

HSG-HH7-CHỦ ĐỀ 1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia (h.1.1).

2. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau: $AOC = BOD$; $AOD = BOC$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt AOB . Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB vẽ hai tia OM và ON sao cho $AOM = BON$. Chứng minh rằng hai góc AON và BOM là hai góc đối đỉnh.

Giải (h.1.2)

* *Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai góc AON và BOM là hai góc đối đỉnh, ta cần chứng tỏ mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia. Vì đã có hai tia OA , OB đối nhau nên chỉ còn phải chứng tỏ hai tia OM , ON đối nhau bằng cách chứng tỏ MON là góc bẹt.

* *Trình bày lời giải*

Góc AOB là góc bẹt nên hai tia OA , OB đối nhau. Hai góc AOM và BOM kề bù nên $AOM + BOM = 180^\circ$.

Mặt khác $AOM = BON$ (đề bài cho) nên $BON + BOM = 180^\circ$.

Suy ra $MON = 180^\circ$. Vậy hai tia OM , ON đối nhau.

Hai góc AON và BOM có mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia nên chúng là hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng EF và GH cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kề góc bẹt. Biết tổng $EOG + GOF + FOH = 250^\circ$. Tính số đo của bốn góc tạo thành.

Giải (h.1.3)

* *Tìm cách giải*

Để tính được số đo của bốn góc tạo thành, trước tiên cần tính được số đo của một trong bốn góc đó.

* *Trình bày lời giải*

Ta có $EOG + GOF + FOH = 250^\circ$ (đề bài cho), mà $EOG + GOF = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $FOH = 250^\circ - 180^\circ = 70^\circ$.

Ta có $GOF + FOH = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow GOF = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Vậy $EOG = FOH = 70^\circ$ (hai góc đối đỉnh); $HOE = GOF = 110^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

* *Nhận xét:* Sau khi tính được số đo của một góc, ta tính được số đo của ba góc còn lại nhờ vận dụng tính chất của hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 3: Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Xét các góc không có đỉnh trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

Giải (h.1.4)

* *Tìm cách giải*

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Do đó để chứng tỏ tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° , ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

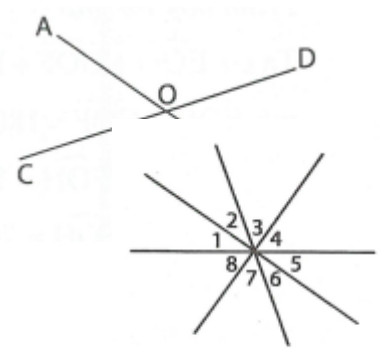
* *Trình bày lời giải*

Bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra 8 góc không có đỉnh trong chung.

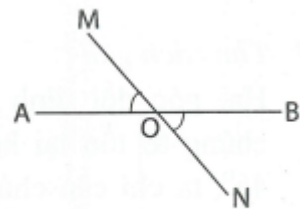
Nếu tất cả các góc này đều lớn hơn 45° thì tổng của chúng lớn hơn $45^\circ \cdot 8 = 360^\circ$. Điều này vô lí, vì tổng của 8 góc này đúng bằng 360° .

Vậy phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° . Góc này và góc đối đỉnh với nó bằng nhau. Do đó tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 45° .

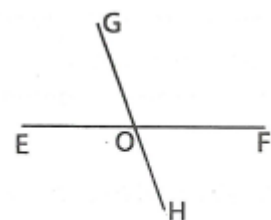
Ví dụ 4: Trong hình 1.5, hai góc AOC và BOD là hai góc đối đỉnh. Hai tia OE , OF là hai tia đối nhau. Cho biết tia OE là tia phân giác của góc AOC , chứng tỏ rằng tia OF là tia phân giác của góc BOD .



Hình 1.4



Hình 1.2



Hình 1.3

Giải (h.1.5)

* *Tìm cách giải*

Ta cần chứng tỏ $O_3 = O_4$. Muốn vậy phải sử dụng tính chất của hai góc đối đỉnh.

* *Trình bày lời giải*

Hai góc AOC và BOD là hai góc đối đỉnh nên các tia OA, OB đối nhau, các tia OC, OD đối nhau. Ngoài ra, hai tia OE, OF cũng đối nhau nên ta có $O_1 = O_3; O_2 = O_4$ (hai góc đối

đỉnh). Vì $O_1 = O_2$ (đề bài cho) nên $O_3 = O_4$. (1)

Mặt khác, tia OF nằm giữa hai tia OB, OD . (2)

nên từ (1) và (2) suy ra tia OF là tia phân giác của góc BOD .

C. Bài tập vận dụng

• *Tính số đo góc*

1.1. Hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O tạo thành bốn góc không kề góc bẹt. Biết $AOC + BOD = 100^\circ$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.

Hướng dẫn giải (h.1.6)

Ta có: $AOC = BOD$ (hai góc đối đỉnh) mà $AOC + BOD = 100^\circ$ nên $AOC = BOD = 100^\circ : 2 = 50^\circ$.

Hai góc AOC và BOC kề bù nên $BOC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Do đó $AOD = BOC = 130^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

1.2. Cho hai đường thẳng MN, PQ cắt nhau tại O tạo thành bốn góc khác góc bẹt. Biết $NOP = \frac{2}{3}MOP$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.

Hướng dẫn giải (h.1.7)

Hai góc NOP và MOP kề bù nên $NOP + MOP = 180^\circ$ mà $NOP = \frac{2}{3}MOP$

nên $NOP = \frac{180^\circ \cdot 2}{2+3} = 72^\circ$; $MOP = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Suy ra $MOQ = NOP = 72^\circ$ (hai góc đối đỉnh); $NOQ = MOP = 108^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

1.3. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O . Vẽ tia OM là tia phân giác của góc AOC . Biết $BOD = a^\circ (0 < a < 180)$. Tìm giá trị của a để $BOM = 155^\circ$.

Hướng dẫn giải (h.1.8)

Ta có $AOC = BOD = a^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên $AOM = MOC = \frac{a^\circ}{2}$.

Hai góc AOM và BOM kề bù nên $AOM + BOM = 180^\circ$ suy ra $BOM = 180^\circ - \frac{a^\circ}{2}$.

Ta có $BOM = 155^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{a^\circ}{2} = 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 180^\circ - 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 25^\circ \Leftrightarrow a^\circ = 50^\circ$.

Vậy $a = 50$.

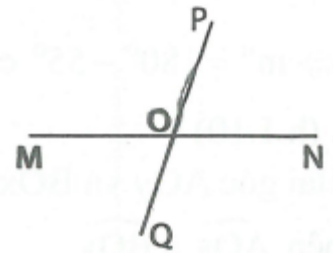
Lưu ý: Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “khi và chỉ khi”.

Khi viết $A \Leftrightarrow B$ ta hiểu từ A suy được ra B và ngược lại, từ B suy được ra A .

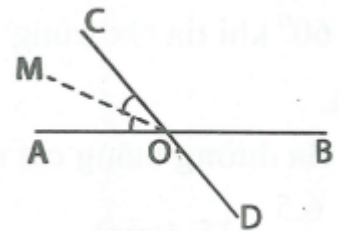
1.4. Cho hai đường thẳng EF, GH cắt nhau tại O . Vẽ tia phân giác OK của góc EOG . Biết $FOK = m^\circ (0 < m < 180)$. Tìm giá trị của m để $FOH = 110^\circ$.

Hướng dẫn giải (h.1.9)

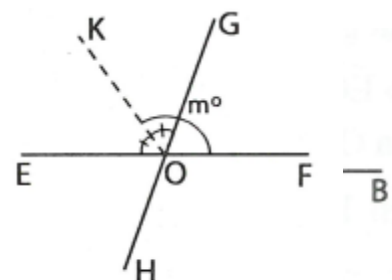
Hai góc EOK và FOK kề bù nên $EOK + FOK = 180^\circ$



Hình 1.7



Hình 1.8



Hình 1.9
Hình 1.6

$$\Rightarrow EOK = 180^\circ - m^\circ.$$

Tia OK là tia phân giác của góc EOG nên $EOG = 2(180^\circ - m^\circ)$.

Vì FOH đối đỉnh với EOG nên $FOH = EOG = 2(180^\circ - m^\circ)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } FOH = 110^\circ &\Leftrightarrow 2(180^\circ - m^\circ) = 110^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - m^\circ = 55^\circ \\ &\Leftrightarrow m^\circ = 180^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow m^\circ = 125^\circ. \text{ Vậy } m = 125. \end{aligned}$$

1.5. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O , $BOC = 60^\circ$. Một tia Ox có thể trùng với tia OB hoặc OC hoặc nằm giữa hai tia này. Vẽ tia Oy là tia đối của tia Ox . Tìm số đo lớn nhất của góc AOy .

Hướng dẫn giải (h.1.10)

Hai góc AOy và BOx là hai góc đối đỉnh nên $AOy = BOx$.

Ta có $BOx \leq BOC$ nên $AOy \leq 60^\circ$; dấu “=” xảy ra khi tia Ox trùng với tia OC .

Vậy số đo lớn nhất của góc AOy là bằng 60° khi tia Ox trùng với tia OC .

1.6. Cho ba đường thẳng AB, CD và MN cắt nhau tại O .

a) Trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

b) Chứng tỏ rằng trong các góc nói trên tồn tại hai góc tù.

Hướng dẫn giải

a) Ba đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 6 tia. Số góc do 6 tia tạo ra là:

$$\frac{6.5}{2} = 15 \text{ (góc)}.$$

b) Xét hai đường thẳng AB và CD trong ba đường thẳng đã cho (h.1.11). Hai đường thẳng này tạo thành bốn góc không có điểm trong chung. Tổng của bốn góc này bằng 360° nên trong bốn góc đó phải tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 90° .

Thật vậy, nếu mỗi góc đó đều nhỏ hơn 90° thì tổng của chúng nhỏ hơn $90^\circ.4 = 360^\circ$; vô lí.

Giả sử góc tồn tại nói trên là góc BOD .

- Nếu $BOD > 90^\circ$ thì $AOC = BOD > 90^\circ$, bài toán đã giải xong.

- Nếu $BOD = 90^\circ$ thì ta xét tiếp đường thẳng thứ ba MN đi qua O (h.1.12).

Giả sử tia ON nằm trong góc BOD . Khi đó góc BON là góc nhọn do đó AON là góc tù (vì BON và AON là hai góc kề bù). Góc AON là góc tù thì góc BOM là góc tù (vì $BOM = AON$).

Vậy luôn tồn tại hai góc tù trong số 15 góc được tạo thành.

• **Chứng tỏ hai tia đối nhau**

1.7. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.13)

Xét hai góc đối đỉnh AOC và BOD . Gọi tia OM là tia phân giác của góc AOC ; tia ON là tia phân giác của góc BOD . Ta phải chứng tỏ hai tia OM, ON đối nhau.

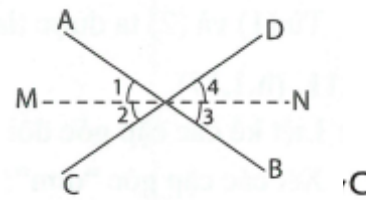
Ta có $AOC = BOD$ (hai góc đối đỉnh) mà $O_1 = O_2; O_3 = O_4$ nên $O_1 = O_3$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Vì $AOB = 180^\circ$ nên $AOD + DOB = 180^\circ$

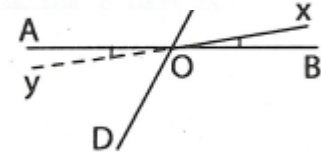
$$\Rightarrow AOD + O_4 + O_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow AOD + O_4 + O_1 = 180^\circ \text{ (vì } O_1 = O_3 \text{)}.$$

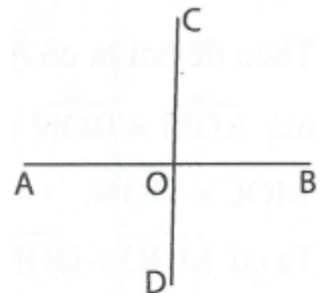
Do đó $MON = 180^\circ$.



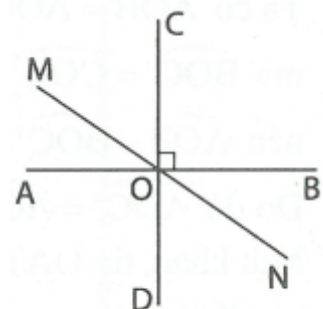
Hình 1.13



Hình 1.10



Hình 1.11



Hình 1.12

Suy ra hai tia OM, ON đối nhau.

1.8. Cho hai đường thẳng AB và MN cắt nhau tại O sao cho $\angle AOM < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa tia OM , vẽ tia OC cho tia OM là tia phân giác của góc $\angle AOC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa tia ON vẽ tia OD sao cho tia ON là tia phân giác của góc $\angle BOD$. Chứng tỏ rằng hai tia OC, OD là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.14)

Theo đề bài ta có $\angle AOM = \angle MOC, \angle BON = \angle DON$ mà $\angle AOM = \angle BON$ (hai góc đối đỉnh) nên $\angle MOC = \angle DON$.

Ta có $\angle MOD + \angle DON = 180^\circ$ (hai góc kề bù), suy ra $\angle MOD + \angle MOC = 180^\circ$.

Hai góc $\angle MOD$ và $\angle MOC$ là hai góc kề, có tổng bằng 180° nên hai tia OC, OD đối nhau.

• **Chứng tỏ một tia là tia phân giác**

1.9. Cho hai góc $\angle AOB$ và $\angle AOC$ là hai góc kề bằng nhau, mỗi góc đều là góc tù. Vẽ tia OB' là tia đối của tia OB , tia OC' là tia đối của tia OC . Chứng tỏ rằng tia OA là tia phân giác của góc $\angle B'OC'$.

Hướng dẫn giải (h.1.15)

Ta có $\angle AOB = \angle AOC$ (đề bài cho) mà $\angle BOC' = \angle COB'$ (hai góc đối đỉnh) nên $\angle AOB - \angle BOC' = \angle AOC - \angle COB'$.

Do đó $\angle AOC' = \angle AOB'$. (1)

Mặt khác, tia OA nằm giữa hai tia OB' và OC' . (2)

Nếu từ (1) và (2) ta được tia OA là tia phân giác của góc $\angle B'OC'$.

1.10. Cho góc bẹt $\angle AOB$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OC và OD sao cho $\angle AOC = \angle BOD = 150^\circ$. Vẽ tia OE là tia đối của tia OD . Chứng tỏ rằng tia OB là tia phân giác của góc $\angle COE$.

Hướng dẫn giải (h.1.16)

Hai góc $\angle AOC$ và $\angle BOC$ kề bù nên $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Tương tự, ta tính được $\angle AOD = 30^\circ$.

Ta có $\angle BOE = \angle AOD = 30^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\angle BOC = \angle BOE = 30^\circ$. (1)

Tia OB nằm giữa hai tia OC và OE . (2)

Từ (1) và (2) ta được tia OB là tia phân giác của góc $\angle COE$.

• **Đếm góc, đếm tia**

1.11. Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Tìm số cặp góc đối đỉnh được tạo thành (không kể góc bẹt).

a) Bằng cách liệt kê;

b) Bằng cách tính toán.

Hướng dẫn giải (h.1.17)

a) Liệt kê các cặp góc đối đỉnh

• Xét các cặp góc “đơn”:

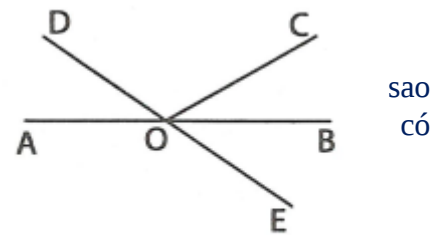
Góc 1 đối đỉnh với góc 5; Góc 2 đối đỉnh với góc 6; Góc 3 đối đỉnh với góc 7; Góc 4 đối đỉnh với góc 8. Có tất cả 4 góc “đơn” đối đỉnh.

• Xét các cặp góc “ghép đôi” (ghép hai góc đơn kề nhau thành một góc “ghép đôi”):

Góc 12 đối đỉnh với góc 56; Góc 23 đối đỉnh với góc 67; Góc 34 đối đỉnh với góc 78; Góc 45 đối đỉnh với góc 81. Có tất cả 4 cặp góc “ghép đôi” đối đỉnh.

• Xét các cặp góc “ghép ba” (ghép ba góc đơn kề nhau thành một góc “ghép ba”):

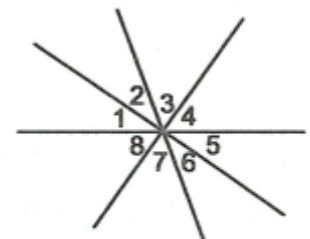
Góc 123 đối đỉnh với góc 567; Góc 234 đối đỉnh với góc 678; Góc 345 đối đỉnh với góc 781; Góc 456 đối đỉnh với góc 812. Có tất cả 4 cặp góc “ghép ba” đối đỉnh.



Hình 1.16

sao
có

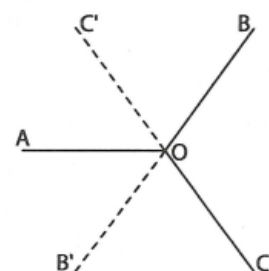
(hai



Hình 1.17



Hình 1.14



Hình 1.15

Vậy tổng cộng có $4 \cdot 3 = 12$ cặp góc đối đỉnh.

b) Xây dựng công thức tính số cặp góc đối đỉnh.

Có 4 đường thẳng cắt nhau tại một điểm nên có: $4 \cdot 2 = 8$ (tia).

Số góc do 8 tia tạo ra là $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (góc).

Không kể góc bẹt thì số góc còn lại là: $28 - 4 = 24$ (góc).

Mỗi góc trong 24 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó nên số cặp góc đối đỉnh được tạo thành là $24 : 2 = 12$ (cặp).

* **Nhận xét:** Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì số cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) được tạo thành là $n(n-1)$.

Thật vậy, số tia do n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra là $2n$ (tia).

Số góc do $2n$ tia tạo ra là: $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Không kể n góc bẹt thì số góc còn lại là: $n(2n-1) - n = 2n^2 - n - n = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$.

Số cặp góc đối đỉnh là: $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

1.12. Cho n đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chúng tạo thành:

a) 20 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt);

b) 90 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt).

Tính giá trị của n trong mỗi trường hợp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n(n-1) = 20$

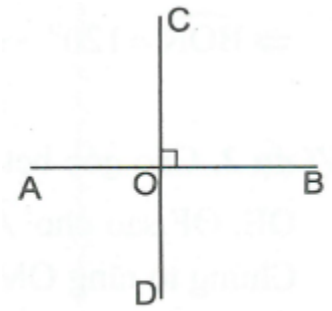
b) Ta có: $n(n-1) = 90$

$n(n-1) = 5 \cdot 4 \Rightarrow n = 5$.

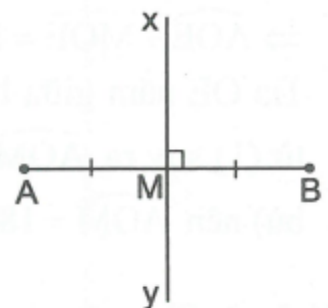
$n(n-1) = 10 \cdot 9 \Rightarrow n = 10$

Vậy $n = 5$.

Vậy $n = 10$.



Hình 2.1



Hình 2.3

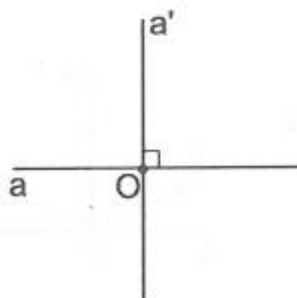
Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

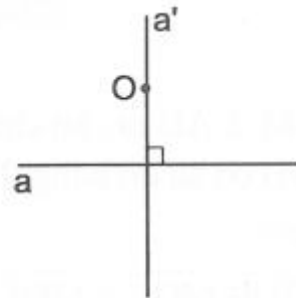
1. Hai đường thẳng AB , CD cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc.

Trong hình 2.1 ta có $AB \perp CD$.

2. Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua O và vuông góc với đường thẳng a cho trước (h.2.2).



Hình 2.2a



Hình 2.2b

3. Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

Trong hình 2.3, đường thẳng xy là đường trung trực của AB .

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt AOB và tia OM sao cho $AOM = 60^\circ$. Vẽ tia ON nằm trong góc BOM sao cho $ON \perp OM$. Chứng tỏ rằng $BON = \frac{1}{2} AOM$.

Giải (h.2.4)

* *Tìm cách giải*

Muốn so sánh hai góc BON và AOM ta cần tính số đo của chúng.

Đã biết số đo của góc AOM nên chỉ cần tính số đo của góc BON .

* *Trình bày lời giải*

Hai góc AOM và BOM kề bù nên $AOM + BOM = 180^\circ$

$\Rightarrow BOM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Vì $OM \perp ON$ nên $MON = 90^\circ$.

Tia ON nằm trong góc BOM nên $BON + MON = BOM$

$\Rightarrow BON = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Vì $30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ$ nên $BON = \frac{1}{2} AOM$.

Ví dụ 2: Cho góc bẹt AOB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OE, OF sao cho $AOE = BOF < 90^\circ$. Vẽ tia phân giác OM của góc EOF . Chứng tỏ rằng $OM \perp AB$.

Giải (h.2.5)

* *Tìm cách giải*

Để chứng tỏ $OM \perp AB$ ta cần chứng tỏ góc AOM (hoặc góc BOM) có số đo bằng 90° .

* *Trình bày lời giải*

Ta có $AOE = BOF; MOE = MOF$ (đề bài cho)

$\Rightarrow AOE + MOE = BOF + MOF$. (1)

Tia OE nằm giữa hai tia OA, OM ; tia OF nằm giữa hai tia OB, OM nên từ (1)

suy ra $AOM = BOM$. Mặt khác, $AOM + BOM = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên

$AOM = 180^\circ : 2 = 90^\circ$, suy ra $OM \perp OA$. Do đó $OM \perp AB$.

Ví dụ 3: Cho góc tù AOB . Vẽ vào trong góc này các tia OM, ON sao cho $OM \perp OA, ON \perp OB$. Vẽ tia OK là tia phân giác của góc MON . Chứng tỏ rằng tia OK cũng là tia phân giác của góc AOB .

Giải (h.2.6)

* *Tìm cách giải*

Muốn chứng tỏ tia OK là tia phân giác của góc AOB ta cần chứng tỏ $AOK = BOK$. Muốn vậy cần chứng tỏ $AON + NOK = BOM + MOK$.

* *Trình bày lời giải*

Ta có $OM \perp OA \Rightarrow AOM = 90^\circ; ON \perp OB \Rightarrow BON = 90^\circ$.

Tia ON nằm giữa hai tia OA, OM nên $AON + NOM = AOM = 90^\circ$;

Tia OM nằm giữa hai tia OB, ON nên $BOM + MON = BON = 90^\circ$.

Suy ra $AON = BOM$ (cùng phụ với MON).

Tia OK là tia phân giác của góc MON nên $NOK = MOK$.

Do đó $AON + NOK = BOM + MOK$. (1)

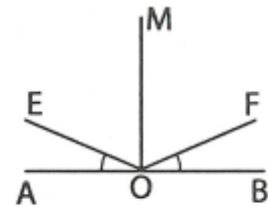
Vì tia ON nằm giữa hai tia OA, OK và tia OM nằm giữa hai tia OB, OK nên từ (1) suy ra $AOK = BOK$. Mặt khác, tia OK nằm giữa hai tia OA, OB nên tia OK cũng là tia phân giác của góc AOB .

C. Bài tập vận dụng

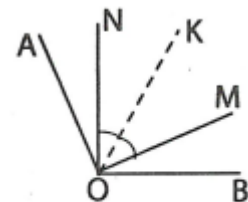
• *Tính số đo góc*

2.1. Cho hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau tại O . Vẽ tia OK là tia phân giác của góc AOC . Tính số đo góc KOD và KOB .

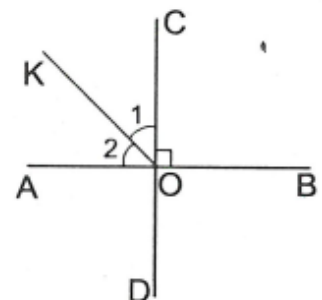
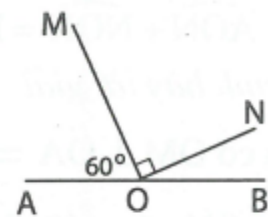
Hướng dẫn giải (h.2.9)



Hình 2.5



Hình 2.6



Hình 2.9

Vì $AB \perp CD$ nên $AOC = 90^\circ$.

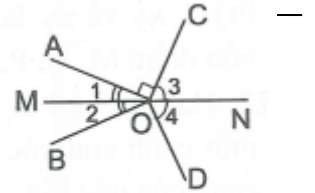
Vì tia OK là tia phân giác của góc AOC nên $O_1 = O_2 = 45^\circ$.

Ta có $KOD + O_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow KOD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

$KOB + O_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow KOB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$



Hình 2.7

2.2. Cho góc AOB và tia OC nằm trong góc đó sao cho $AOC = 4BOC$. Vẽ tia phân giác OM của góc AOC . Tính số đo của góc AOB nếu $OM \perp OB$.

Hướng dẫn giải (h.2.10)

Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên $MOC = \frac{1}{2} AOC$ mà

$$AOC = 4BOC \text{ nên } MOC = 2BOC.$$

Nếu $OM \perp OB$ thì $MOB = 90^\circ$.

$$\text{Ta có } MOC + BOC = 90^\circ \text{ do đó } 2BOC + BOC = 90^\circ \Rightarrow BOC = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } AOC = 4.30^\circ = 120^\circ.$$

2.3. Cho góc tù AOB , $AOB = m^\circ$. Vẽ vào trong góc này các tia OC , OD sao cho $OC \perp OA$; $OD \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $AOD = BOC$.

b) Tìm giá trị của m để $AOD = DOC = COB$.

Hướng dẫn giải (h.2.11)

a) Ta có $OC \perp OA$ nên $AOC = 90^\circ$; $OD \perp OB$ nên $BOD = 90^\circ$.

Tia OD nằm trong góc AOB nên $AOD + BOD = AOB$.

$$\Rightarrow AOD = AOB - BOD = m^\circ - 90^\circ \quad (1)$$

Tia OC nằm trong góc AOB nên $AOC + BOC = AOB$

$$\Rightarrow BOC = AOB - AOC = m^\circ - 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $AOD = BOC (= m^\circ - 90^\circ)$.

b) Tia OC nằm giữa hai tia OB và OD . Suy ra $BOC + DOC = BOD = 90^\circ$.

Nếu $BOC = DOC$ thì $DOC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

$$\text{Do đó } AOD = DOC = COD \Leftrightarrow AOB = 3.DOC = 3.45^\circ = 135^\circ \Leftrightarrow m = 135.$$

• Chứng tỏ hai đường thẳng vuông góc

2.4. Trong hình 2.7 có góc MON là góc bẹt, góc AOC là góc vuông. Các tia OM , ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB và COD . Chứng tỏ rằng $OB \perp OD$.

Hướng dẫn giải (h.2.7)

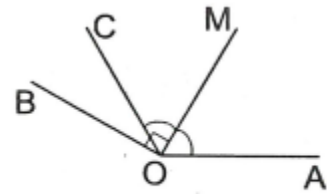
Vì MON là góc bẹt nên $O_1 + O_3 + AOC = 180^\circ \quad (1)$

$$O_2 + O_4 + BOD = 180^\circ \quad (2)$$

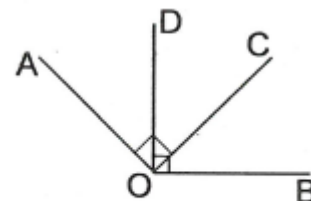
Mặt khác, $O_1 = O_2$; $O_3 = O_4$ (đề bài cho) nên từ (1) và (2) suy ra $AOC = BOD$.

Vì $AOC = 90^\circ$ nên $BOD = 90^\circ \Rightarrow OB \perp OD$.

2.5. Cho góc nhọn AOB . Trên nửa mặt phẳng bờ OA có chứa tia OB , vẽ tia $OC \perp OA$. Trên nửa mặt phẳng bờ OB có chứa tia OA vẽ tia $OD \perp OB$. Gọi OM và ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOD và BOC . Chứng tỏ rằng $OM \perp ON$.



Hình 2.10



Hình 2.11

Hướng dẫn giải (h.2.12)

Ta có $OC \perp OA \Rightarrow AOC = 90^\circ$. $OD \perp OB \Rightarrow BOD = 90^\circ$.

Tia OB nằm giữa hai tia OA , OC .

Do đó $AOB + BOC = 90^\circ$. (1)

Tương tự, ta có $AOB + AOD = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BOC = AOD$ (cùng phụ với AOB).

Tia OM là tia phân giác của góc $AOD \Rightarrow O_1 = O_2 = \frac{AOD}{2}$.

Tia ON là tia phân giác của góc $BOC \Rightarrow O_3 = O_4 = \frac{BOC}{2}$.

Vì $AOD = BOC$ nên $O_1 = O_2 = O_3 = O_4$.

Ta có

$$AOB + BOC = 90^\circ \Rightarrow AOB + O_3 + O_4 = 90^\circ \Rightarrow AOB + O_3 + O_2 = 90^\circ.$$

Do đó $MON = 90^\circ \Rightarrow OM \perp ON$.

2.6. Cho góc bẹt AOB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia OM và ON sao cho $AOM = BON = m^\circ (90 < m < 180)$. Vẽ tia phân giác OC của góc MON .

a) Chứng tỏ rằng $OC \perp AB$.

b) Xác định giá trị của m để $OM \perp ON$.

Hướng dẫn giải (h.2.13)

a) Ta có $AON + BON = 180^\circ$; $BOM + AOM = 180^\circ$ (hai góc kề bù) mà $AOM = BON$ (đề bài cho) nên $AON = BOM$.

Mặt khác, tia OC là tia phân giác của góc MON nên $CON = COM$.

$$\text{Do đó } AON + CON = BOM + COM \quad (1)$$

Ta có tia ON nằm giữa hai tia OA , OC ; tia OM nằm giữa hai tia OB , OC nên từ (1) suy ra $AOC = BOC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Vậy $OC \perp AB$.

b) Tia OM nằm giữa hai tia OB và ON nên $BOM + MON = BON = m^\circ$ (1).

$$\text{Mặt khác } BOM = 180^\circ - AOM = 180^\circ - m^\circ \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } (180^\circ - m^\circ) + 90^\circ = m^\circ \Rightarrow 2m^\circ = 270^\circ \Rightarrow m^\circ = 135^\circ.$$

Vậy $m = 135$.

• Chứng minh một tia là tia phân giác, là tia đối

2.7. Cho góc AOB có số đo bằng 120° . Vẽ tia phân giác OM của góc đó. Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa tia OA , vẽ tia $ON \perp OM$. Trong góc AOB vẽ tia $OC \perp OB$. Chứng tỏ rằng:

a) Tia OC là tia phân giác của góc AOM ;

b) Tia OA là tia phân giác của góc CON .

Hướng dẫn giải (h.2.14)

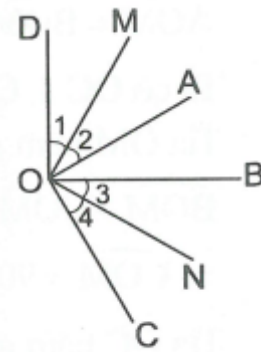
a) Tia OM là tia phân giác của góc AOB nên $AOM = BOM = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Ta có $OC \perp OB \Rightarrow BOC = 90^\circ$.

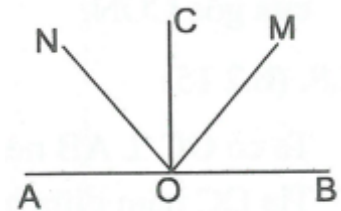
$$\begin{aligned} \text{Tia } OM \text{ nằm giữa hai tia } OB, OC \text{ nên } BOM + COM &= BOC \\ \Rightarrow COM &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tia } OC \text{ nằm giữa hai tia } OA, OB \text{ nên } AOC + BOC &= AOB \\ \Rightarrow AOC &= 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

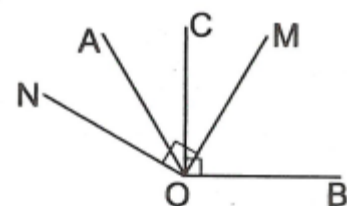
$$\text{Vậy } AOC = COM (= 30^\circ). \quad (1)$$



Hình 2.12



Hình 2.13



Hình 2.14

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OM nên từ (1) suy ra tia OC là tia phân giác của góc AOM .

b) Ta có $OM \perp ON \Rightarrow MON = 90^\circ$.

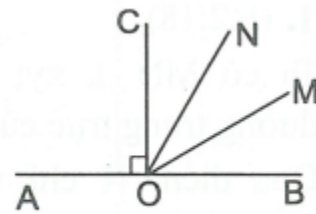
Tia OA nằm giữa hai tia ON, OM nên $AON + AOM = MON$.

Suy ra $AON = MON - AOM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy $AON = AOC (= 30^\circ)$ (2)

Tia OA nằm giữa hai tia ON, OC nên từ (2) suy ra tia OA là tia phân giác của góc CON .

2.8. Cho góc bẹt AOB , tia $OC \perp AB$. Vẽ tia OM và ON ở trong góc sao cho $BOM = CON = \frac{1}{3}BOC$. Tìm trong hình vẽ các tia là tia phân giác của một góc.



Hình 2.15

góc
 BOC
phân

Hướng dẫn giải (h.2.15)

Ta có $OC \perp AB$ nên $AOC = BOC = 90^\circ$ (1)

Tia OC nằm giữa hai tia OA, OB . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia OC là tia phân giác của góc AOB .

Ta có $BOM = CON = \frac{1}{3}BOC = 30^\circ$.

Tia ON nằm trong góc BOC nên $BON + CON = BOC$.

Suy ra $BON = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Tia OM nằm giữa hai tia OB, ON . (3)

Do đó $BOM + MON = BON \Rightarrow MON = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Vậy $BOM = MON = CON = 30^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tia OM là tia phân giác của góc BON .

Tia ON nằm giữa hai tia OM và OC (5)

Từ (4) và (5) suy ra tia ON là tia phân giác của góc COM .

Tóm lại, các tia OC, OM, ON lần lượt là các tia phân giác của các góc AOB, BON và COM .

2.9. Cho hai tia OM và ON vuông góc với nhau, tia OC nằm giữa hai tia đó. Vẽ các tia OA và OB sao cho tia OM là tia phân giác của góc AOC , tia ON là tia phân giác của góc BOC . Chứng tỏ rằng hai tia OA, OB đối nhau.

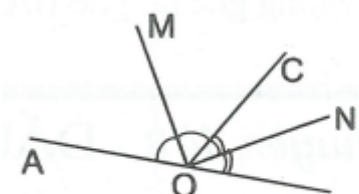
Hướng dẫn giải (h.2.16)

Ta có $OM \perp ON \Rightarrow MON = 90^\circ$.

Tia OM là tia phân giác của góc AOC nên $AOM = MOC$.

Tia ON là tia phân giác của góc BOC nên $BON = NOC$.

Xét tổng



Hình 2.16

$$AOC + BOC = 2MOC + 2NOC = 2(MOC + NOC) = 2MON = 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Hai góc kề AOC và BOC có tổng bằng 180° nên hai tia OA, OB đối nhau.

• Đường trung trực – Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc

2.10. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Lấy các điểm E và F nằm giữa A và B sao cho $AE = BF$. Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng AB và EF cùng có chung một đường trung trực.

Hướng dẫn giải (h.2.17)

• Trường hợp $AE = BF < a$:

Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó $MA = MB = a$.

Điểm E nằm giữa hai điểm A và M , điểm F nằm giữa hai điểm B và M .

Do đó $ME = MA - AE = a - AE$; $MF = MB - BF = a - BF$.

Vì $AE = BF$ nên $ME = MF$. Vậy M là trung điểm chung của hai đoạn thẳng AB và EF . Qua M vẽ $xy \perp AB$ thì xy là đường trung trực chung của AB và EF .

• Trường hợp $AE = BF > a$: Chứng minh tương tự.

2.11. Cho bốn điểm M, N, P, Q nằm ngoài đường thẳng xy . Biết $MN \perp xy$; $PQ \perp xy$ và xy là đường trung trực của đoạn thẳng NP . Chứng tỏ rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải (h.2.18)

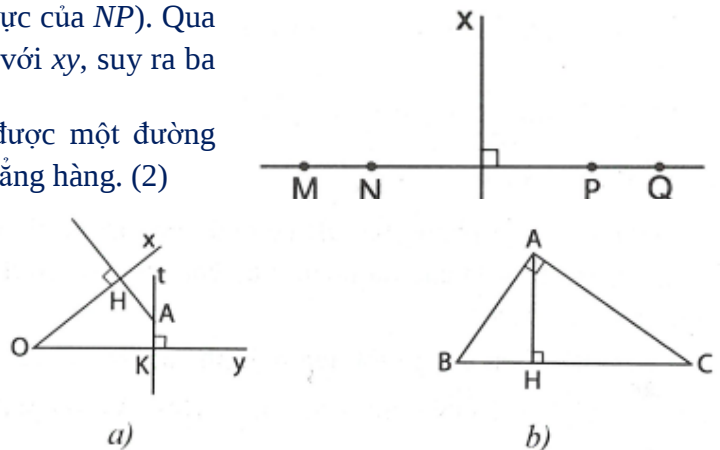
Ta có $MN \perp xy$; $NP \perp xy$ (vì xy là đường trung trực của NP). Qua điểm N chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy , suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng. (1)

Ta có $NP \perp xy$; $PQ \perp xy$. Qua điểm P chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với xy , suy ra ba điểm N, P, Q thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm M, N, P, Q thẳng hàng vì chúng cùng thuộc đường thẳng NP .

2.12. Hai góc gọi là có cạnh tương ứng vuông góc nếu đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng vuông góc với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

Xem hình 2.8 (a, b) rồi kể tên các góc nhọn (hoặc tù) có cạnh tương ứng vuông góc.



Hình 2.8

Hướng dẫn giải

Trên hình 2.8a) có $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc HAK và góc xOy ; góc HAt và góc xOy .

Trên hình 2.8b) có $AB \perp AC$ và $AH \perp BC$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc BAH và góc C ; góc CAH và góc B .

Chuyên đề 3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

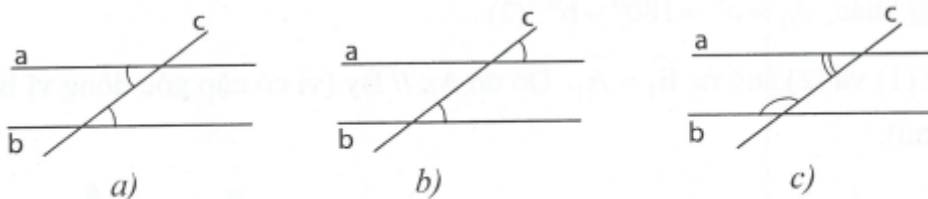
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.
- Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

- Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì $a // b$ (h.3.1.a).
- Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì $a // b$ (h.3.1.b).
- Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì $a // b$ (h.3.1.c).

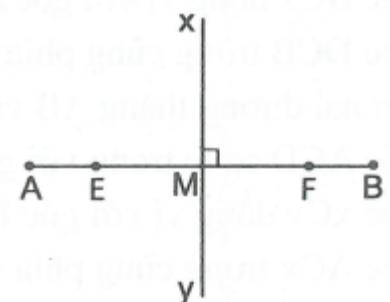


Hình 3.1

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Hình 3.2 có $M_1 = 3M_2$; $N_1 = 3N_2$. Chứng tỏ rằng $a // b$.

Giải



Hình 2.17

*** Tìm cách giải**

Hai đường thẳng a và b tạo với cát tuyến c một cặp góc so le trong là M_1 và N_1 hoặc M_2 và N_2 . Do đó chỉ cần chứng tỏ $M_1 = N_1$ hoặc $M_2 = N_2$.

*** Trình bày lời giải**

Ta có $M_1 + M_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $M_1 = 3M_2$ nên $M_2 = 180^\circ : 4 = 45^\circ$.

Tương tự $N_1 + N_2 = 180^\circ$ và $N_1 = 3N_2 \Rightarrow N_2 = 45^\circ$.

Vậy $M_2 = N_2 (= 45^\circ)$. Suy ra $a // b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 2: Hình 3.3 có: $A_1 = a^\circ$; $B_2 = b^\circ$. Biết $a^\circ + b^\circ = 180^\circ$, chứng tỏ rằng $Ax // By$.

Giải

*** Tìm cách giải**

Hai tia Ax và By tạo với cát tuyến là đường thẳng AB cặp góc A_1 và B_1 ở vị trí đồng vị. Muốn chứng tỏ $Ax // By$, chỉ cần chứng tỏ $A_1 = B_1$.

*** Trình bày lời giải**

Ta có $B_1 + B_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Suy ra $B_1 = 180^\circ - B_2 = 180^\circ - b^\circ$.
(1)

Mặt khác, $A_1 = a^\circ = 180^\circ - b^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B_1 = A_1$. Do đó $Ax // By$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ví dụ 3: Hình 3.4 có $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$. Chứng tỏ rằng $a // b$.

Giải

*** Tìm cách giải**

Các góc A_1 và B_1 hoặc A_2 và B_2 là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng a và b (đối với cát tuyến AB). Muốn chứng tỏ $a // b$ chỉ cần chứng tỏ $A_1 + B_1 = 180^\circ$ (hoặc $A_2 + B_2 = 180^\circ$).

*** Trình bày lời giải**

Ta có $(A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) = 360^\circ$.

Mà $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ (đề bài cho) nên $A_1 + B_1 = 360^\circ : 2 = 180^\circ$.

Suy ra $a // b$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

C. Bài tập vận dụng

• **Xác định các cặp góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía**

3.1. Xem hình 3.5 rồi cho biết góc nào so le trong, đồng vị, trong cùng phía:

- Với góc ADC ;
- Với góc BAC .

Hướng dẫn giải (h.3.5)

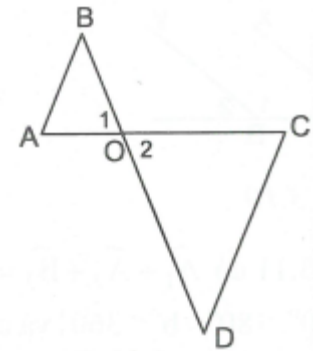
a) Xét hai đường thẳng AD và Bm , đối với cát tuyến Dx thì:

- Góc DCm so le trong với góc ADC ;
- Góc BCx đồng vị với góc ADC ;
- Góc DCB trong cùng phía với góc ADC .

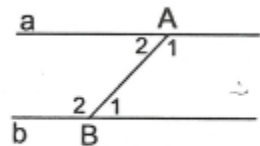
b) Xét hai đường thẳng AB và Dx , đối với cát tuyến Ay thì:

- Góc ACD so le trong với góc BAC ;
- Góc xCy đồng vị với góc BAC ;
- Góc Acx trong cùng phía với góc BAC .

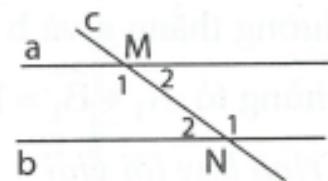
• **Vận dụng cặp góc so le trong**



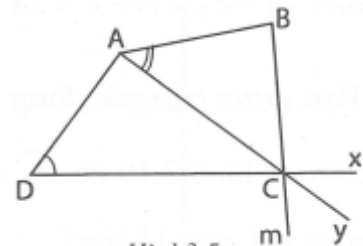
Hình 3.6



Hình 3.4



Hình 3.2



Hình 3.5

3.2. Hình 3.6 có $A = O_1; C = O_2$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$.

Hướng dẫn giải (h.3.6)

• **Tìm cách giải**

Để chứng tỏ $AB // CD$ ta chứng tỏ một cặp góc so le trong bằng nhau. Ta nghĩ đến việc chứng tỏ $A = C$ vì có thể dùng các góc O_1, O_2 làm trung gian.

• **Trình bày lời giải**

Ta có $A = O_1; C = O_2$ (đề bài cho) mà $O_1 = O_2$ (đối đỉnh) nên $A = C$.

Suy ra $AB // CD$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.3. Cho tam giác ABC , $A = 70^\circ, C = 40^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tia Ax sao cho $BAx = 110^\circ$. Chứng tỏ rằng tia $Ax // BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.16)

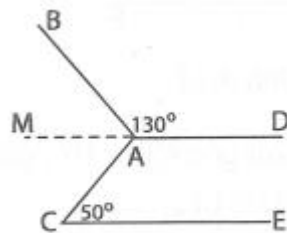
Tia AC nằm giữa hai tia AB và Ax nên $BAC + CAx = BAx$

$$\Rightarrow CAx = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ.$$

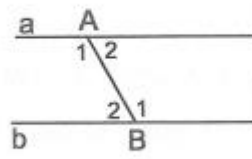
Do đó $CAx = C (= 40^\circ)$.

Suy ra $Ax // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.4. Hình 3.7 có $BAD = 130^\circ, C = 50^\circ$. Vẽ tia AM là tia đối của tia AD . Biết tia AM là tia phân giác của góc BAC . Chứng tỏ rằng $AD // CE$.



Hình 3.7



Hình 3.8

Hướng dẫn giải (h.3.7)

• **Tìm cách giải**

Đề bài có cho hai tia đối nhau nên ta vận dụng tính chất của hai góc kề bù. Ngoài ra đề bài còn có tia phân giác nên trong hình vẽ có hai góc bằng nhau.

• **Trình bày lời giải**

Hai góc MAB và BAD kề bù nên $MAB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Tia AM là tia phân giác của góc BAC nên $MAC = MAB = 50^\circ$.

Do đó $MAC = C (= 50^\circ) \Rightarrow AD // CE$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.5. Hình 3.8 có $A_1 - 2A_2 = B_1 - 2B_2$. Chứng tỏ rằng $a // b$.

Hướng dẫn giải (h.3.8)

$$\text{Ta có } A_1 + A_2 = B_1 + B_2 (= 180^\circ) \Rightarrow 2A_1 + 2A_2 = 2B_1 + 2B_2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A_1 - 2A_2 = B_1 - 2B_2 \quad (2)$$

$$\text{Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) được } 3A_1 = 3B_1 \Rightarrow A_1 = B_1$$

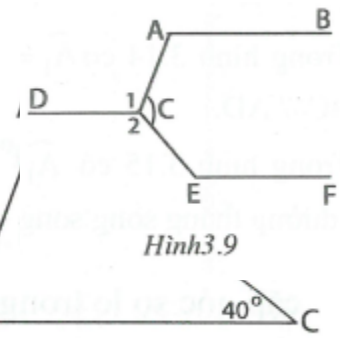
$\Rightarrow a // b$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.6. Trong hình 3.9, góc ACE bằng trung bình cộng của hai góc C_1 và C_2 , đồng thời cũng bằng trung bình cộng của hai góc A và E .

Biết $C_1 - C_2 = A - E = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$ và $CD // EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.9)

• **Tìm cách giải**



Hình 3.9

Hình 3.16

Trong hình vẽ đã có các cặp góc so le trong là A và C_1 ; E và C_2 . Muốn chứng tỏ $AB // CD$ và $CD // EF$ chỉ cần chứng tỏ $A = C_1$ và $E = C_2$.

• *Trình bày lời giải*

$$\text{Ta có } ACE = \frac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow C_1 + C_2 = 2ACE.$$

$$\text{Mặt khác } C_1 + C_2 + ACE = 360^\circ \text{ nên } 2ACE + ACE = 360^\circ \Rightarrow ACE = 120^\circ.$$

$$\text{Do đó } C_1 + C_2 = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \text{ mà } C_1 - C_2 = 20^\circ \text{ nên } C_1 = 130^\circ; C_2 = 110^\circ.$$

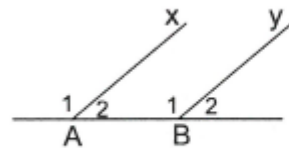
$$\text{Ta có } ACE = \frac{A + E}{2} \Rightarrow A + E = 2ACE = 240^\circ.$$

$$\text{Lại có } A - E = 20^\circ \text{ nên } A = 130^\circ; E = 110^\circ.$$

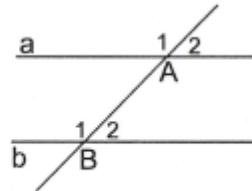
Ta có $A = C_1 (=130^\circ) \Rightarrow AB // CD$; $E = C_2 (=110^\circ) \Rightarrow CD // EF$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• *Vận dụng cặp góc đồng vị*

3.7. Trong hình 3.10 có $A_2 = \frac{2}{7}A_1$; $B_1 - B_2 = 100^\circ$. Hỏi Ax và By có song song với nhau không?



Hình 3.10



Hình 3.11

Hướng dẫn giải (h.3.10)

$$\text{Ta có } A_1 + A_2 = 180^\circ \text{ mà } A_2 = \frac{2}{7}A_1 \text{ nên } A_2 = \frac{180^\circ \cdot 2}{9} = 40^\circ.$$

$$B_1 + B_2 = 180^\circ \text{ mà } B_1 - B_2 = 100^\circ \text{ nên } B_2 = 40^\circ.$$

Vậy $A_2 = B_2 = 40^\circ \Rightarrow Ax // By$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.8. Trong hình 3.11 có $A_1 + A_2 + B_2 = a^\circ$; $B_1 + B_2 + A_1 = b^\circ$, trong đó $180^\circ < a^\circ < 360^\circ$; $180^\circ < b^\circ < 360^\circ$ và $a^\circ + b^\circ = 540^\circ$. Chứng tỏ rằng $a // b$.

Hướng dẫn giải (h.3.11)

$$\text{Ta có } A_1 + A_2 + B_2 = a^\circ \Rightarrow B_2 = a^\circ - 180^\circ \quad (1)$$

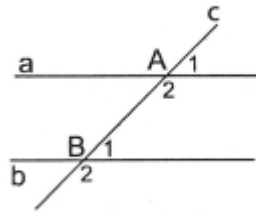
$$B_1 + B_2 + A_1 = b^\circ \Rightarrow A_1 = b^\circ - 180^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } B_2 + A_1 = (a^\circ + b^\circ) - 360^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ.$$

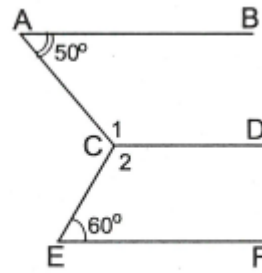
$$\text{Mặt khác } A_2 + A_1 = 180^\circ \text{ (kề bù) nên } B_2 + A_1 = A_2 + A_1 (=180^\circ).$$

Suy ra $B_2 = A_2$. Do đó $a // b$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.9. Hình 3.12 có $A_2 - A_1 = B_2 - B_1$. Chứng tỏ rằng $a // b$.



Hình 3.12



Hình 3.13

Hướng dẫn giải (h.3.12)

• **Tìm cách giải**

Trong hình vẽ đã có những cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía. Từ điều kiện trong đề bài, ta có thể suy ra được tổng của hai góc trong cùng phía bù nhau, từ đó suy ra được hai đường thẳng song song.

• **Trình bày lời giải**

Ta có $A_2 - A_1 = B_2 - B_1$, suy ra $A_2 + B_1 = B_2 + A_1$.

Mặt khác $A_2 + B_1 + B_2 + A_1 = 360^\circ$ nên $A_2 + B_1 = 180^\circ$.

Suy ra $a // b$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.10. Hình 3.13 có $A = 50^\circ, E = 60^\circ$, góc C_1 hơn góc C_2 là 10° , góc C_2 hơn góc ACE là 10° . Chứng tỏ rằng $AB // CD; CD // EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.13)

Đặt $ACE = m^\circ$ thì $C_2 = m^\circ + 10^\circ$ và $C_1 = m^\circ + 20^\circ$.

Ta có $ACE + C_1 + C_2 = 360^\circ$ do đó

$$m^\circ + (m^\circ + 10^\circ) + (m^\circ + 20^\circ) = 360^\circ \Rightarrow 3m^\circ + 30^\circ = 360^\circ \Rightarrow m^\circ = 110^\circ.$$

Vậy $C_2 = 120^\circ; C_1 = 130^\circ$.

Ta có $A + C_1 = 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow AB // CD; E + C_2 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow CD // EF$; vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• **Vận dụng nhiều dấu hiệu song song**

3.11. Trong hình 3.14 có $A_1 = D_1 = 105^\circ; C_1 = 75^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB // CD$ và $BC // AD$.

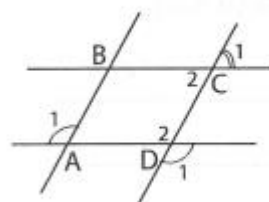
Hướng dẫn giải (h.3.14)

Ta có $D_2 = D_1 = 105^\circ$ (đối đỉnh); $C_2 = C_1 = 75^\circ$ (đối đỉnh).

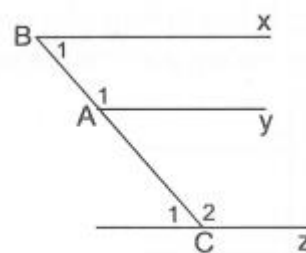
Vậy $A_1 = D_2 (=105^\circ) \Rightarrow AB // CD$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

$C_2 + D_2 = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow BC // AD$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.12. Trong hình 3.15 có $A_1 = 3B_1; A_1 = 3C_1$ và $C_1 = 45^\circ$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.



Hình 3.14



Hình 3.15

Hướng dẫn giải (h.3.15)

• Ta có $B_1 = C_1 = \frac{1}{3}A_1$. Suy ra $Bx // Cz$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• Ta có $B_1 = C_1 = 45^\circ \Rightarrow A_1 = 135^\circ$. Vậy $B_1 + A_1 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$.

Suy ra $Bx // Ay$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• Ta có C_1 và C_2 kề bù $\Rightarrow C_2 = 180^\circ - C_1 = 135^\circ$. Vậy $C_2 = A_1 = 135^\circ$.

$\Rightarrow Ay // Cz$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.13. Cho tam giác ABC , $A = 70^\circ; B = 55^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm

M . Vẽ tia Mx trên nửa mặt phẳng bờ MB không chứa C sao cho $BMx = 55^\circ$.

Vẽ tia Ay là tia phân giác của góc CAM . Chứng tỏ rằng $Mx // BC$ và $Ay // BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.17)

• Ta có $BMx = B = 55^\circ$. Suy ra $Mx // BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• Ta có $CAM + CAB = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$CAM = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Tia Ay là tia phân giác của góc CAM

$\Rightarrow A_1 = A_2 = 55^\circ$, do đó $A_1 = B = 55^\circ$.

Suy ra $Ay // BC$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

Chuyên đề 4. TIỀN ĐỀ Ơ-CLÍT. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tiên đề Ơ-clít: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Trong hình 4.1, đường thẳng m đi qua O và song song với a là duy nhất.

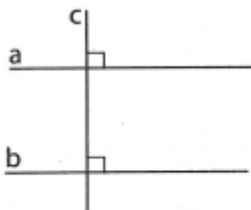
2. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

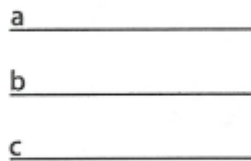
- Hai góc so le trong bằng nhau;
- Hai góc đồng vị bằng nhau;
- Hai góc trong cùng phía bù nhau.

3. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.2);
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.4.3);



Hình 4.2



Hình 4.3

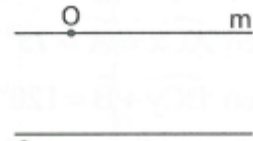
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.3).

B. Một số ví dụ

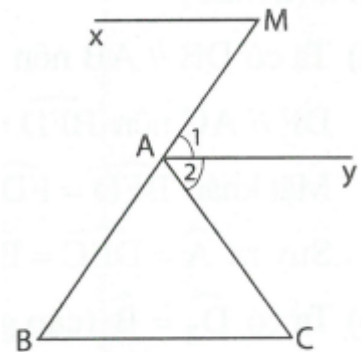
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC , $A = 75^\circ; B = 60^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ các tia Cx và Cy sao cho $ACx = 75^\circ; BCy = 120^\circ$. Chứng tỏ rằng các tia Cx và Cy trùng nhau.

Giải (h.4.4)

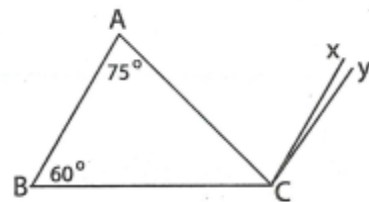
* Tìm cách giải



Hình 4.1



Hình 3.17



Hình 4.4

Để chứng tỏ hai tia Cx và Cy trùng nhau ta chứng tỏ hai đường thẳng chứa hai tia đó trùng nhau, đồng thời hai tia này cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC .

* *Trình bày lời giải*

Ta có $\widehat{ACx} = A = 75^\circ \Rightarrow Cx // AB$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (1)

Ta có $\widehat{BCy} + B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow Cy // AB$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ô-clít, ta có hai đường thẳng Cx và Cy trùng nhau. Mặt khác, hai tia Cx và Cy cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A nên hai tia này trùng nhau.

Ví dụ 2: Hình 4.5 có $a // b$ và $A_1 - B_1 = 30^\circ$. Tính số đo các góc A_2 và B_2 .

Giải

* *Tìm cách giải*

Vì $a // b$ và A_2, B_2 so le trong với các góc A_1, B_1 nên chỉ cần tính A_1, B_1 là có thể suy ra A_2 và B_2 .

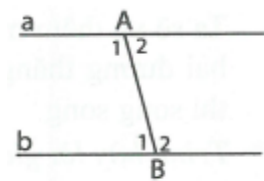
* *Trình bày lời giải*

Ta có $a // b$ nên $A_1 + B_1 = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Mặt khác, $A_1 - B_1 = 30^\circ$ (đề bài) nên $A_1 = (180^\circ + 30^\circ) : 2 = 105^\circ$ và

$B_1 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Suy ra $A_2 = B_1 = 75^\circ$ (cặp góc so le trong); $B_2 = A_1 = 105^\circ$ (cặp góc so le trong).



Hình 4.5

Ví dụ 3: Tính các số đo x, y trong hình 4.6, biết $A_1 = A_2; B_1 = B_2$ và $x = \frac{3}{7}y$.

Giải

* *Tìm cách giải*

Nếu chứng minh được $a // b$ thì sẽ tìm được x và y (đây là bài toán tìm hai số khi biết tổng và tỉ số).

* *Trình bày lời giải*

Ta có $A_1 + A_2 = 180^\circ$ (kề bù) mà $A_1 = A_2$ (đề bài) nên

$A_1 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

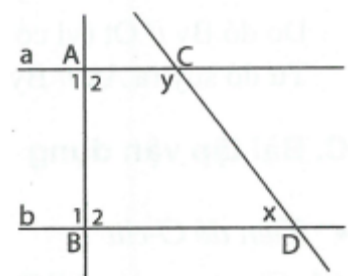
Suy ra $AB \perp a$.

Tương tự $AB \perp b$.

Do đó $a // b$ (cùng vuông góc với AB).

Ta có $x + y = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía) mà $x = \frac{3}{7}y$ nên

$x = \frac{180 \times 3}{10} = 54^\circ; y = 126^\circ$.



Hình 4.6

Ví dụ 4: Hình 4.7 có $A = 30^\circ; B = 70^\circ; AOB = 100^\circ$. Chứng tỏ rằng $Ax // By$.

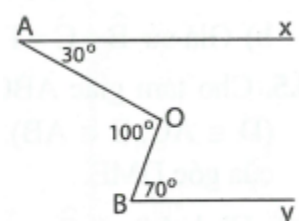
Giải

* *Tìm cách giải*

Ta phải chứng minh hai đường thẳng Ax và By song song. Giữa hai đường thẳng này chưa có một đường thẳng thứ ba cắt chúng nên chưa thể vận dụng dấu hiệu nhận biết nào để chứng minh chúng song song.

Ta sẽ vẽ thêm một đường thẳng thứ ba làm trung gian rồi dùng dấu hiệu: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song.

* *Trình bày lời giải (h.4.8)*



Hình 4.7

Ở trong góc AOB , vẽ tia $Ot // Ax$. Khi đó $AOt = A = 30^\circ$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $BOt = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

Vậy $B = BOt (= 70^\circ)$.

Do đó $By // Ot$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Từ đó suy ra $Ax // By$ (vì cùng song song với Ot).

C. Bài tập vận dụng

• Tiên đề Ô-clít

4.1. Cho tam giác ABC . Vẽ điểm M sao cho góc BAM bằng và so le trong với góc B . Vẽ điểm N sao cho góc CAN bằng và so le trong với góc C . Chứng tỏ rằng ba điểm M, A, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải (h.4.19)

Ta có $BAM = B$ suy ra $AM // BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

$CAN = C$ suy ra $AN // BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Theo tiên đề Ô-clít qua điểm A chỉ có một đường thẳng song song với BC , do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng.

4.2. Qua điểm A ở ngoài đường thẳng a vẽ 101 đường thẳng. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 100 đường thẳng cắt a .

Hướng dẫn giải (h.4.20)

Giả sử trong số 101 đường thẳng vẽ qua A có chưa đến 100 đường thẳng cắt a . Suy ra ít nhất cũng còn hai đường thẳng không cắt a . Hai đường thẳng này cùng đi qua A và cùng song song với a . Điều này vô lý vì nó trái với tiên đề Ô-clít. Vậy điều giả sử là sai, do đó qua A có ít nhất 100 đường thẳng cắt a .

4.3. Cho điểm O ở ngoài đường thẳng xy . Qua O vẽ n đường thẳng. Xác định giá trị nhỏ nhất của n để trong số các đường thẳng đã vẽ, ít nhất cũng có 10 đường thẳng cắt xy .

Hướng dẫn giải

Trong số n đường thẳng đã vẽ, nhiều nhất là có một và chỉ một đường thẳng song song với xy . Do đó muốn có ít nhất 10 đường thẳng cắt xy thì số đường thẳng phải vẽ ít nhất là 11. Vậy $n = 11$.

• Tính chất hai đường thẳng song song

4.4. Cho tam giác ABC . Từ điểm D trên cạnh BC vẽ $DE // AB, DF // AC$ ($E \in AC, F \in AB$).

a) Kể tên những góc ở trong hình vẽ bằng góc A ;

b) Giả sử $B + C = 110^\circ$, tính số đo góc A .

Hướng dẫn giải (h.4.21)

a) Ta có $DE // AB$ nên $DEC = A$ (cặp góc đồng vị); $DF // AC$ nên $BFD = A$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác $BFD = FDE$ (so le trong của $DE // AB$)

Suy ra $A = DEC = BFD = FDE$.

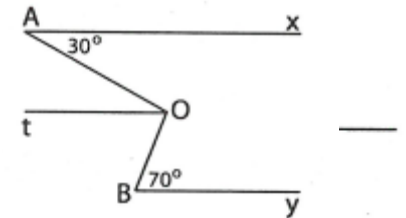
b) Ta có $D_2 = B$ (cặp góc đồng vị của $DE // AB$); $D_1 = C$ (cặp góc so le trong của $DF // AC$);

Do đó $D_1 + D_2 = B + C = 110^\circ$. Suy ra $FDE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

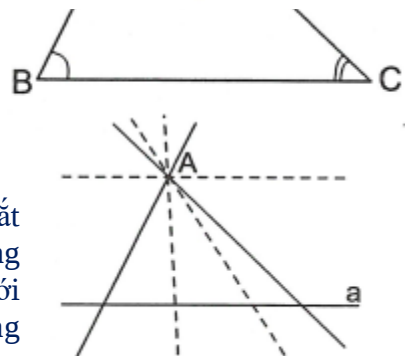
Vậy $A = 70^\circ$ (vì $A = FDE$).

4.5. Cho tam giác ABC . Từ điểm M trên cạnh BC vẽ $MD // AB, ME // AC$ ($D \in AC, E \in AB$). Xác định vị trí của điểm M để tia MA là tia phân giác của góc DME .

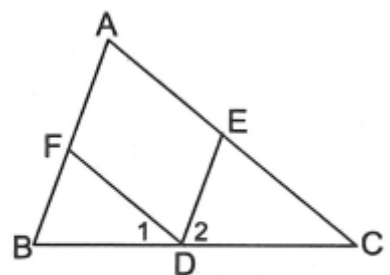
Hướng dẫn giải (h.4.22)



Hình 4.8



Hình 4.20



Hình 4.21

Ta có $MD \parallel AB$ suy ra $A_1 = M_1$ (cặp góc so le trong); $ME \parallel AC$ suy ra $A_2 = M_2$ (cặp góc so le trong).

Tia MA nằm giữa hai tia MD và ME . Do đó tia MA là tia phân giác của góc DME .

$\Leftrightarrow M_1 = M_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \Leftrightarrow M$ là giao điểm của BC với tia phân giác của góc A .

4.6. Hình 4.9 có $C = m^\circ (m < 90)$; $ABC = 180^\circ - 2m^\circ$ và $Bx \parallel AC$. Chứng minh rằng tia Bx là tia phân giác của góc Aby .

Hướng dẫn giải (h.4.9)

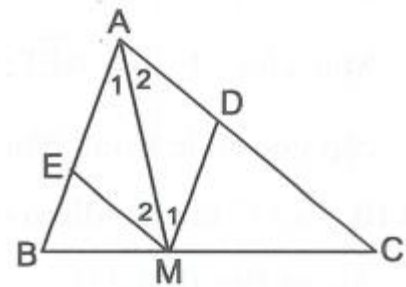
Ta có $ABC = 180^\circ - 2m^\circ$ nên $ABx = 180^\circ - (180^\circ - 2m^\circ) = 2m^\circ$.

Mặt khác $Bx \parallel AC$ nên $xBy = C = m^\circ$ (cặp góc đồng vị); suy ra

$ABx = 2m^\circ - m^\circ = m^\circ$. Vậy $ABx = xBy = m^\circ$. (1)

Tia Bx nằm giữa hai tia BA và By . (2)

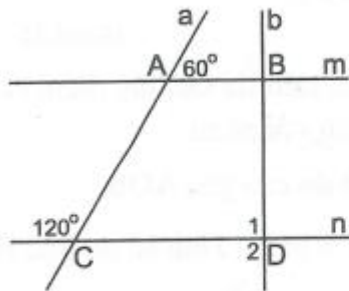
Từ (1) và (2) suy ra tia Bx là tia phân giác của góc ABy .



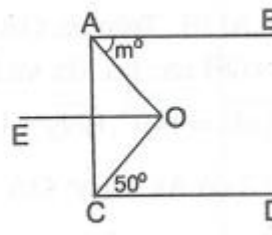
Hình 4.22

• Vận dụng dấu hiệu nhận biết và tính chất của hai đường thẳng song song

4.7. Hình 4.10, ngoài những số đo đã ghi còn biết $D_1 = D_2$. Chứng tỏ rằng $b \perp m$.



Hình 4.10



Hình 4.11

Hướng dẫn giải (h.4.10)

Ta có $ACD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Vậy $ACD = BAa = 60^\circ$.

Suy ra $m \parallel n$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ta có $D_1 + D_2 = 180^\circ$ mà $D_1 = D_2$ nên $D_1 = 90^\circ$.

Suy ra $b \perp n$ do đó $b \perp m$ (vì $m \parallel n$).

4.8. Hình 4.11 có $AB \perp AC, CD \perp AC$ và $OE \perp AC$. Biết $OAB = m^\circ; OCD = 50^\circ$. Tìm giá trị m để tia OE là tia phân giác của góc AOC .

Hướng dẫn giải (h.4.11)

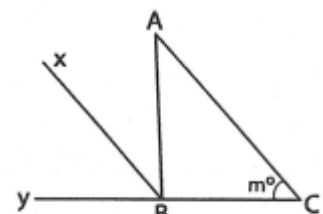
Ta có $AB \perp AC; CD \perp AC; OE \perp AC$ (đề bài).

Suy ra $AB \parallel CD \parallel OE$ (cùng vuông góc với AC).

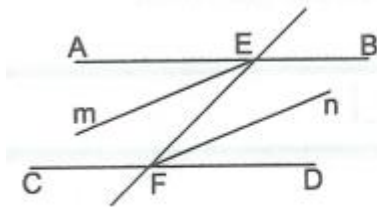
Do đó $AOE = OAB = m^\circ$ (cặp góc so le trong); $EOC = OCD = 50^\circ$ (cặp góc so le trong).

Tia OE nằm giữa hai tia OA và OC nên tia OE là tia phân giác của góc $AOC \Leftrightarrow AOE = EOC \Leftrightarrow m = 50$.

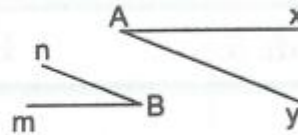
4.9. Hình 4.12 có $AEF = 45^\circ, EFC = 3.AEF$. Các tia Em và Fn lần lượt là các tia phân giác của các góc AEF và EFD . Chứng tỏ rằng $Em \parallel Fn$.



Hình 4.9



Hình 4.12



Hình 4.13

Hướng dẫn giải (h.4.12)

Ta có $\angle AEF + \angle EFC = 45^\circ + 45^\circ \cdot 3 = 180^\circ$.

Suy ra $AB \parallel CD$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $\angle AEF = \angle EFD$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác $\angle E_1 = \frac{1}{2} \angle AEF$; $\angle F_1 = \frac{1}{2} \angle EFD$ nên $\angle E_1 = \angle F_1$, dẫn tới $Em \parallel Fn$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

4.10. Hình 4.13 có $A = B$ và $Ax \parallel Bm$. Chứng tỏ rằng $Ay \parallel Bn$.

Hướng dẫn giải (h.4.23)

Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng Ay và Bm.

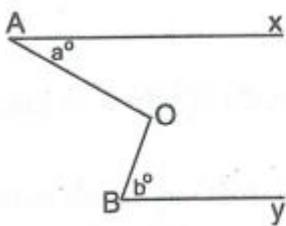
Ta có $Ax \parallel Bm$ nên $A = \angle ACm$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác, $A = \angle mBn$ nên $\angle ACm = \angle mBn (= A)$.

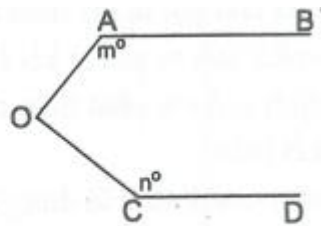
Do đó $Ay \parallel Bn$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

4.11. Hình 4.14 có $A = a^\circ$; $B = b^\circ$ ($a, b < 90$) và $\angle AOB = a^\circ + b^\circ$.

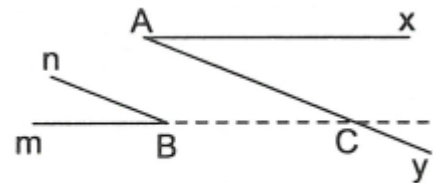
Chứng tỏ rằng $Ax \parallel By$.



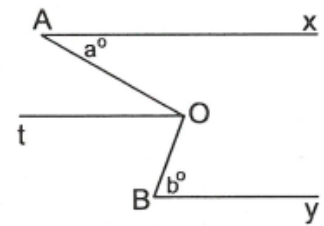
Hình 4.14



Hình 4.15



Hình 4.23



Hình 4.24

Hướng dẫn giải (h.4.24)

Ở trong góc AOB vẽ tia $Ot \parallel Ax$. Khi đó $\angle AOt = A = a^\circ$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $\angle BOt = b^\circ$. Vậy $\angle BOt = B (= b^\circ)$.

Do đó $By \parallel Ot$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Vậy $Ax \parallel By$ (vì cùng song song với Ot).

4.12. Hình 4.15 có $A = m^\circ$; $C = n^\circ$ ($90 < m, n < 180$);

$\angle AOC = 360^\circ - (m^\circ + n^\circ)$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$.

Hướng dẫn giải (h.4.25)

Trong góc AOC vẽ tia Ot sao cho $Ot \parallel AB$.

Khi đó $A + \angle AOt = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

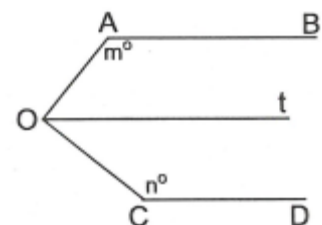
Suy ra $\angle AOt = 180^\circ - m^\circ$.

Do đó $\angle COt = \angle AOC - \angle AOt = 360^\circ - (m^\circ + n^\circ) - (180^\circ - m^\circ) = 180^\circ - n^\circ$

Vậy $C + \angle COt = n^\circ + (180^\circ - n^\circ) = 180^\circ$.

Suy ra $CD \parallel Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $AB \parallel CD$ (vì cùng song song với Ot).



Hình 4.25

4.13. Hình 4.16 có $A=130^\circ, C=140^\circ$ và $OA \perp OB$. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$.

Hướng dẫn giải (h.4.26)

Vì $OA \perp OB$ nên $\angle AOB = 90^\circ$. Trong góc $\angle AOB$ vẽ tia Ot sao cho $Ot \parallel AB$.

Khi đó $\angle A + \angle AOt = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $\angle AOt = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Vì $\angle AOB = 90^\circ$ nên $\angle COt = 40^\circ$.

Ta có $\angle C + \angle COt = 140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$.

Do đó $CD \parallel Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Suy ra $AB \parallel CD$ (vì cùng song song với Ot).

4.14. Cho góc $\angle AOB$. Trên tia OA lấy điểm M , trên tia OB lấy điểm N . Vẽ ra ngoài góc $\angle AOB$ các tia Mx và Ny song song với nhau. Cho biết $\angle AMx = 140^\circ, \angle BNy = 150^\circ$, tính số đo của góc $\angle AOB$.

Hướng dẫn giải (h.4.27)

Vì $\angle AMx = 140^\circ$ nên $M_1 = 40^\circ$.

Vì $\angle BNy = 150^\circ$ nên $N_2 = 30^\circ$.

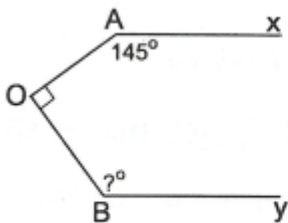
Ở trong góc $\angle AOB$ vẽ tia $Ot \parallel Mx$, khi đó $Ot \parallel Ny$ (vì $Mx \parallel Ny$).

Ta có $O_1 = M_1 = 40^\circ$ (cặp góc so le trong).

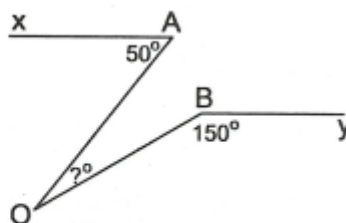
$O_2 = N_2 = 30^\circ$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $\angle AOB = O_1 + O_2 = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.

4.15. Hình 4.17 có $Ax \parallel By, OA \perp OB$ và $A=145^\circ$. Tính số đo góc B .



Hình 4.17



Hình 4.18

Hướng dẫn giải (h.4.28)

Ở trong góc $\angle AOB$ vẽ tia $Ot \parallel Ax$.

Khi đó $Ot \parallel By$ (vì $Ax \parallel By$).

Ta có $OA \perp OB$ nên $\angle AOB = 90^\circ$.

Mặt khác $\angle A + O_1 = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía) nên $O_1 = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.

Suy ra $O_2 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Ta có $O_2 + B = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía của $Ot \parallel By$).

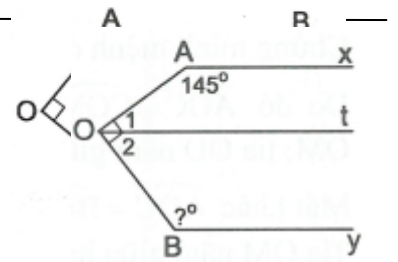
Do đó $B = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

4.16. Trong hình 4.18 có $Ax \parallel By$. Tính số đo của góc $\angle AOB$.

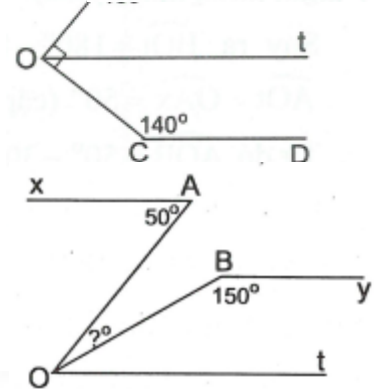
Hướng dẫn giải (h.4.29)

Trên nửa mặt phẳng bờ OB có chứa tia By vẽ tia $Ot \parallel By$. Khi đó $Ot \parallel Ax$ (vì $Ax \parallel By$).

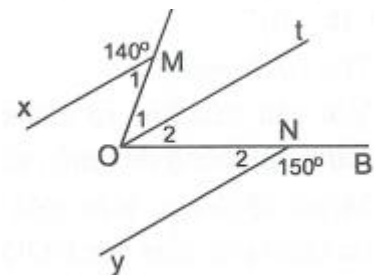
Ta có $\angle OBy + \angle BOt = 180^\circ$ (cặp góc trong cùng phía).



Hình 4.28



Hình 4.29



Hình 4.27

Suy ra $\angle BOt = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Ta có $\angle AOt = \angle OAx = 50^\circ$ (cặp góc so le trong).

Từ đó $\angle AOB = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$.

Chuyên đề 5. ĐỊNH LÝ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lý

- Định lý là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.
- Mỗi định lý đều có hai phần:
 - Phần đã cho gọi là giả thiết của định lý.
 - Phần phải suy ra gọi là kết luận của định lý.

Khi định lý được phát biểu dưới dạng “Nếu A thì B” thì A là giả thiết; B là kết luận.

2. Chứng minh định lý là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

3. Hệ quả là một định lý được suy ra trực tiếp từ một định lý hoặc từ một tính chất được thừa nhận.

4. Định lý thuận, định lý đảo

Xét định lý “Nếu A thì B” có mệnh đề đảo là “Nếu B thì A”. Nếu mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là *định lý đảo* của định lý đã cho và định lý đã cho gọi là *định lý thuận*.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Định lý “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” có định lý đảo không?

Giải

Định lý “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” có mệnh đề đảo là “Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh”. Mệnh đề đảo này sai.

Ví dụ, xét góc $\angle AOB$, tia phân giác OM (h.5.1).

Rõ ràng hai góc $\angle AOM$ và $\angle BOM$ bằng nhau nhưng không đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này không là tia đối một cạnh của góc kia.

Vậy định lý “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” không có định lý đảo.

Nhận xét: Một ví dụ chứng tỏ một mệnh đề nào đó là sai gọi là một *phản ví dụ*.

Như vậy ta đã dùng phương pháp đưa ra một phản ví dụ để chứng tỏ mệnh đề “Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh” là sai.

Ví dụ 2: Chứng minh định lý: “Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù”.

Giải (h.5.2)

GT	$\angle xOy$ và $\angle x'O'y'$ cùng nhọn (tù) $Ox // O'x'; Oy // O'y'$
KL	$\angle xOy = \angle x'O'y'$

* *Tìm cách giải*

Để chứng minh $\angle O = \angle O'$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba. Dựa vào giả thiết có các cặp đường thẳng song song, ta nghĩ đến việc vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song để tìm ra các cặp góc bằng nhau.

* *Trình bày lời giải*

Gọi K là giao điểm của các đường thẳng Ox và $O'y'$.

Vì $O'y' // Oy$ nên $\angle O = \angle xKy'$ (cặp góc đồng vị);

Vì $O'x' // Ox$ nên $\angle O' = \angle xKy'$ (cặp góc đồng vị).

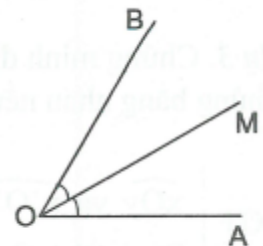
Do đó $\angle O = \angle O'$ (cùng bằng $\angle xKy'$).

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

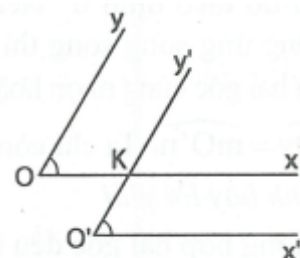
Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;
- Góc này vuông thì góc kia vuông.

Ví dụ 3: Chứng minh định lý: “Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc



Hình 5.1



Hình 5.2

thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù”.

Giải (h.5.3)

GT	xOy và $x'O'y'$ cùng nhọn (tù) $Ox \perp O'x'; Oy \perp O'y'$
KL	$xOy = x'O'y'$

* *Tìm cách giải*

Để chứng minh $xOy = x'O'y'$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba. Để tạo ra góc thứ ba này ta vẽ $O'm // Ox$ và $O'n // Oy$, hai tia này cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ $O'x'$ (h.5.4).

Khi đó theo định lí “Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù” ta được $xOy = mO'n$. Ta chỉ còn phải chứng minh $x'O'y' = mO'n$.

* *Trình bày lời giải*

• Trường hợp hai góc đều nhọn

Vẽ $O'm // Ox$ và $O'n // Oy$. Vì $O'x' \perp Ox$ nên $O'x' \perp O'm$ do đó $mO'x' = 90^\circ$. (1)

Vì $O'y' \perp Oy$ nên $O'y' \perp O'n$ do đó $nO'y' = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $x'O'y' = mO'n$ (cùng phụ với $x'O'n$). (3)

Mặt khác, $xOy = mO'n$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $xOy = x'O'y' (= mO'n)$.

• Trường hợp hai góc đều tù: Chứng minh tương tự.

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;

- Góc này vuông thì góc kia vuông.

C. Bài tập vận dụng

5.1. Cho góc bẹt AOB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các tia OC và OD sao cho $AOC = BOD < 90^\circ$. Vẽ tia OM ở trong góc COD . Chứng minh rằng $OM \perp AB$ khi và chỉ khi OM là tia phân giác của góc COD .

Hướng dẫn giải (h.5.6)

• *Tìm cách giải*

Với cấu trúc *khi và chỉ khi* ta phải chứng minh hai mệnh đề thuận và đảo sau:

- Mệnh đề thuận: Nếu $OM \perp AB$ thì OM là tia phân giác của góc COD .

- Mệnh đề đảo: Nếu OM là tia phân giác của góc COD thì $OM \perp AB$.

• *Trình bày lời giải*

- Chứng minh mệnh đề thuận: $OM \perp AB$ (gt) suy ra $AOM = BOM = 90^\circ$.

Do đó $AOC + COM = BOD + DOM$ (vì tia OC nằm giữa hai tia OA, OM ; tia OD nằm giữa hai tia OB và OM).

Mặt khác $AOC = BOD$ (gt) nên $COM = DOM$. (1)

Tia OM nằm giữa hai tia OC và OD . (2)

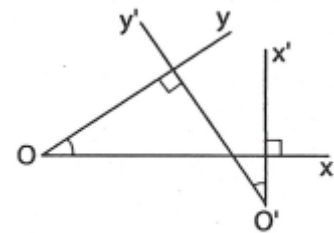
Từ (1) và (2) suy ra tia OM là tia phân giác của góc COD .

- Chứng minh mệnh đề đảo:

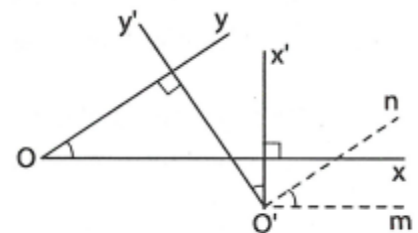
OM là tia phân giác của góc COD (gt). Suy ra $COM = DOM$.

Mặt khác $AOC = BOD$ (gt) nên $AOC + COM = BOD + DOM$.

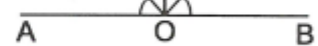
Do đó $AOM = BOM$ (vì tia OC nằm giữa hai tia OA, OM ; tia OD nằm giữa hai tia OB, OM).



Hình 5.3



Hình 5.4



Hình 5.6

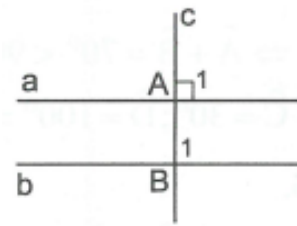
Lại có $AOM + BOM = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên
 $AOM = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Suy ra $OM \perp AB$.

5.2. Cho định lí: “Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau”. Hãy phát biểu đảo và chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.7)

Phát biểu định lí đảo: Một đường thẳng vuông góc với một trong song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Hình 5.7

một
định lí

hai đường

GT	$a // b$ $c \perp a$
KL	$c \perp b$

Chứng minh

Ta có $a // b$ (gt) suy ra $A_1 = B_1$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $c \perp a$ (gt) nên $A_1 = 90^\circ$. Do đó $B_1 = 90^\circ$. Suy ra $c \perp b$.

* Nhận xét: Ta có thể viết gộp cả định lí thuận và định lí đảo của định lí trên như sau:

$$\boxed{a \perp c \Leftrightarrow b \perp c \Leftrightarrow a // b}$$

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “khi và chỉ khi”. Kí hiệu này có nghĩa là mệnh đề ở bên trái suy ra được mệnh đề ở bên phải và ngược lại.

5.3. Cho định lí: “Hai tia phân giác của hai góc kề thì vuông góc với nhau”. Hãy viết giả thiết, kết luận của định lí đảo của định lí này rồi chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.8)

GT	AOB và BOC kề bù OM là tia phân giác của AOB ON nằm trong góc BOC $OM \perp ON$.
KL	ON là tia phân giác của BOC .

Chứng minh

Ta có $OM \perp ON$ (gt) nên $MON = 90^\circ$.

Tia OB nằm giữa hai tia OM và ON nên $O_2 + O_3 = MON = 90^\circ$.

Vì AOB và BOC kề bù nên $AOB + BOC = 180^\circ$.

Do đó $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 180^\circ$.

Mặt khác, $O_2 + O_3 = 90^\circ$ (chứng minh trên) nên $O_1 + O_4 = 90^\circ$.

Suy ra $O_2 + O_3 = O_1 + O_4$ mà $O_1 = O_2$ (gt) nên $O_3 = O_4$. (1)

Tia ON nằm giữa hai tia OB và OC . (2)

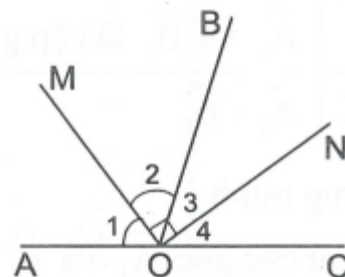
Từ (1) và (2) suy ra tia ON là tia phân giác của góc BOC .

5.4. Bác bỏ các mệnh đề sau bằng cách đưa ra phản ví dụ:

- Tổng số đo của hai góc nhọn bằng số đo của một góc tù;
- Tổng số đo của một góc nhọn và một góc tù bằng số đo của góc bẹt.

Hướng dẫn giải

- $A = 30^\circ; B = 40^\circ$



Hình 5.8

$\Rightarrow A + B = 70^\circ < 90^\circ$ (không phải là số đo của một góc tù).

b) $C = 30^\circ; D = 100^\circ \Rightarrow C + D = 130^\circ \neq 180^\circ$.

5.5. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $A + O = 90^\circ$ và $B + O = 90^\circ$. Suy ra..... (vì.....).

b) Cho $A = A'$ và $B = B'$. Suy ra $A = B \Leftrightarrow$ (vì.....).

Hướng dẫn giải

a) Suy ra $A = B$ (vì cùng phụ với góc O).

b) $A' = B'$ (vì cùng bằng hai góc bằng nhau).

5.6. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $AB = CD$. Suy ra $3AB \dots\dots\dots 3CD$ (vì.....).

b) Cho $AB = CD$ và $MN = PQ$. Suy ra $AB + MN \dots\dots\dots CD + PQ$ (vì.....).

Hướng dẫn giải

a) “=” (vì gấp ba lần hai đoạn thẳng bằng nhau thì được hai đoạn thẳng bằng nhau).

b) “=” (vì thêm những đoạn thẳng bằng nhau vào những đoạn thẳng bằng nhau thì tổng bằng nhau).

5.7. Chứng minh định lý: “Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau”.

Hướng dẫn giải (h.5.9)

GT	$a // b$ A_1 và B_1 là cặp góc so le trong.
KL	$A_1 = B_1$.

Chứng minh

Giả sử các góc A_1 và B_1 không bằng nhau.

Qua A vẽ đường thẳng xy tạo với đường thẳng c góc $xAB = B_1$.

Khi đó theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ta được $xy // b$.

Mặt khác, $a // b$ (gt) nên qua A có hai đường thẳng song song với b trái với tiên đề O-clít. Do đó xy phải trùng với đường thẳng a .

Suy ra $xAB = B_1$ hay $A_1 = B_1$.

5.8. Cho A và B là hai góc có cạnh tương ứng song song. Tính số đo các góc A và B , biết:

a) $A + B = 130^\circ$;

b) $A - B = 100^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $A + B = 130^\circ \neq 180^\circ$ thì hai góc A và B phải bằng nhau.

Vậy $A = B = 130^\circ : 2 = 65^\circ$.

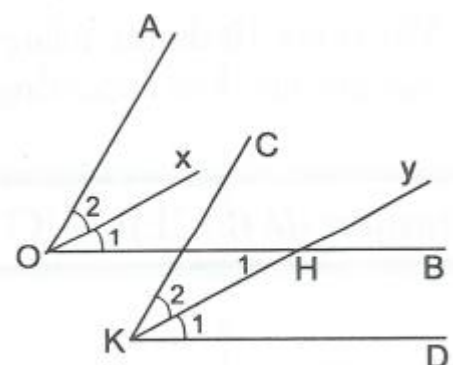
b) Nếu $A - B = 100^\circ$ thì $A \neq B$, do đó $A + B = 180^\circ$.

Suy ra $A = (180^\circ + 100^\circ) : 2 = 140^\circ; B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

5.9. Cho hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù. Biết hai tia phân giác của chúng không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng hai tia phân giác này song song với nhau.

Hướng dẫn giải (h.5.10)

GT	AOB và CKD cùng nhọn (tù) $OA // KC; OB // KD$ $O_1 = O_2; K_1 = K_2$
----	---



Hình 5.10

KL

$Ox // Ky$.

Chứng minh

Hai góc AOB và CKD là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù nên $AOB = CKD$.

Tia Ox là tia phân giác của góc AOB ; tia Ky là tia phân giác của góc CKD nên $O_1 = \frac{1}{2}AOB$; $K_1 = \frac{1}{2}CKD$.

Suy ra $O_1 = K_1$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Mặt khác, $H_1 = K_1$ (cặp góc so le trong của $OB // KD$) nên $O_1 = H_1 (= K_1)$.

Do đó $Ox // Ky$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

5.10. Cho điểm M và hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại một điểm O ở ngoài phạm vi tờ giấy (h.5.5). Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua M và vuông góc với tia phân giác của góc AOC .

Hướng dẫn giải (h.5.11)

Từ M vẽ các tia $Mx // AB, My // CD$ và tia Mt là tia phân giác của góc xMy .

Qua M vẽ đường thẳng $d \perp Mt$, khi đó $d \perp$ tia phân giác của góc AOC .

Thật vậy, các góc xMy và AOC là các góc có cạnh tương ứng song song, cùng nhọn nên các tia phân giác của chúng song song với nhau (xem bài 5.9).

Mặt khác, $d \perp Mt$ trên $d \perp$ tia phân giác của góc AOC .

5.11. Cho 10 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 18° .

Hướng dẫn giải (h.5.12)

Gọi 10 đường thẳng đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

Từ một điểm O bất kì vẽ 10 đường thẳng $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ tương ứng song song với 10 đường thẳng đã cho. Vì trong 10 đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song nên 10 đường thẳng $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ cũng không có hai đường thẳng nào trùng nhau. 10 đường thẳng này cắt nhau tại O tạo thành 20 góc không có điểm trong chung nên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 20 = 18^\circ$. Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song với nó.

Vậy trong 10 đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng 18° .

Chuyên đề 6. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

Nội dung chứng minh bằng phản chứng gồm ba bước:

- *Bước 1* (phủ định kết luận): Giả sử điều trái với kết luận của bài toán.

- *Bước 2* (đi đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử ở trên và từ các điều đã biết (giả thiết, tiên đề, định lý, ...) ta suy ra một điều vô lý (trái với giả thiết, trái với các kiến thức đã biết hoặc hai điều mâu thuẫn nhau).

- *Bước 3* (khẳng định kết luận): Vậy điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

Chú ý:

• Trong bước 1 ta phải phủ định điều phải chứng minh.

Phủ định của “có A” là “không có A”.

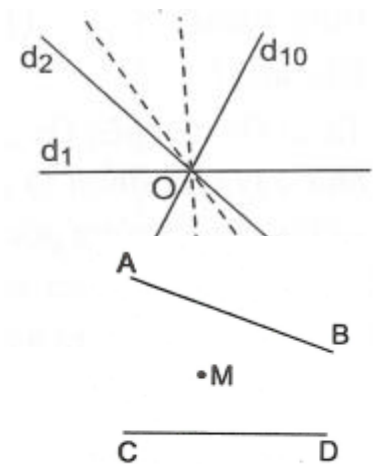
Phủ định của “không có B” là “có B”.

Ví dụ: Phủ định của “ba điểm A, B, C thẳng hàng” là “ba điểm A, B, C không thẳng hàng”.

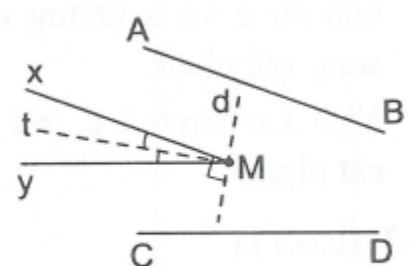
Phủ định của $m > n$ là $m \leq n$ (tức là $m < n$ hoặc $m = n$).

• Trong bước 2, nhất thiết phải suy ra được một điều mâu thuẫn với điều đã cho, đã biết. Nếu không thì chưa thể khẳng định được điều giả sử ở bước 1 là sai.

B. Một số ví dụ



Hình 5.5



Hình 5.11

Ví dụ 1: Cho 12 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó có ít nhất hai góc có số đo không vượt quá 15° .

Giải (h.6.1)

* *Tìm cách giải*

Để thấy tổng số đo các góc không có điểm trong chung đúng bằng 360° . Vì vậy ta chỉ cần biết có bao nhiêu góc không có điểm trong chung được tạo thành.

* *Trình bày lời giải*

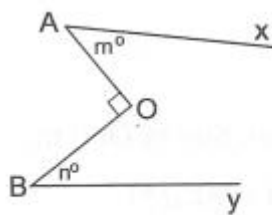
12 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 24 góc đỉnh O không có điểm trong chung. Tổng số đo các góc bằng 360° nên phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 24 = 15^\circ$.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

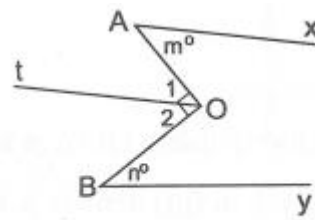
Giả sử mỗi góc đó đều lớn hơn 15° thì tổng của chúng lớn hơn: $15^\circ \cdot 24 = 360^\circ$ (vô lí).

Vậy trong số các góc đó tồn tại một góc không vượt quá 15° . Góc này bằng góc đối đỉnh với nó nên tồn tại hai góc không vượt quá 15° .

Ví dụ 2: Hình 6.2 có $OA \perp OB$, $A = m^\circ$, $B = n^\circ$, với $m + n < 90$. Chứng minh rằng Ax và By không song song.



Hình 6.2



Hình 6.3

Giải (h.6.3)

* *Tìm cách giải*

Bài toán yêu cầu chứng minh Ax và By không song song. Nếu ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử $Ax \parallel By$ thì có thể vận dụng định lý về tính chất của hai đường thẳng song song để giải. Tuy nhiên, giữa Ax và By chưa có một cát tuyến nào nên ta vẽ tia Ot ở trong góc AOB sao cho $Ot \parallel Ax$ thì $Ot \parallel By$. Khi đó các góc A , góc B lần lượt bằng O_1 và O_2 rất thuận lợi trong việc liên hệ với góc AOB cho trước.

* *Trình bày lời giải*

Giả sử $Ax \parallel By$. Trong góc AOB vẽ tia $Ot \parallel Ax$ thì $Ot \parallel By$ (vì $Ax \parallel By$).

Ta có $O_1 = A = m^\circ$ (hai góc so le trong); $O_2 = B = n^\circ$ (hai góc so le trong).

Do đó $O_1 + O_2 = m^\circ + n^\circ$.

Mặt khác, $O_1 + O_2 = AOB$; $m + n < 90$ nên $AOB < 90^\circ$.

Điều này mâu thuẫn với $AOB = 90^\circ$ (vì $OA \perp OB$).

Vậy điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.

Ví dụ 3: Cho góc tù xOy , tia Ot ở trong góc đó sao cho $xOt < yOt$. Trên tia Ox lấy điểm A . Qua A vẽ đường thẳng $m \perp Ox$. Chứng minh rằng các đường thẳng Ot và m cắt nhau.

Giải (h.6.4)

* *Tìm cách giải*

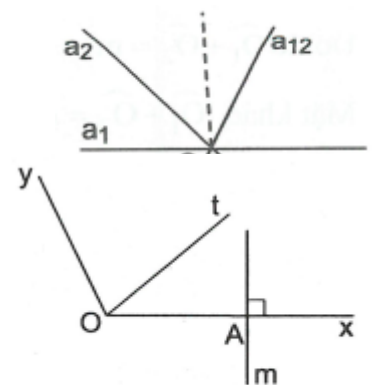
Điều phải chứng minh là các đường thẳng Ot và m cắt nhau. Muốn chứng minh bằng phản chứng ta giả sử $Ot \parallel m$, từ đó suy ra $Ot \perp Ox$ do đó $xOt = 90^\circ$.

Để đưa đến mâu thuẫn ta chỉ cần chứng minh $xOt < 90^\circ$.

* *Trình bày lời giải*

Giả sử các đường thẳng Ot và m không cắt nhau. Suy ra $Ot \parallel m$.

Mặt khác, $Ox \perp m$ (gt) nên $Ox \perp Ot$ do đó $xOt = 90^\circ$. (*)



Hình 6.4

Ta có $xOt + yOt = xOy < 180^\circ$ mà $xOt < yOt$ nên $xOt < 90^\circ$, mâu thuẫn với (*).

Vậy điều giả sử là sai, do đó các đường thẳng Ot và m phải cắt nhau.

Ví dụ 4: Cho ba tia phân biệt OA, OB, OC sao cho $AOB = BOC = COA$. Chứng minh rằng trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

Giải (h.6.5)

* *Tìm cách giải*

Để giải ví dụ này bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử trong ba tia đã cho có một tia nằm giữa hai tia còn lại rồi dùng tính chất cộng số đo các góc dẫn đến kết quả có hai tia trùng nhau, trái giả thiết.

* *Trình bày lời giải*

Giả sử trong ba tia OA, OB, OC có một tia nằm giữa hai tia còn lại.

Không làm giảm tính tổng quát, ta sử giả tia OB nằm giữa hai tia OA, OC .

Khi đó ta có $AOB + BOC = AOC$.

Nhưng do $AOB = BOC = AOC$ nên $AOB + AOB = AOB$ do đó $AOB = 0^\circ$, suy ra hai tia OA, OB trùng nhau, trái giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

C. Bài tập vận dụng

• *Chứng minh hai đường thẳng cắt nhau*

6.1. Chứng minh định lý: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải (h.6.9)

Cho $a // b$, c cắt a tại O . Ta phải chứng minh c cắt b .

Giả sử c không cắt b thì $c // b$. Như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là a và c cùng song song với b , trái với tiên đề O-clít. Vậy điều giả sử là sai, suy ra c cắt b .

6.2. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau tại O . Chứng minh rằng nếu đường thẳng c không vuông góc với b thì hai đường thẳng a và c cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.10)

• Trường hợp đường thẳng c đi qua O thì c và a cắt nhau tại O .

• Trường hợp đường thẳng c cắt b tại $K \neq O$:

Giả sử c và a không cắt nhau thì chúng song song với nhau.

Vì $b \perp a$ nên $b \perp c$, trái giả thiết. Vậy c và a phải cắt nhau.

6.3. Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . Từ A vẽ đường thẳng $a \perp Ox$, từ B vẽ đường thẳng $b \perp Oy$. Chứng minh rằng hai đường thẳng a và b cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.11)

• Giả sử a và b trùng nhau. Như vậy, qua O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng a (hoặc b), vô lí. Vậy a và b không trùng nhau. (1)

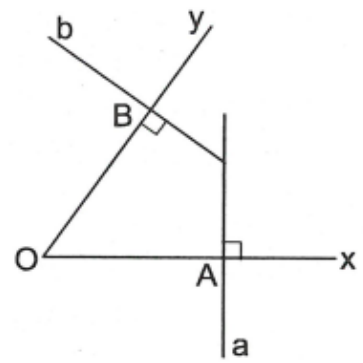
• Giả sử $a // b$

Ta có $Ox \perp a$ nên $Ox \perp b$. Mặt khác $Oy \perp b$ (gt), như vậy qua điểm O có hai đường thẳng là Ox và Oy cùng vuông góc với đường thẳng b , vô lí.

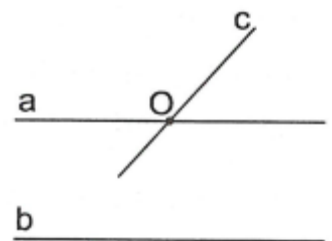
Vậy điều giả sử là sai, suy ra a và b không song song. (2)

Từ (1) và (2) suy ra a cắt b .

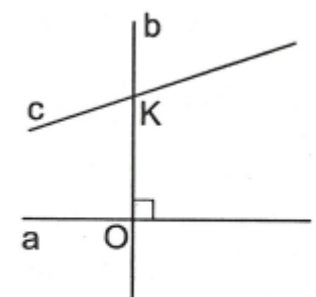
6.4. Hình 6.6 có góc AOB nhọn, $A = 134^\circ; B = 135^\circ$. Chứng minh rằng Ax và Bx không song song.



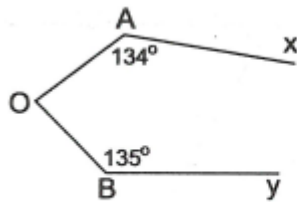
Hình 6.11



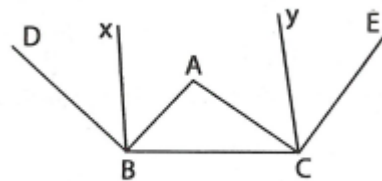
Hình 6.9



Hình 6.10



Hình 6.6



Hình 6.7

Hướng dẫn giải (h.6.12)

Giả sử $Ax // By$. Trong góc AOB vẽ tia $Ot // Ax$ thì $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

Ta có $O_1 + A = 180^\circ \Rightarrow O_1 = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$.

$O_2 + B = 180^\circ \Rightarrow O_2 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Do đó $O_1 + O_2 = 46^\circ + 45^\circ$ hay $AOB = 91^\circ > 90^\circ$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là góc AOB nhọn.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra Ax và By không song song.

6.5. Hình 6.7 có góc A tù, $AB \perp BD$, $AC \perp CE$. Vẽ tia Bx và Cy lần

lượt là tia phân giác của các góc ABD và ACE. Chứng minh rằng các đường thẳng Bx và Cy cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.13)

Ta có $AB \perp BD$, $AC \perp CE \Rightarrow ABD = ACE = 90^\circ$.

Do đó $ABx = ACy = 45^\circ$.

Ta chứng minh Bx và Cy cắt nhau bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $Bx // Cy$. Ở trong góc A ta vẽ $At // Bx$ thì $At // Cy$ (vì $Bx // Cy$).

Ta có $A_1 = ABx = 45^\circ$ (cặp góc so le trong); $A_2 = ACy = 45^\circ$ (cặp góc so le trong).

Do đó $A_1 + A_2 = 90^\circ$ hay $BAC = 90^\circ$ trái giả thiết là góc A tù.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra hai đường thẳng Bx và Cy cắt nhau.

6.6. Cho hai điểm A và B nằm ngoài đường thẳng m. Qua A vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua B. Qua B vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua A. Hỏi ít nhất cũng có bao nhiêu giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ?

Hướng dẫn giải (h.6.14)

Trong số 50 đường thẳng vẽ qua A ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử có chưa đến 49 đường thẳng cắt m, suy ra ít nhất cũng còn 2 đường thẳng không cắt m. Hai đường thẳng này cùng đi qua A và cùng song song với m. Điều này vô lí vì nó trái với tiên đề Ô-clit. Vậy điều giả sử là sai, do đó ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt m.

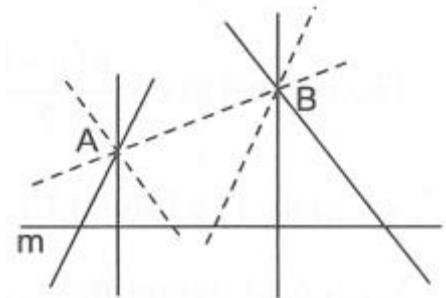
- Nếu đường thẳng $AB // m$ thì số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49 + 49 = 98$ (điểm).

- Nếu đường thẳng AB và đường thẳng m không song song thì giao điểm của đường thẳng AB với đường thẳng m cũng là giao điểm của đường thẳng BA với đường thẳng m. Do đó số giao điểm của đường thẳng m với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49 + 49 - 1 = 97$ (điểm).

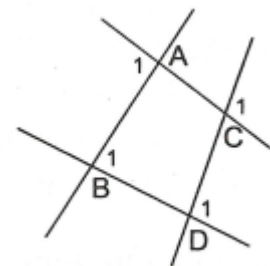
- Chứng minh hai góc không bằng nhau. Tính số đo góc

6.7. Trong hình 6.8, cho biết $A_1 \neq B_1$. Chứng minh rằng $C_1 \neq D_1$.

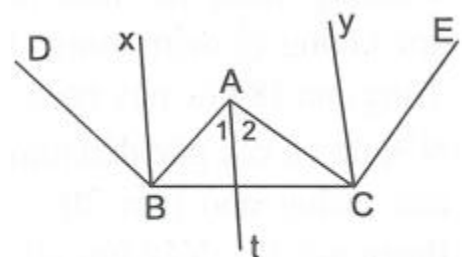
Hướng dẫn giải (h.6.8)



Hình 6.14



Hình 6.8



Hình 6.13

Giả sử $C_1 = D_1$, suy ra $AC \parallel BD$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Do đó $A_1 = B_1$ (cặp góc so le trong).

Điều này trái giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai, do đó $C_1 \neq D_1$.

6.8. Cho 9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 20° và tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 20° .

Hướng dẫn giải (h.6.15)

9 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 18 góc không có điểm trong chung.

Tổng của 18 góc này bằng 360° (*)

• Nếu tất cả các góc đều nhỏ hơn 20° thì tổng của chúng nhỏ hơn $20^\circ \cdot 18 = 360^\circ$, mâu thuẫn với (*).
Vậy tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 20° .

• Nếu tất cả các góc đều lớn hơn 20° thì tổng của chúng lớn hơn $20^\circ \cdot 18 = 360^\circ$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 20° .

6.9. Qua điểm O ở ngoài đường thẳng a vẽ một số đường thẳng không phải tất cả đều cắt a . Những đường thẳng cắt a thì tạo với đường thẳng a được 78 tam giác chung đỉnh O . Chứng minh rằng trong số những đường thẳng đã vẽ qua O ít nhất cũng có hai đường thẳng cắt nhau theo một góc nhỏ hơn 13° .

Hướng dẫn giải (h.6.16)

Gọi số đường thẳng vẽ qua O và cắt đường thẳng a là n . Số tam giác đỉnh O có cạnh đối diện nằm trên đường thẳng a được tính theo công

$$\text{thức } \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{n(n-1)}{2} = 78$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 156 = 13 \cdot 12 \Rightarrow n = 13.$$

Vậy có 13 đường thẳng đi qua O và cắt đường thẳng a . Theo đề bài, qua O còn có đường thẳng không cắt a . Theo tiên đề Ô-clit chỉ có một đường thẳng như thế. Vậy số đường thẳng đã vẽ qua O là 14.

14 đường thẳng này tạo nên 28 góc đỉnh O không có điểm trong chung và có tổng số đo bằng 360° . (*)

Vậy ít nhất phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360^\circ : 28 \approx 12^\circ 51' < 13^\circ$ vì nếu không có góc nào nhỏ hơn 13° thì tổng của 28 góc này sẽ lớn hơn hoặc bằng $13^\circ \cdot 28 = 364^\circ$, mâu thuẫn với (*).

• Các dạng khác

6.10. Chứng minh định lý: Trên tia Ox có $OM = a, ON = b$. Nếu $a < b$ thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N .

Hướng dẫn giải (h.6.17)

• Điểm O không nằm giữa hai điểm M và N (1) vì M và N nằm trên tia Ox .

• Giả sử điểm N nằm giữa hai điểm O và M thì $ON + NM = OM$
do đó $b + NM = a$.

Suy ra $NM = a - b < 0$ (vì $a < b$). Điều này vô lý vì $NM > 0$.

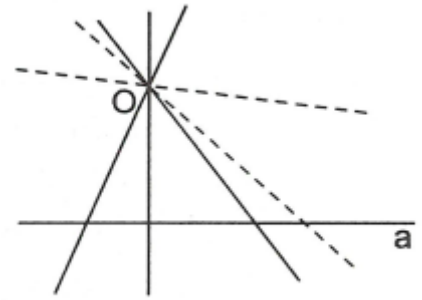
Vậy điều giả sử là sai, do đó điểm N không nằm giữa hai điểm O và M . (2)
Trong ba điểm O, M, N thẳng hàng phải có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại nên từ (1) và (2) suy ra điểm M nằm giữa O và N .

6.11. Chứng minh rằng nếu hai tia Ox và Oy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Oz sao cho $\angle Ox + \angle Oy = 180^\circ$ thì hai tia Ox, Oy đối nhau.

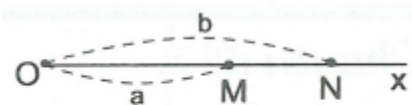
Hướng dẫn giải (h.6.18)

Giả sử hai tia Ox, Oy không đối nhau.

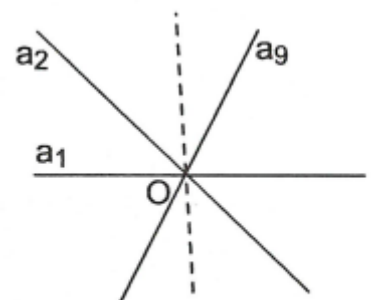
Ta vẽ tia Oy' là tia đối của tia Ox .



Hình 6.16



Hình 6.17



Hình 6.15

Khi đó $\angle zOx + \angle zOy' = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $\angle zOx + \angle zOy = 180^\circ$ (gt).

Suy ra $\angle zOy' = \angle zOy$ (cùng bù với $\angle zOx$). Điều này vô lí vì trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oz bao giờ cũng có một và chỉ một tia Oy sao cho $\angle zOy = m^\circ$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó hai tia Ox, Oy đối nhau.

6.12. Vẽ 9 đoạn thẳng trên mặt phẳng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác không?

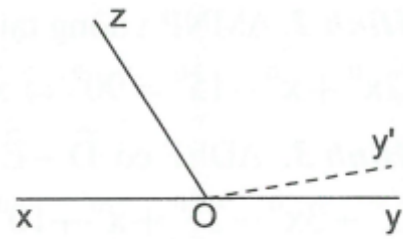
Hướng dẫn giải

Không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

Như vậy với cả 9 đoạn thẳng ta được $9 \cdot 5 = 45$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Nhưng như thế thì mỗi trường hợp đã được tính hai lần (vì đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng CD thì ngược lại, đoạn thẳng CD cắt đoạn thẳng AB) do đó thực sự chỉ có $\frac{45}{2}$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Vì $\frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$ nên điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.



Hình 6.18