{10}{5-x}$ có tử không đổi nên phương trình có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất. $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5-x=1 \Rightarrow x=4$

Khi đó $\frac{10}{5-x} = 10$ (2)

So sánh (1) và (2) thấy $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy GTLN của $M = 11$ khi và chỉ khi $x=4$

Câu 319. (Đề thi HSG 7 Thanh Thùy 2018-2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó $M = \frac{x-14}{4-x}$

$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

Xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x} < 0$; $x > 4$ thì $\frac{-10}{4-x} > 0$

Ta chỉ xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất

$\Rightarrow 4-x=1$ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)

Vậy $x=3$ khi đó $\min M = -11$

Câu 320. (Đề thi HSG 7 BÍCH HÒA 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $A = \frac{|x|+1996}{-1997}$

Lời giải

$A < 0$ với mọi x nên A đạt giá trị lớn nhất khi $|A|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$|A| = \left| \frac{|x| + 1996}{-1997} \right| = \frac{|x| + 1996}{1997}$$

$$|x| \geq 0 \forall x \text{ nên } |x| + 1996 \geq 1996, \text{ vậy } |A| \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{1996}{1997} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Suy ra GTLN của } A = \frac{1996}{-1997} \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 321. (Đề thi HSG 7 MỸ HƯNG 2016-2017)

Tìm số nguyên x để A có giá trị là một số nguyên biết: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} (x \geq 0)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x} - 3$	-4	-2	-1	1	2	4
x	Loại	1	4	16	25	49

$$\text{Vậy } x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$$

Câu 322. (Đề thi HSG 7 MỸ HƯNG 2016-2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

$$\text{Vi: } |x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

$$\text{Mà } |x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2 + |x - 2014| \\ |x - 2014| &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2013)(2015 - x) \geq 0 \\ x - 2014 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 2014$$

Câu 323. (Đề thi HSG 7)

Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $2n - 3 : n + 1$

Lời giải

$$2n - 3 : n + 1 \Leftrightarrow 5 : n + 1 \Rightarrow n + 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

Câu 324. (Đề thi HSG 7 BÍCH HÒA 2017-2018)

Tìm số nguyên a để: $\frac{2a+9}{a+3} + \frac{5a+17}{a+3} - \frac{3a}{a+3}$ là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $\frac{2a+9}{a+3} + \frac{5a+17}{a+3} - \frac{3a}{a+3} = \frac{4a+26}{a+3} = \frac{4a+12+14}{a+3} = \frac{4(a+3)+14}{a+3} = 4 + \frac{14}{a+3}$ là số nguyên.

Khi đó $(a+3)$ là ước của 14 mà $U(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$

Ta có : $a = -2; -4; -1; -5; -10; 11; -17$

Câu 325. (Đề thi HSG 7 huyện Thanh Hà 2016-2017)

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm

Lời giải

a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có 1 thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài).

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm

Xét tích $a_1 a_2 a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$

Xét tích $a_1 a_2 a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm

Câu 326. (Đề thi HSG 7 THCS Hưng Vũ 2018-2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{-4}{(2x-3)^2 + 5}$

Lời giải

C nhỏ nhất $\Leftrightarrow (2x-3)^2 + 5$ lớn nhất

Mà mẫu số $(2x-3)^2 + 5 \geq 5 (\forall x \in \mathbb{Q})$

Vậy $C_{\min} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Câu 327. (Đề thi HSG 7 Đề 075)

So sánh hai số: 3^{30} và 5^{20}

Lời giải

$3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}; 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} < 27^{10} \Rightarrow 3^{30} > 5^{20}$

Câu 328. (Đề thi HSG 7 Huyện Lục Nam 2018-2019)

a) Tìm số nguyên a để $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên

b) Tìm số nguyên x, y sao cho $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1} = \frac{a(a + 1) + 3}{a + 1} = a + \frac{3}{a + 1}$

Vì a là số nguyên nên $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên khi $\frac{3}{a + 1}$ là số nguyên hay $a + 1$ là ước của 3 do

$$\text{đó } (a + 1) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow a \in \{-4; -2; 0; 2\}$$

Vậy với $a \in \{-4; -2; 0; 2\}$ thì $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên

a) Từ $x - 2xy + y = 0 \Rightarrow (1 - 2y)(2x - 1) = -1$

Vì x, y là các số nguyên nên $(1 - 2y)$ và $(2x - 1)$ là các số nguyên, do đó ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ 2x - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số x, y như trên thỏa mãn điều kiện đầu bài

Câu 329. (Đề thi HSG 7 PGD Tân Kỳ 2015-2016)

Tìm các số nguyên x để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$

Lời giải

Biểu thức $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2x - 3 : x - 2$

$$\Leftrightarrow 2(x - 2) + 1 : x - 2 \Leftrightarrow 1 : x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 330. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Kỳ 2015-2016)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n \text{ chia hết cho } 25.$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n &= (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) \\ &= 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8 \end{aligned}$$

Câu 331. (Đề thi HSG 7 Huyện Tân Kỳ 2015-2016)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phải là một số nguyên

$$A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b}$$

Lời giải

$$A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow A > 1$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c} \Rightarrow A < 2$$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 332. (Đề thi HSG 7 THCS Vạn Long – 2018-2019)

a) Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

b) Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

a) Viết được $(x+1)^2 = 42 + 8y^2$

Suy ra $(x+1)^2$ là số chẵn, để có $(x+1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài

b) Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 333. (Đề thi HSG 7 trường Hồng Dương 2017-2018)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 4x - 4x - 16 + 21$$

$$= -(x^2 + 4x) - (4x + 16) + 21$$

$$= -x(x+4) - 4(x+4) + 21$$

$$= -(x+4)(x+4) + 21$$

$$= -(x+4)^2 + 21$$

Do $-(x+4)^2 \leq 0$ với mọi giá trị của x nên $-(x+4)^2 + 21 \leq 21$ với mọi giá trị của x

$$\text{Suy ra: } \text{Max} P = 21 \Leftrightarrow x = -4$$

Vậy với $x = -4$ thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất bằng 21.

Câu 334. (Đề thi HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$ (1)

Chứng minh rằng: $p^2 = n+2$

Lời giải

+) Nếu $m+n: p \Rightarrow p: m-1$

Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2. & (1) \Rightarrow p^2 = n+2 \\ m=p+1. & (1) \Rightarrow p^2 = (m-1) \cdot (m+n) \Rightarrow p^2 = p \cdot (p+1+n) \Rightarrow p+pn=0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

+) Nếu $m+n$ không chia hết cho p , từ (1) suy ra $(m+n) \cdot (m-1) = p^2$

Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra $m+n > m-1$. Suy ra:

$$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m+n=p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = n+2$$

Vậy nếu $m, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$ thì $p^2 = n+2$.

Câu 335. (Đề thi HSG 7 huyện Năm Căn 2017-2018)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a+b$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$$

$$\Rightarrow ab > a+b$$

Câu 336. (Đề thi HSG 7 huyện Năm Căn 2017-2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$$

$$\text{Suy ra } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Câu 337. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Trãi 2018-2019)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số: $A = (5m+n+1)(3m-n+4)$ là số chẵn

Lời giải

$$\text{Ta xét hiệu } (5m+n+1) - (3m-n+4) = \dots = 2m+2n-3$$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m+2n-3$ là một số lẻ. Do đó trong hai số $5m+n+1$ và $3m-n+4$ phải có một số chẵn. Suy ra tích của chúng là một số chẵn.

Vậy $A = (5m+n+1)(3m-n+4)$ là số chẵn

Câu 338. (Đề thi HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017-2018)

1) Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất

2) Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải

$$1) \text{ Ta có: } \frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$$

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất.

Từ đó suy ra $n=2$

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n=2$.

$$2) \text{ Vì } a < b+c \text{ nên } \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2), (3) suy ra: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$$

Câu 339. (Đề thi HSG 7 huyện Bồ Trách 2017-2018)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \quad (\text{vì } a+b+c=1)$$

$$\Rightarrow 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$.

Câu 340. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x-2012| + |x-2013|$ với x là số tự nhiên

Lời giải

$$P = |x-2012| + |x-2013|$$

Nếu $x=2012$ hoặc $x=2013$ thì $P=1$

$$\text{Nếu } x > 2013 \text{ thì } P = |x-2012| + |x-2013| > 1 + |x-2013| > 1$$

$$\text{Nếu } x < 2012 \text{ thì } P = |x-2012| + |x-2013| > |x-2012| + 1 > 1$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x=2012$ hoặc $x=2013$

Câu 341. (Đề thi HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012-2013)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số

2) Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$

Với $p = 3k + 1$

$$\text{Suy ra } p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Với $p = 3k - 1$

$$\text{Suy ra } p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Do đó $p^2 + 2012$ chia hết cho 3, mà $p^2 + 2012 > 3$ nên $p^2 + 2012$ là hợp số.

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số

2) Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196

Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

Với $2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

Với $2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

Với $2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

Với $2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

Vậy số cần tìm là $n = 32$

Câu 342. (Đề thi HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Tìm số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó bằng 14.

Lời giải

Ta có: Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm, $a, b, c \in \mathbb{N}; 0 < a < 9; 0 \leq b, c \leq 9$.

$$\overline{abc} : 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c) : 7$$

$$\Leftrightarrow (98a + 7b + 2a + 3b + c) : 7$$

$$\Leftrightarrow (2a + 3b + c) : 7 \quad (1)$$

Mặt khác theo bài ra: $a + b + c = 14$

$$\Rightarrow (a + b + c) : 7$$

$$\Rightarrow (2a + 2b + 2c) : 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(b - c) : 7 \Rightarrow (b - c) \in \{-7; 0; 7\}$

$$+) b - c = 7 \Rightarrow b = c + 7 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \Rightarrow b = 7; a = 7 \\ c = 1 \Rightarrow b = 8; a = 5 \\ c = 2 \Rightarrow b = 9; a = 3 \end{cases}$$

$$+) b - c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = c = 6; a = 2 \\ b = c = 5 \Rightarrow a = 4 \\ b = c = 4 \Rightarrow a = 6 \\ b = c = 3 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

$$+) b - c = -7 \Rightarrow c = b + 7 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow c = 7; a = 7 \\ b = 1 \Rightarrow c = 8; a = 5 \\ b = 2 \Rightarrow c = 9; a = 3 \end{cases}$$

Vậy có 10 số thỏa mãn : 770; 581; 392; 266; 644; 833; 707; 518; 329

Câu 343. (Đề HSG toán 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên

Lời giải

Chứng minh N là số nguyên ta cần chứng minh: $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng là 0.

Ta có: $2007^{2009} = 2007. \left[(2007^2)^2 \right]^{502} = 2007. \left[(\dots 9)^2 \right]^{502} = 2007. (\dots 1)$ có chữ số tận cùng bằng 7

$2013^{1999} = 2013^3. \left[(2013^2)^2 \right]^{499} = (\dots 7). \left[(\dots 9)^2 \right]^{499} = (\dots 7). (\dots 1)$ có chữ số tận cùng bằng 7

Vậy $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng bằng 0 $\Rightarrow N$ là một số nguyên

Câu 344. (Đề HSG toán 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $a + 4b$ chia hết cho 13

Chứng minh rằng $10a + b$ cũng chia hết cho 13

Lời giải

Ta có: $(a + 4b) : 13 \Rightarrow 10(a + 4b) : 13$

$10.(a + 4b) - (10a + b) = 10a + 40b - 10a - b = 39b : 13$

Do $10(a + 4b) : 13 \Rightarrow (10a + b) : 13$

Câu 345. (Đề HSG toán 7 huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

a) Chứng minh rằng: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

c) Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$

Lời giải

a) Ta có: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n.9 - 2^n.4 + 3^n - 2^n$

$= 3^n.10 - 2^n.5 = 3^n.10 - 2^{n-1}.10 = 10.(3^n - 2^{n-1}) : 10$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n

b) Vì $|2015 - x| \geq 0$ nên $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

Ta có: $|2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra $2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$

c) Ta có: $25 - y^2 \leq 25 \Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 < 4$

Do x nguyên nên $(x - 2015)^2$ là số chính phương. Có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: $(x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$, khi đó $y = 5$ hoặc $y = -5$

TH2: $(x - 2015)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2014 \end{cases}$

Với $x = 2016$ hoặc $x = 2014$ thì $y^2 = 17$ (loại)

Vậy $x = 2015$, $y = 5$ và $x = 2015$, $y = -5$

Câu 346. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

Ta có: $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là một số nguyên $\Rightarrow 3n-1 \vdots (n-1)$

$$\Rightarrow 3(n-1) + 2 \vdots (n-1) \Rightarrow 2 \vdots (n-1) \Rightarrow (n-1) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$\Rightarrow n \in \{0; 2; -1; 3\} \text{ thì } M \text{ nguyên}$$

Câu 347. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$

Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn $\forall x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$

$$\text{Khi đó } |n - 2016| + n - 2016 = 2016$$

$$\text{Nếu } n < 2016, \text{ ta có: } -(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0 = 2016 \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } n \geq 2016, \text{ ta có: } 2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n - 2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } (m, n) = (0, 3024)$$

Câu 348. (Đề thi HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

$$\text{a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$$

b) Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Lời giải

$$\text{a) } P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$$

$$\text{Ta có: } |x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2015 \leq x \leq 2017 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } |x - 2016| \geq 0. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = 2016 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có min } P = 2 \Leftrightarrow x = 2016$$

b) Nhận xét: Bốn số phải cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1

$$\text{Từ đó ta có các số } 1, 7, 13, 19. \text{ Tổng của chúng là } 1 + 7 + 13 + 19 = 40.$$

Câu 349. (Đề HSG huyện Bến Lức năm học 2018 – 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$

Lời giải

$$C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x-2017| \geq 0$ nên $|x-2017|+2019 \geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Câu 350. (Đề HSG huyện Bến Lức năm học 2018 – 2019)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $x - xy + y = 0$

Lời giải

Ta có: $x - xy + y = 0$

$$\Rightarrow x(1-y) + y = 0$$

$$\Rightarrow (1-y) - x(1-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1-y) = 1 = 1.1 = (-1).(-1)$$

$1-x$	1	-1
$1-y$	1	-1
x	0	2
y	0	2

Vậy $(x; y) = \{(0; 0); (2; 2)\}$

Câu 351. (Đề thi HSG 7 trường THCS Nguyễn Khuyến)

Tìm số tự nhiên n . Biết rằng nếu gạch bỏ đi một chữ số của n thì được số mới nhỏ hơn số n là 2012 đơn vị.

Lời giải

Gọi chữ số bị gạch đi là x , và số mới là m . Nếu x không phải là chữ số tận cùng của n thì số m và n có cùng chữ số tận cùng. Do đó $n - m$ tận cùng là 0 $\Rightarrow n - m$ chia hết cho 10 mà 2012 không chia hết cho 10. Vậy x là chữ số tận cùng của n

$$\text{Ta có: } n = \overline{Ax} \Rightarrow \overline{Ax} - A = 2012 \Leftrightarrow 9A + x = 2012 \Rightarrow 2012 - 10 < 9A \leq 2012$$

Mà A là số tự nhiên nên $A = 223 \Rightarrow x = 5$. Vậy $n = 2235$.

Câu 352. (Đề thi HSG 7)

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$$\Rightarrow 1 < M < 2$$

Câu 353. (Đề thi HSG 7 PGD huyện Châu Đốc 2018-2019)

Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Lời giải

Gọi số có 3 chữ số cần tìm là $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}, a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $(a+n)(b-n)(c-n) = n \cdot \overline{abc}$

$$\Rightarrow 100(a+n) + 10(b-n) + (c-n) = n(100a + 10b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$$

$$\Rightarrow 100(n-1)a + 10(n-1)b + (n-1)c = 89n$$

$$\Rightarrow 89n : n-1$$

$$\text{Mà } (89; n-1) = 1 \text{ nên } n : n-1 \Rightarrow n = 2$$

Số có 3 chữ số cần tìm là 178.

Câu 354. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

Lời giải

Ta có : $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x(1-2y) - (1-2y) = 5 \Leftrightarrow (2x-1)(1-2y) = 5$$

Lập bảng:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$1-2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Câu 355. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác

Lời giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Nhận thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b+c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1+1=2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2+1=3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3+2=5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5+3=8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8+5=13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13+8=21$$

(trái với giả thiết)

Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó, trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác

Câu 356. (Đề thi HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017-2018)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x+y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x+y)}{y} = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} \\ &= \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}$ và $\frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1-x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{b}{a+b}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$

Câu 357. (Đề thi HSG 7 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Lời giải

Theo đề bài $\Rightarrow 2008a + 3b + 1$ và $2008^a + 2008a + b$ là hai số lẻ

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a + 2008a$ là số chẵn

Để $2008^a + 2008a + b$ lẻ $\Rightarrow b$ lẻ, nếu b lẻ $\Rightarrow 3b+1$ chẵn, do đó $2008a + 3b + 1$ chẵn (không thỏa mãn), vậy $a = 0$

$$\text{Với } a = 0 \Rightarrow (3b+1)(b+1) = 225$$

$$\text{Vì } b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b+1)(b+1) = 3.75 = 5.45 = 9.25$$

$$3b+1 \text{ không chia hết cho 3 và } 3b+1 > b+1 \Rightarrow \begin{cases} 3b+1=25 \\ b+1=9 \end{cases} \Rightarrow b=8$$

Câu 358. (Đề thi HSG 7 huyện HƯƠNG KHÊ 2017-2018)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow ab \geq 0$, ta có:

$$|x-a| + |x-d| \geq |x-a| + |d-x| \geq |x-a+d-x| = d-a \quad (1)$$

$$|x-b| + |x-c| \geq |x-b| + |c-x| \geq |x-b+c-x| = c-b \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c+d-a-b$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow (x-a)(d-x) \geq 0 \text{ và } (x-b)(c-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq x \leq d \text{ và } b \leq x \leq c.$$

Do đó $\min A = c+d-a-b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Câu 359. (Đề thi HSG 7 huyện HƯƠNG KHÊ 2017-2018)

Tìm chữ số tận cùng của A biết: $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

Lời giải

Chứng minh A chia hết cho 10 suy ra chữ số tận cùng của A là chữ số 0

Câu 360. (Đề thi HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017)

Tìm cặp số nguyên (x, y) biết $x+y = x.y$.

Lời giải

$$x+y = xy \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}.$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y : y-1 \Rightarrow y-1+1 : y-1 \Rightarrow 1 : y-1, \text{ do đó } y-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=2 \\ y=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(0, 0); (2, 2)$.

Câu 361. (Đề thi HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \text{ (vì } a+b+c=1).$$

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$.

Câu 362. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = |x+5| + 5 \quad \text{b) } B = \frac{x^2+17}{x^2+7}$$

Lời giải

Ta có: $|x+5| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow A \geq 5$.

Vậy $\text{Min}A = 5 \Leftrightarrow x = -5$.

$$B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{x^2 + 7 + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}.$$

Ta có: $x^2 \geq 0$, Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7$.

$$\Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Vậy } \text{Max}B = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 363. (Đề thi HSG 7 huyện Dương Thọ 2017 - 2018)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x+1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$.

Câu 364. (Đề thi HSG 7 Khảo sát chất lượng 2016 - 2017)

Cho n lẻ. Chứng minh rằng $n^{2004} + 1$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^{2004} + 1$ là số chính phương với n là số lẻ ta có:

$$n^{2004} + 1 = a^2 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (n^{1002})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - n^{1002})(a + n^{1002}) = 1$$

$$\Rightarrow 1: (a - n^{1002}) \Rightarrow (a + n^{1002}) = 1 \text{ điều này vô lý vì } (a + n^{1002}) > 2 \text{ với } n \text{ là số lẻ.}$$

Vậy $n^{2004} + 1$ không là số chính phương với n là số lẻ.

Câu 365. (Đề thi HSG 7 trường THCS Tôn Đức Thắng 2018 - 2019)

a) Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$.

b) Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

$$\text{a) Viết được } (x+1)^2 = 42 + 8y^2.$$

Suy ra $(x+1)^2$ là số chẵn, để có $(x+1)^2$ chia hết cho 4 nên $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4.

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

$$\text{b) Xét } x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 366. (Đề thi HSG 7 huyện Dương Nam 2017 - 2018)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Lời giải

$$\text{Từ } a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1.$$

Vậy $ab > a + b$.

Câu 367. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có 45 số tự nhiên liên tiếp chia cho 45 ta được các số dư là $0, 1, 2, 3, \dots, 44$

$$\text{Do } 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

Suy ra các số chia cho 45 theo thứ tự dư: $1, 2, 3, \dots, 9$ thì tổng của 9 số này chia hết cho 45

Câu 368. (Đề thi HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

a) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

b) Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

a) Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^p + p^2 \equiv 3 \pmod{3}$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

b) Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số $1; 0$ hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5 . Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; \dots; 0; 1; \dots; 5$

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau (đpcm).

Câu 369. (Đề thi HSG 7 trường THCS Hồng Đà 2015 - 2016)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$

Lời giải

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Ta có: $x^2 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$ (2 vế dương)

$$\Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 1 + 4 \Rightarrow B \leq 5$$

Vậy $\text{Max} B = 5 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 370. (Đề thi HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất

Lời giải

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672 \cdot (3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \frac{3360}{3x + 2} \text{ lớn nhất}$$

$$* \text{ Xét } 3x + 2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} < 0 \quad (1)$$

$$* \text{ Xét } 3x + 2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} > 0$$

$\frac{3360}{3x + 2}$ lớn nhất khi $3x + 2$ nhỏ nhất. Mà x nguyên, $3x + 2$ dương và $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên

$$3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Khi đó } \frac{3360}{3x + 2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thì $\frac{3360}{3x + 2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1680

$$\text{Vậy } M_{\min} = -1008 \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 371. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 153

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}^*, 1000 \leq a \leq 9999$)

$$\text{Ta có: } a : 153 \Rightarrow \begin{cases} a : 5 \\ a : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 5^2 \end{cases} \Rightarrow a : 51^2 \Rightarrow a : 2601$$

$$\Rightarrow a = 51^2 \cdot k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = 2601$$

Câu 372. (Đề thi HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

a) Tìm số dư khi chia 3^{41} cho 11

b) Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$

Lời giải

a) Theo định lý Fermat

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3^{41} = 3 \cdot (3^{10})^4 \equiv 3 \cdot 1^4 = 3 \pmod{11}$$

Suy ra 3^{41} chia cho 11 dư 3

b) Giả sử a^{2007} và b^{2006} đều chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow a : d$ và $b : d$

Mà $(a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$ (vô lý). Vậy $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$

Câu 373. (Đề thi HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x = 3y = 5z$ và $|x - 2y| = 5$

Tìm giá trị lớn nhất của $3x - 2z$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x-2y}{-1}, 3y = 5z$

Nếu $x - 2y = 5 \Rightarrow x = -15, y = -10, z = -6$. Khi đó $3x - 2z = -45 + 12 = -33$

Nếu $x - 2y = -5 \Rightarrow x = 15; y = 10; z = 6$. Khi đó $3x - 2z = 45 - 12 = 33$

Vậy giá trị lớn nhất của $3x - 2z$ là 33

Câu 374. (Đề thi HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x + 5| + 5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7}$

Lời giải

a) $A = |x + 5| + 5$

ta có: $|x + 5| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow A \geq 5$

Vậy $\min A = 5 \Leftrightarrow x = -5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{(x^2 + 7) + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}$

Ta có: $x^2 \geq 0$. dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7$ (2 vế dương)

$\Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\max B = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$

Câu 375. (Đề thi HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \quad \frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \quad \frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

$$\Rightarrow 1 < M < 2$$

Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên.

Câu 376. (Đề thi HSG 7 cấp trường 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x + 1,45| - 3$

Lời giải

$$A = |x + 1,45| - 3$$

$$\text{Vì } |x+1,45| \geq 0 \Rightarrow |x+1,45| - 3 \geq -3$$

$$\text{Vậy } \min A = -3 \Leftrightarrow x+1,45 = 0 \Rightarrow x = -1,45.$$

Câu 377. (Đề HSG 7 – Huyện Sơn Dương 2015-2016)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 378. (Đề thi HSG 7 – Trường Nguyễn Chí – Huyện Đông Sơn 2017 – 2018)

a) Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

b) Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng biểu thức $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ có giá trị nguyên

c) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

a) Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

$$\text{Ta có } (x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 = 12 \cdot xy$$

$$\text{Từ } (x+y) \cdot 35 = (x-y) \cdot 210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$$

thay vào đẳng thức $(x+y) \cdot 35 = 12 \cdot xy$ ta được

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\} \text{ mà } y > 0 \text{ nên } y = 5$$

Với $y = 5$ thì $x = 7$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} &\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t} \\ &\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t} \end{aligned}$$

Nếu $x + y + z + t = 0$ thì $P = -4$

Nếu $x + y + z + t \neq 0$ thì $x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

Vậy P nguyên

c) Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $3c^3 - 15d^3 : 3$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay

$$a \equiv a^3 \pmod{3}$$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3} \Rightarrow a+b+c+d \equiv a^3+b^3+c^3+d^3 \pmod{3}$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ chia hết cho 3

Câu 379. (Đề thi HSG 7 – Cấp Huyện mã T21 - 2019 – 2020)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2013|$ với x là số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x+y+z=xyz$.

Lời giải

1) Ta có: $A = |2x-2| + |2x-2013| = |2x-2| + |2013-2x| \geq |2x-2+2013-2x| = 2011$

Dấu “=” xảy ra khi $(2x-2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

2) Vì x, y, z nguyên dương nên ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$

$$\text{Theo bài ra } 1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x = 1$$

Thay vào đầu bài ta có:

$$1+y+z=yz \Rightarrow y-yz+1+z=0$$

$$y(1-z) - (1-z) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2$$

$$\text{TH1: } y-1=1 \Rightarrow y=2 \text{ và } z-1=2 \Rightarrow z=3$$

$$\text{TH2: } y-1=2 \Rightarrow y=3 \text{ và } z-1=1 \Rightarrow z=2$$

Vậy có hai cặp nghiệm nguyên thỏa mãn $(1,2,3); (1,3,2)$

Câu 380. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

$$M = \frac{3n-1}{n-1} \text{ có giá trị là số nguyên} \Rightarrow 3n-1 : n-1$$

$$\Rightarrow 3(n-1) + 2 : n-1 \Rightarrow 2 : n-1 \Rightarrow n-1 \in U(2) = \{-1; 1; -2; 2\}$$

$$\text{Ta có bảng } \begin{array}{cc|cc} n-1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ n & 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}$$

Thử lại ta có $n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

Câu 381. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m + 2015 = |n-2016| + n - 2016$.

Lời giải

Nhận xét:

$$\text{-Với } x \geq 0 \text{ thì } |x| + x = 2x$$

-Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$.

Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó $|n - 2016| + n - 2016 = 2016$

+ Nếu $n < 2016$, ta có $-(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0 = 2016$ (loại)

+ Nếu $n \geq 2016$, ta có $2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n - 2016 = 1008 \Leftrightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy $(m; n) = (0; 3024)$

Câu 382. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$.

b. Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kì chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kì chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này ?

Lời giải

a. $P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$

Ta có: $|x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2$. Dấu “=” xảy ra khi: $2015 \leq x \leq 2017$ (1)

Lại có: $|x - 2016| \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$

b. Nhận xét : Bốn số phải có cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1.

Từ đó ta có các số 1, 7, 13 và 19. Tổng của chúng là : $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.

Câu 383. (Đề thi HSG 7 – Huyện Sông Lô 2015 – 2016)

Có sáu túi lần lượt chứa 18, 19, 21, 23, 25 và 34 bóng. Một túi chỉ chứa bóng đỏ trong khi năm túi kia chỉ chứa bóng xanh. Bạn Toán lấy ba túi, bạn Học lấy hai túi. Túi còn lại chứa bóng đỏ. Biết lúc này bạn Toán có số bóng xanh gấp đôi số bóng xanh của bạn Học. Tìm số bóng đỏ trong túi còn lại.

Lời giải

Tổng số bóng trong 6 túi là : $18 + 19 + 21 + 23 + 25 + 34 = 140$

Vì số bóng của Toán gấp hai lần số bóng của học nên tổng số bóng của hai bạn là bội của 3. Ta có : 140 chia 3 bằng 46 dư 2. Do đó số bóng đỏ cũng là số chia 3 dư 2.

Trong sáu số đã cho chỉ có 23 chia 3 dư 2, đó chính là số bóng đỏ trong túi còn lại. Từ đó ta tìm được số bóng của Toán là : $18 + 21 = 39$. Số bóng của học là : $19 + 25 + 34 = 78$.

Câu 384. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Lạc 2019 2020)

Tìm các số không âm x, y, z thỏa mãn: $x + 3z = 8$; $x + 2y = 9$ và $x + y + z$ lớn nhất.

Lời giải

Ta có : $x + 3z = 8$; $x + 2y = 9$

Suy ra: $2x + 2y + 3z = 17$

$$\Rightarrow 2(x + y + z) = 17 - z \leq 17 \Rightarrow (x + y + z) \leq \frac{17}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z = 0$ khi đó $x = 8$; $y = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của $(x + y + z)$ là $\frac{17}{2}$

Vậy các số x, y, z cần tìm là $(x, y, z) = (8; \frac{1}{2}; 0)$

Câu 385. (Đề thi HSG 7 – Huyện Ý Yên 2019 2020)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{22-3x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Biến đổi } C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$$

C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau

Với $x > 4 \Rightarrow 4 - x < 0$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$ (1)

Với $x > 4 \Rightarrow 4 - x > 0$. Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$ Suy ra $4 - x \in \mathbb{Z}$

Suy ra $4 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$

$\frac{10}{4-x}$ khi đó có giá trị là 10 (2)

Từ (1) và (2), phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10

Vậy GTLN của C bằng 13 khi và chỉ khi $x = 3$

Câu 386. (Đề thi HSG 7 – Huyện Phú Thiện 2009 – 2010)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + a.10^2 + b.10 + c \\ &= a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1) \\ &= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= (1000 + 1)(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= 1001(a.10^2 + b.10 + c) \\ &= 11.91(a.10^2 + b.10 + c):11\end{aligned}$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 387. (Đề HSG 7 – Huyện Hoài Nhơn 2019 - 2020)

Chứng minh rằng: Số $A = 11n+2 + 122n+1$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } A &= 11n+2 + 122n+1 = 112.11n + 12.(122)n = 121.11n + 12.144n \\ &= (133 - 12).11n + 12.144n = 133.11n - 12.11n + 12.144n\end{aligned}$$

$$= 133.11n + 12.(144n - 11n)$$

Ta thấy: $133.11n \div 133$

$$(144n - 11n) \div (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12.(144n - 11n) \div 133$$

Do đó suy ra: $133.11n + 12.(144n - 11n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11n+2 + 122n+1$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 388. (Đề thi HSG 7 – Huyện Vũ Thư 2015 - 2026)

a) Tìm x biết:
$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

b) Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

c) Tìm các số nguyên dương $x; y; z$ thỏa mãn:

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015 \cdot |x-z| = 2017$$

Lời giải

a) Tìm x biết :
$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

$$\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{3|x-2|+1}$$

$$\Leftrightarrow 6|x-2|+2 = 3|x-2|+6$$

$$\Leftrightarrow 3|x-2| = 4$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{4}{3} \\ x-2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$

b) Gọi kích thước hình chữ nhật cần tìm là x, y (đơn vị độ dài), ($x, y \in \mathbb{N}; x \geq y$)

Ta có diện tích và chu vi hình chữ nhật lần lượt là : $x.y$ và $2(x+y)$

Theo bài ra ta có : $x.y = 2(x+y)$ với ($x, y \in \mathbb{N}; x \geq y$)

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(x-2) = 4$$

Với $x, y \in \mathbb{N}^*$ ta có $(y-2); (x-2) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y-2; x-2 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \text{ nhưng vì } x-2; y-2 > -2 \text{ và } x \geq y$$

Ta có 2 trường hợp sau :

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

Có hai hình chữ nhật thỏa mãn bài toán :

Hình chữ nhật có kích thước 6 và 3; 4 và 4.

c) Chứng minh: $(x-y)^3 - (x-y)$ chia hết cho 2

$$(y-z)^2 - (y-z) \text{ chia hết cho 2}$$

$$|z-x| - (z-x) \text{ chia hết cho 2}$$

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015|x-z|$$

$$= (x-y)^3 - (x-y) + (y-z)^2 - (y-z) + |z-x| - (z-x) + 2014|z-x| \text{ Chia hết cho 2}$$

Mà 2017 không chia hết cho 2 nên không tồn tại các số nguyên dương x; y; z thỏa mãn đề bài

Câu 389. (Đề thi HSG 7 – Huyện Vũ Thư 2015 - 2026)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} \text{ không thể là một số nguyên.}$$

Lời giải

S Có (n-1) số hạng:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n-1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n-1$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S > n-1 - 1 + \frac{1}{n} = n-2 + \frac{1}{n} > n-2$$

Từ (1) và (2) ta có $n-2 < S < n-1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên

Câu 390. (Đề thi HSG 7 – Thị xã Chí Linh 2016 – 2017)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b=c+d=25$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$.

Lời giải

Vì $a+b=c+d=25$ nên $1 \leq a, b, c, d \leq 24$

Nếu cả hai phân số $\frac{c}{b}$ và $\frac{d}{a}$ đều lớn hơn 1 thì $c+d > a+b$. Trái giả thiết.

Vậy có một phân số không vượt quá 1.

Không mất tính tổng quát giả sử $\frac{c}{b} \leq 1$

$$+ \text{ Nếu } d = 24 \text{ thì } c = 1 \Rightarrow M = \frac{1}{b} + \frac{24}{a}$$

$$- \text{ Nếu } a > 1 \text{ thì } \Rightarrow M \leq 1 + \frac{24}{2} = 13 \quad (2)$$

$$- \text{ Nếu } a = 1 \text{ thì } b = 24 \Rightarrow M \leq \frac{1}{24} + \frac{24}{1} = \frac{577}{24} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \text{Max}(M) = \frac{577}{24}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = c = 1$; $b = d = 24$
hoặc $a = c = 24$; $b = d = 1$.

Câu 391. (Đề thi HSG 7 – Huyện Yên Mô 2017 – 2018)

1) Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức $A = \frac{14-x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất? Hãy tìm giá trị lớn của A tại x ?

$$2) \text{ Tìm } x; y; z \text{ biết: } \left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

$$3) \text{ Cho biểu thức } M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t} \text{ với } x, y, z, t \text{ là các số tự nhiên}$$

khác 0. Chứng minh rằng: $M^{10} < 2017$

Lời giải

1.

$$A = 1 + \frac{10}{4-x} \text{ } A \text{ lớn nhất} \Rightarrow \frac{10}{4-x} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét TH } x > 4 \text{ thì } \frac{10}{4-x} < 0$$

$$- \text{ Xét } 4 < x \text{ thì } \frac{10}{4-x} > 0 \rightarrow A \text{ lớn nhất} \rightarrow 4 - x \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Giải với } x = 3 \text{ thì } A = 11$$

2.

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right| = 0 \\ \left| y + \frac{2}{3} \right| = 0 \\ |x^2 + xz| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + \frac{2}{3} = 0 \\ x(x+z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 1/2; y = -2/3; z = -1/2$$

3.

$$+ \text{ Ta có: } \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

+ Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 2017$

Vậy $M^{10} < 2017$

Câu 392. (Đề thi HSG 7 - Huyện Vĩnh Bảo 2017 - 2018)

Tìm x, biết: $|2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| = 2$.

Lời giải

Có $|2018 - x| \geq 0$ và $|2017 - x| + |2019 - x| = |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$

$$\Rightarrow |2017 - x| + |2018 - x| + |2019 - x| \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2017)(2019 - x) \geq 0$ và $2018 - x = 0$, suy ra:

$$2017 \leq x \leq 2019 \text{ và } x = 2018 \Rightarrow x = 2018$$

Vậy $x = 2018$.

Câu 393. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thanh Chương 2019 – 2020)

a) Chứng minh: $5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012}$ chia hết cho 105.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2$ và $p + 4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

$$a. 5^{2014} - 5^{2013} + 5^{2012} = 5^{2011}(5^3 - 5^2 + 5)$$

$$= 5^{2011}(125 - 25 + 5) = 5^{2011}.105 \text{ chia hết cho 105}$$

b. *) Nếu $p = 3k + 1$ ta có: $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ là hợp số (trái gt)

*) Nếu $p = 3k + 2$ ta có $2p + 4 = 2(3k + 2) + 2 = 6(k + 1)$ là hợp số (trái gt)

Vậy $p = 3k$, mặt khác p là số nguyên tố nên $p = 3$

Câu 394. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thanh Chương 2019 – 2020)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015|$.

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |2014 - x| + |x - 2015| = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

Ta có: $|x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$. Dấu “=” xảy ra khi: $2013 \leq x \leq 2015$ (1)

Lại có: $|x - 2014| \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2014$ (2). Từ (1) và (2) Ta có $\min A = 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2014$

Câu 395. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$.

Lời giải

a) ĐK: $x \geq 0$

Ta có $x \geq 0$; $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$ (tmdk)

Vậy $P_{\min} = 0$ tại $x = 0$

b) Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$.

Khi đó $|b - 5| + b - 5 = 8$

+ Nếu $b < 5$, ta có $|b - 5| + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8$ (loại)

+ Nếu $b \geq 5$, ta có $2(b - 5) = 8 \Leftrightarrow b - 5 = 4 \Leftrightarrow b = 9$ (thỏa mãn)

vậy $(a; b) = (0; 9)$

Câu 396. (Đề thi HSG 7 – Huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

+) $0 \leq (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Tương tự: $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$;

$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1)

+) Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $a < b + c$

Nhân cả hai vế với a dương ta được: $a^2 < ab + ac$

Tương tự: $b^2 < ba + bc$; $c^2 < ca + cb$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh