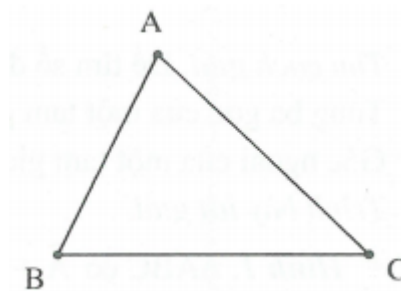


HH7-CHỦ ĐỀ 2.BÀI TOÁN HÌNH LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC**Chuyên đề 1. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC****A. Kiến thức cần nhớ****1. Tổng ba góc của một tam giác.**

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

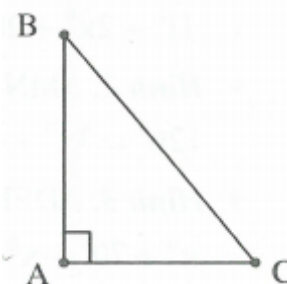
$$\Delta ABC \Rightarrow A + B + C = 180^\circ.$$

**2. Áp dụng vào tam giác vuông**

a) *Định nghĩa:* Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

b) *Tính chất:* Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ A = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow B + C = 90^\circ.$$

**3. Góc ngoài của tam giác**

a) *Định nghĩa:* Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

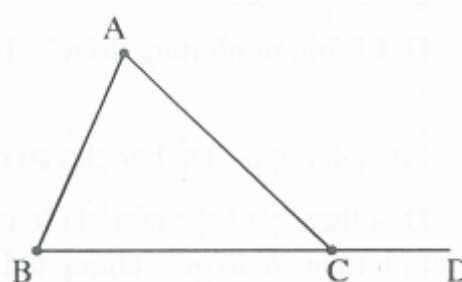
b) *Tính chất:*

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

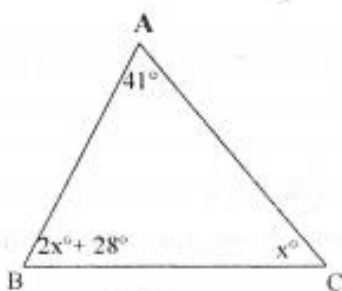
$$ACD = A + B$$

* Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

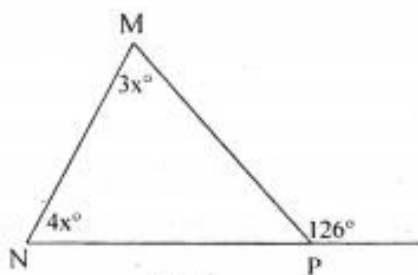
$$ACD > A, ACD > B$$

**B. Một số ví dụ**

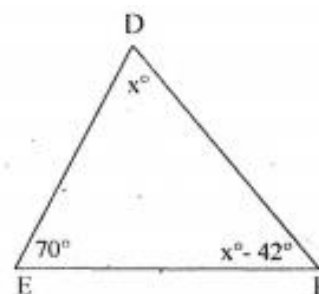
Ví dụ 1: Tìm x , trong hình vẽ bên:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Giải

* *Tìm cách giải.* Để tìm số đo x , chúng ta vận dụng:

- Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° .

- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

* *Trình bày lời giải.*

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

+ **Hình 1.** $\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$ (tính chất)

$$41^\circ + 2x^\circ + 28^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 37^\circ.$$

+ **Hình 2.** $\triangle MNP$ có $MPx = M + N$ (góc ngoài tam giác)

$$126^\circ = 3x^\circ + 4x^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 18^\circ.$$

+ **Hình 3.** $\triangle DEF$ có $D + E + F = 180^\circ$ (tính chất)

$$x^\circ + 70^\circ + x^\circ - 42^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 76^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $A = 80^\circ$, $B = 60^\circ$. Hai tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I .

Vẽ tia phân giác ngoài tại đỉnh B cắt tia CI tại D . Chứng minh rằng $BDC = C$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Đề bài cho số đo A ; B nên hiển nhiên tính được số đo C . Dựa theo kết luận của bài toán thì chúng ta chỉ cần tính số đo BDC . Khi tính toán số đo góc, chúng ta lưu ý giả thiết có yếu tố tia phân giác.

* *Trình bày lời giải.*

$\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$ (tính chất)

$$80^\circ + 60^\circ + C = 180^\circ; C = 40^\circ.$$

$\triangle ABC$ có $ABx = A + C = 120^\circ$

$$\Rightarrow B_1 = B_2 = \frac{1}{2} ABx = 60^\circ$$

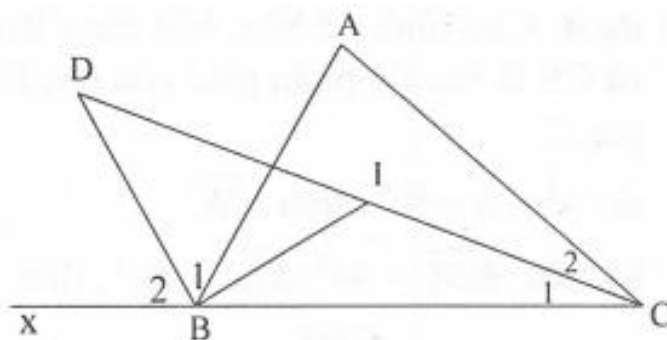
$$\text{Ta có: } C_1 = C_2 = \frac{1}{2} C = 20^\circ.$$

$\triangle BCD$ có:

$$BDC + C_1 + CBD = 180^\circ$$

$$BDC + 20^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow BDC = 40^\circ$$

Do đó $BDC = C$.



Ví dụ 3: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E . Các tia phân giác ACE ; DBE cắt nhau ở

$$K. \text{ Chứng minh: } BKC = \frac{BAC + BDC}{2}.$$

Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta nhận thấy BKC là góc của tam giác BKG ; CKH nên cần phải ghép vào hai tam giác ấy. Khai thác yêu cầu của bài toán (liên quan tới góc A ; C) đồng thời để vận dụng yếu tố tia phân giác của giả thiết, chúng ta cần xét các cặp tam giác $\triangle KGB$, $\triangle AGC$ và cặp tam giác $\triangle KHC$, $\triangle DHB$.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

* Trình bày lời giải.

Gọi G là giao điểm CK và AE và H là giao điểm BK và DE .

Xét ΔKGB và ΔAGC có:

$$KGB = AGC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow K + B_1 = A + C_1 \quad (1)$$

Xét ΔKHC và ΔDHB có:

$$KHC = BHD \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow K + C_2 = D + B_2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với $B_1 = B_2$; $C_1 = C_2 \Rightarrow 2K = A + D$

$$\Rightarrow K = \frac{A + D}{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hình vẽ bên, biết rằng BD và CE là các tia phân giác của góc B , góc C .

a) Nếu $A = 80^\circ$, tính BIC .

b) Nếu $BDC = 84^\circ$; $BEC = 96^\circ$, tính A .

Giải

a) ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$ nên $B + C = 100^\circ$.

$$B_2 + C_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$$

$$B_2 + C_2 = 50^\circ. \Delta BIC \text{ có } B_2 + C_2 + BIC = 180^\circ \text{ nên } BIC = 130^\circ.$$

b) ΔBDC có $BDC + B_2 + C = 180^\circ$ mà $BDC = 84^\circ$ nên $B_2 + C = 96^\circ$.

$$\Delta BEC \text{ có } BEC + B + C_2 = 180^\circ \text{ mà } BEC = 96^\circ \text{ nên } B + C_2 = 84^\circ.$$

$$\text{Suy ra } B_2 + B + C_2 + C = 96^\circ + 84^\circ$$

$$\text{Do đó } \frac{3}{2}(B + C) = 180^\circ$$

$$B + C = 120^\circ \text{ nên } A = 60^\circ.$$

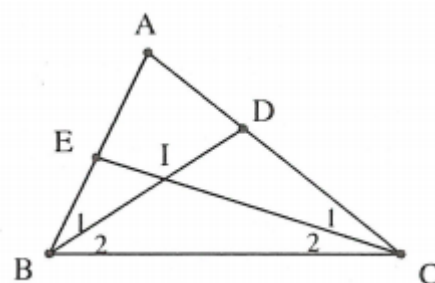
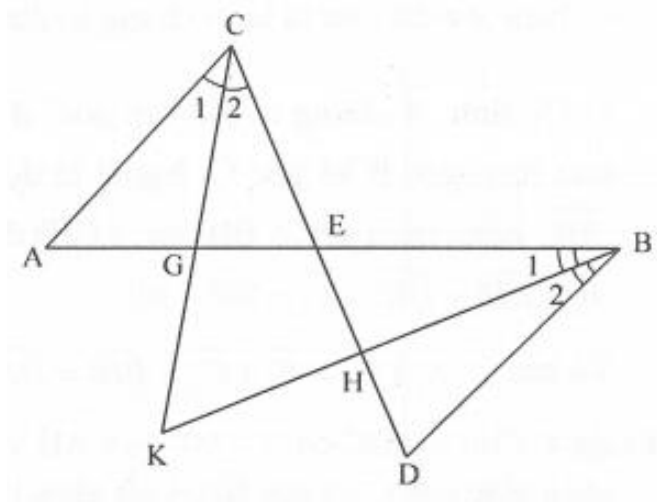
Nhận xét:

- Nếu $A \neq 80^\circ$ thì ta luôn chứng tỏ được $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ (*).

- Để tính A chúng ta cần tìm góc $B + C$ hoặc $B_2 + C_2$ mà không cần tính từng góc B và góc C .

Ngoài ra dựa vào công thức (*) ta có thể tính BIC bằng cách xét ΔBIE và ΔCID để tìm được:

$$B_1 + EIB + DIC + C_1 = 84^\circ + 96^\circ$$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Và lưu ý: $B_1 + C_1 = B_2 + C_2 = EIB = DIC$ ta tính EIB .

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Các tia phân giác góc C và góc BAH cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $AK \perp CK$.

Giải

$\triangle ABH$; $\triangle ABC$ vuông nên $BAH = HCA$ (cùng phụ với ABC).

Mặt khác $A_1 = \frac{1}{2} \cdot BAH$; $C_1 = \frac{1}{2} HAC$ do đó $A_1 = C_1$.

Ta có: $A_1 + KAC = 90^\circ$

$\Rightarrow C_1 + KAC = 90^\circ$

Suy ra $\triangle KAC$ vuông tại K .

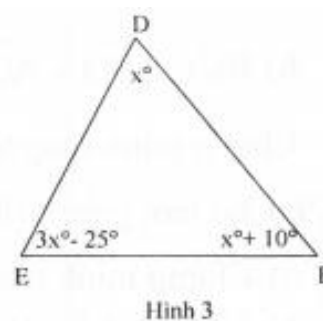
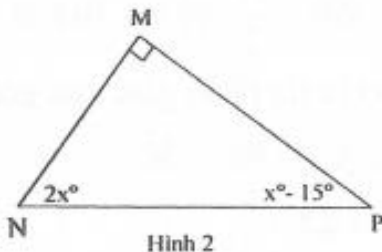
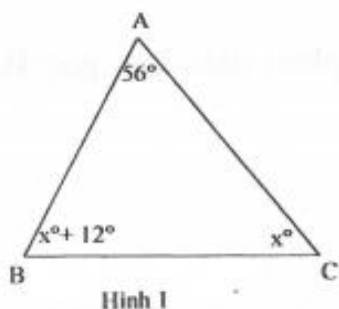
Vậy $AK \perp KC$.

*** Nhận xét:**

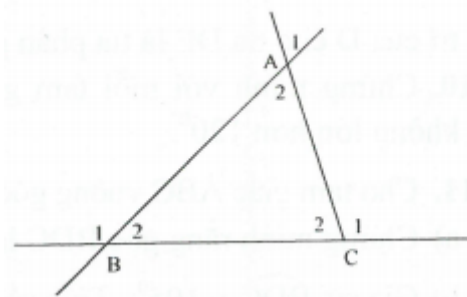
Qua bài ta nhận thấy có thêm một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông là chứng minh tam giác có tổng hai góc bằng 90° .

C. Bài tập vận dụng

1.1. Tìm x , trong các hình vẽ sau:



1.2. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $A_1 = 45^\circ$; $B_1 = 130^\circ$. Tính C_1 .



1.3. Các góc ngoài đỉnh A, B, C tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính tỉ lệ ba góc trong của tam giác đó.

1.4. Cho tam giác ABC có $A = 2B$ và $B = 3C$.

a) Tính các góc $A; B; C$?

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng AB với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh C . Tính góc AEC ?

1.5. Tam giác ABC có $B > C$. Tia phân giác BAC cắt BC tại D .

a) Chứng minh $ADC - ADB = B - C$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại

$$E. \text{ Chứng minh rằng } AEB = \frac{B-C}{2}.$$

1.6. Cho tam giác ABC có $B - C = 18^\circ$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D . Tính số đo góc ADC ? Góc ADB ?

1.7. Cho tam giác ABC . Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D . Biết $ADB = 85^\circ$.

a) Tính $B - C$.

b) Tính các góc của tam giác ABC nếu $4B = 5C$.

1.8. Cho tam giác ABC , O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $BOC = A + ABO + ACO$.

b) Biết $ABO + ACO = 90^\circ - \frac{A}{2}$ và tia BO là tia phân giác của góc B . Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của góc C .

1.9. Cho tam giác ABC có $A = 180^\circ - 3C$.

a) Chứng minh rằng $B = 2C$.

b) Từ một điểm D trên cạnh AC vẽ $DE \parallel BC$ ($E \in AB$). Hãy xác định vị trí của D cho tia DE là tia phân giác của góc ADB .

1.10. Chứng minh với mỗi tam giác bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài không lớn hơn 120° .

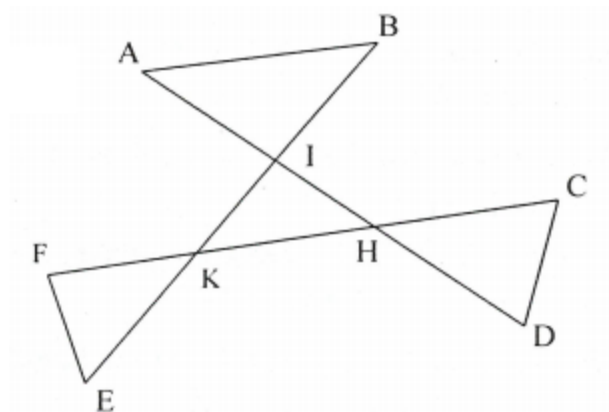
1.11. Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Tia phân giác của C cắt AB tại D .

a) Chứng minh rằng góc BDC là góc tù.

b) Giả sử $BDC = 105^\circ$. Tính số đo góc B .

1.12. Cho hình vẽ bên.

Tính tổng $A + B + C + D + E + F$



Hướng dẫn giải

1.1.

- **Hình 1.** $\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$

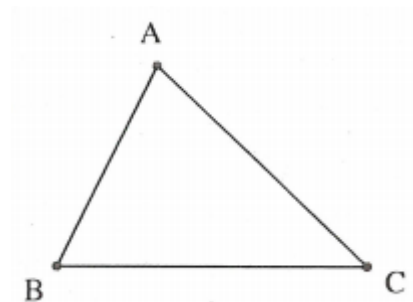
$$56^\circ + x^\circ + 12^\circ + x^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 56^\circ.$$

- **Hình 2.** $\triangle MNP$ vuông tại $M \Rightarrow N + P = 90^\circ$

$$2x^\circ + x^\circ - 15^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 35^\circ.$$

- **Hình 3.** $\triangle DEF$ có $D + E + F = 180^\circ$

$$x^\circ + 3x^\circ - 25^\circ + x^\circ + 10^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x^\circ = 39^\circ.$$



1.2. Ta có: $A_2 = A_1 = 45^\circ$ (đối đỉnh).

$$\text{Ta có } B_2 + B_1 = 180^\circ \Rightarrow B_2 = 50^\circ.$$

$\triangle ABC$ có $C_1 = A_2 + B_2$ (góc ngoài của tam giác) suy ra: $C_2 = 95^\circ$.

1.3. Đặt số đo góc ngoài đỉnh $A; B; C$ lần lượt là $x; y; z$. Theo đầu bài, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và

$$x + y + z = 360^\circ.$$

Giải ra, ta được: $x = 80^\circ; y = 120^\circ; z = 160^\circ$.

Từ đó suy ra các góc trong đỉnh $A; B; C$ tương ứng là $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$.

Do đó tỉ lệ ba góc trong là: $5:3:1$.

1.4.

a) Ta có $A = 2.B; B = 3.C \Rightarrow A = 6.C$.

$$\triangle ABC \text{ có } A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 6.C + 3.C + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow C = 18^\circ; B = 54^\circ; A = 108^\circ.$$

b) Ta có $ACx + C_1 = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$ACx + 18^\circ = 180^\circ \Rightarrow ACx = 162^\circ$$

$$\text{Ta có: } C_2 = C_3 = \frac{1}{2} ACx = 81^\circ.$$

$$\triangle BCE \text{ có } E + B + BCE = 180^\circ; E + 54^\circ + 18^\circ + 81^\circ = 180^\circ \Rightarrow E = 27^\circ \text{ hay } AEC = 27^\circ.$$

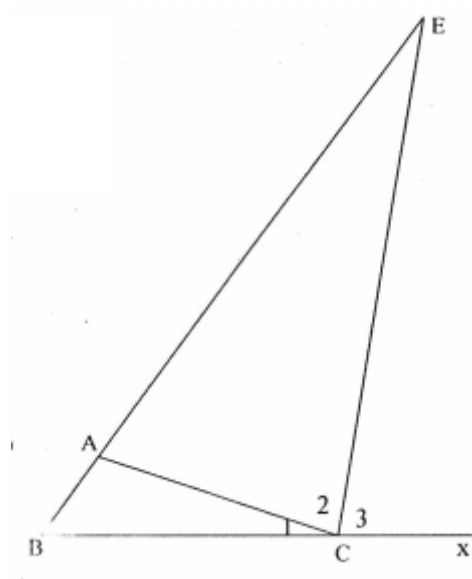
1.5.

a) $\triangle ABD$ có $A_1 + B + ADB = 180^\circ$;

$$\triangle ACD \text{ có } A_2 + C + ADC = 180^\circ;$$

$$\text{Mà } A_1 = A_2 \text{ nên } C + ADC = B + ADB \Rightarrow ADC - ADB = B - C.$$

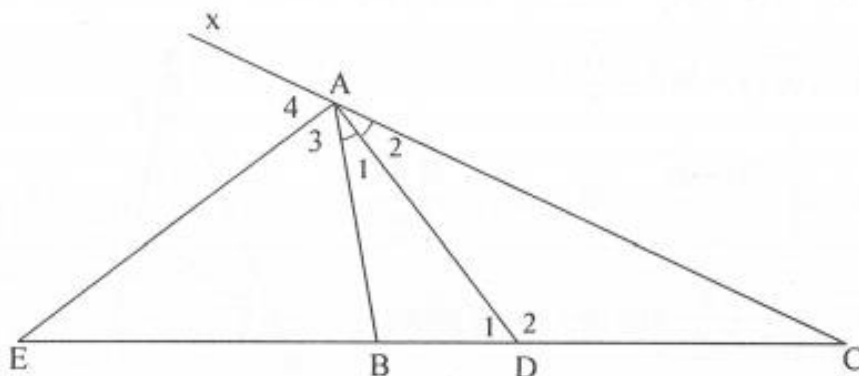
b) $\triangle ABC$ có $BAx = B + C$ (góc ngoài tam giác)



$$\Rightarrow A_3 = A_4 = \frac{1}{2} BAX = \frac{B+C}{2}$$

$\triangle ACE$ có: $A_4 = E + C$ (góc ngoài)

$$\Rightarrow E = A_4 - C \Rightarrow AEB = \frac{B+C}{2} - C \text{ hay } AEB = \frac{B-C}{2}.$$



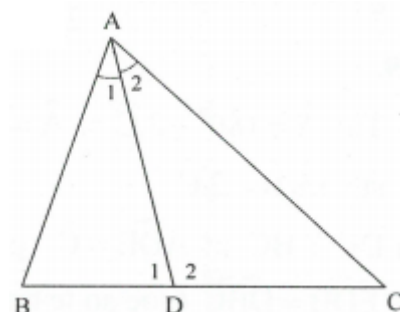
1.6. $\triangle ACD$ có $D_2 = B + A_1$ (góc ngoài tam giác)

$\triangle ABD$ có $D_1 = C + A_2$ (góc ngoài tam giác) mà $A_1 = A_2$

nên $D_2 - D_1 = B - C$

$$\Rightarrow D_2 - D_1 = 18^\circ \text{ mà } D_2 + D_1 = 180^\circ$$

$$\text{nên } D_2 = \frac{180^\circ + 18^\circ}{2} = 99^\circ; D_1 = \frac{180^\circ - 18^\circ}{2} = 81^\circ.$$



1.7.

a) Ta có $ADB = 85^\circ \Rightarrow ADC = 95^\circ$.

$\triangle ABD$ có $A_1 + B + ADB = 180^\circ$;

$\triangle ACD$ có $A_2 + C + ADC = 180^\circ$;

Mà $A_1 = A_2$ nên $C + ADC = B + ADB$

$$\Rightarrow ADC - ADB = B - C.$$

$$\text{Vậy } B - C = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ.$$

$$\text{b) } 4.B = 5.C \Rightarrow \frac{B}{5} = \frac{C}{4}.$$

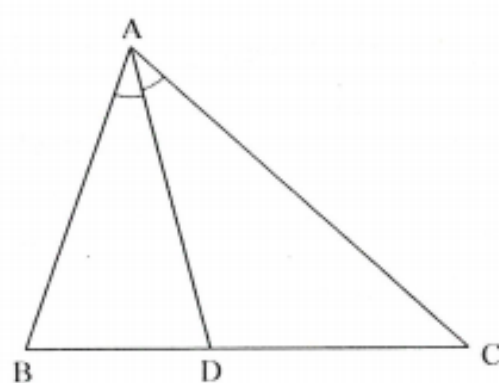
$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: } \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = \frac{B-C}{5-4} = \frac{10^\circ}{1} = 10^\circ.$$

$$\text{Suy ra: } B = 50^\circ; C = 40^\circ.$$

1.8.

a) $\triangle ABO$ có $O_1 = A_1 + ABO$ (góc ngoài tam giác).

$\triangle ACO$ có $O_2 = A_2 + ACO$ (góc ngoài tam giác).



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

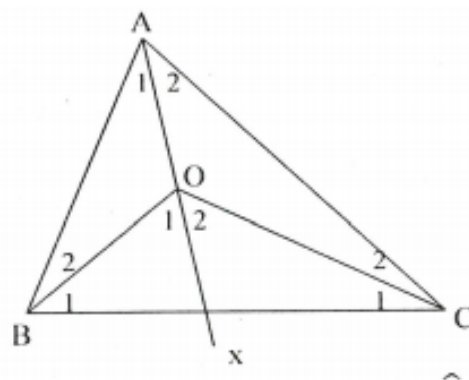
$$\Rightarrow O_1 + O_2 = A_1 + A_2 + ABO + ACO \text{ Hay } BOC = A + ABO + ACO.$$

b) Từ $ABO + ACO = 90^\circ - \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow B_2 + C_2 = \frac{180^\circ - A}{2} \Rightarrow B_2 + C_2 = \frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow B_2 + C_2 = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \text{ mà } BO \text{ là tia phân giác của } B \text{ nên}$$

$$B_1 = \frac{B}{2} \text{ suy ra } C_2 = \frac{C}{2}; \text{ hay } CO \text{ là tia phân giác của góc } C.$$



1.9.

a) Từ: $A = 180^\circ - 3.C \Rightarrow A = A + B + C - 3.C$ suy ra $B = 2.C$

b) $DE \parallel BC \Rightarrow ADE = C$ (góc đồng vị) và $EDB = DBC$ (góc so le trong).

Tia DE là tia phân giác của $ADB \Leftrightarrow ADE = EDB \Leftrightarrow C = DBC$ mà $C = \frac{1}{2}B$ nên $DBC = \frac{1}{2}B \Leftrightarrow BD$ là tia phân giác của ABC .

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác B và AC thì DE là tia phân giác của ADB .

1.10. Giả sử cả ba góc ngoài ở ba đỉnh đều lớn hơn 120° suy ra mỗi góc trong đều nhỏ hơn 60°

Vậy tổng ba góc trong của tam giác nhỏ hơn 180° , vô lí. Do đó tồn tại một góc ngoài có số đo không lớn hơn 120° .

1.11.

a) Góc BDC là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác ACD nên $BDC > A = 90^\circ$; $90^\circ < BDC < 180^\circ \Rightarrow BDC$ là góc tù.

b) $BDC = A + ACD$ (góc ngoài tam giác)

$$\Rightarrow ACD = 15^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ \Rightarrow B = 60^\circ.$$

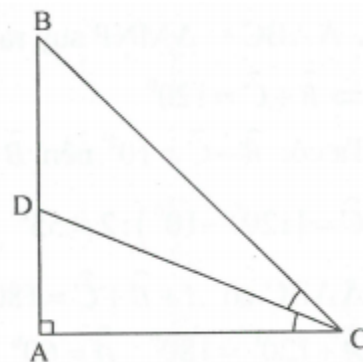
1.12. Xét $\triangle ABI$ có $A + B = 180^\circ - AIB$.

Xét $\triangle CDH$ có $C + D = 180^\circ - CHD$.

Xét $\triangle EFK$ có $E + F = 180^\circ - EKF$.

$$\text{Suy ra: } A + B + C + D + E + F = 540^\circ - (AIB + CHD + EKF)$$

$$= 540^\circ - (KIH + IHK + IKH) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$



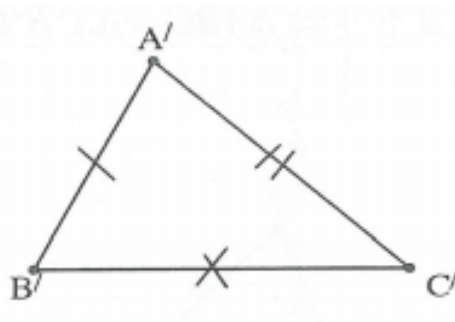
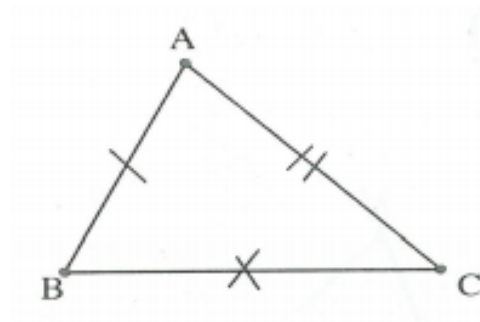
Chuyên đề 2. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

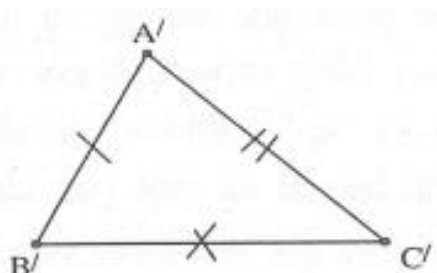
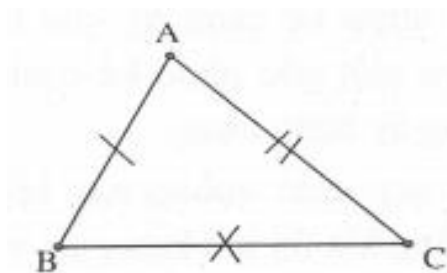
$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ C = C' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

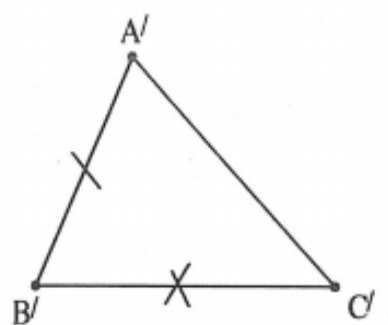
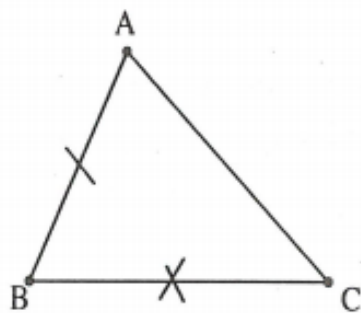
• Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.c.c)}$$



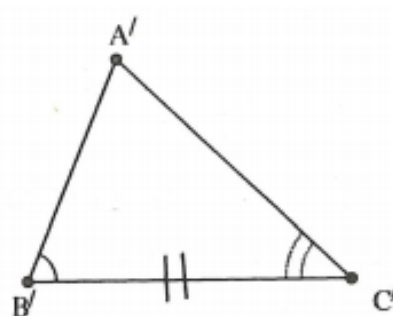
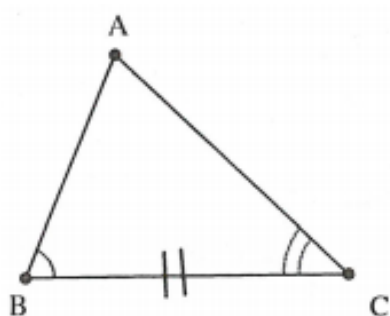
• Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{matrix} AB = A'B' \\ B = B' \\ BC = B'C' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$



- Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

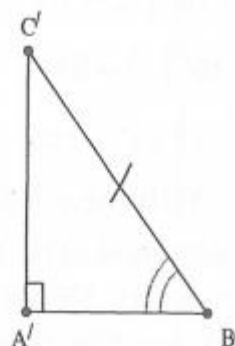
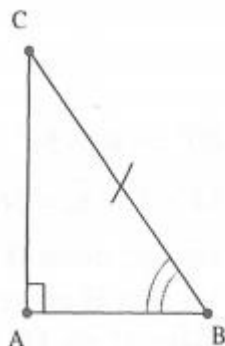
$$\left. \begin{array}{l} B = B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (g.c.g)}$$



2. Hệ quả.

- Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
- Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông ấy bằng nhau.
- Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ B = B' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$



B. Một số ví dụ

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$.

a) Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác đó với ba cách khác.

b) Cho $AB = 5\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$; $NP = 7\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác? Hãy nêu nhận xét?

Giải

* *Tìm cách giải.* Khi viết hai tam giác bằng nhau thì các đỉnh tương ứng phải viết theo cùng một thứ tự. Viết như vậy, thì việc suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau mới chính xác.

* *Trình bày lời giải.*

a) $\triangle ACB = \triangle MPN$; $\triangle CBA = \triangle PNM$; $\triangle BAC = \triangle NMP$.

b) $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra $AB = MN = 5\text{cm}$; $AC = MP = 6\text{cm}$; $BC = NP = 7\text{cm}$.

Chu vi $\triangle ABC$ bằng: $AB + AC + BC = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

Chu vi $\triangle MNP$ bằng: $MN + MP + NP = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

* *Nhận xét.* Hai tam giác bằng nhau thì có chu vi bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC = \triangle HIK$, biết $A + B = 124^\circ$; $H - \hat{I} = 16^\circ$. Tính các góc của mỗi tam giác.

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán yêu cầu tính số đo góc của tam giác nên từ $\triangle ABC = \triangle HIK$, chúng ta chỉ quan tâm tới cặp góc tương ứng bằng nhau.

* *Trình bày lời giải.*

$\triangle ABC = \triangle HIK \Rightarrow A = H$; $B = \hat{I}$; $C = K$ (cặp góc tương ứng).

Vì $A + B = 124^\circ \Rightarrow H + \hat{I} = 124^\circ$; mà $H - \hat{I} = 16^\circ$, nên

$H = (124^\circ + 16^\circ) : 2 = 70^\circ$;

$\hat{I} = (124^\circ - 16^\circ) : 2 = 54^\circ$.

$\triangle HIK$ có $H + \hat{I} + K = 180^\circ$; $70^\circ + 54^\circ + K = 180^\circ \Rightarrow K = 56^\circ$.

Vì $\triangle ABC = \triangle HIK$ nên $A = H = 70^\circ$; $B = \hat{I} = 54^\circ$; $C = K = 56^\circ$.

Ví dụ 3: Cho góc nhọn xOy . Lấy điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ hai cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính nhỏ hơn OA sao cho chúng cắt nhau tại 2 điểm C và D . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AOC = \triangle BOC$.

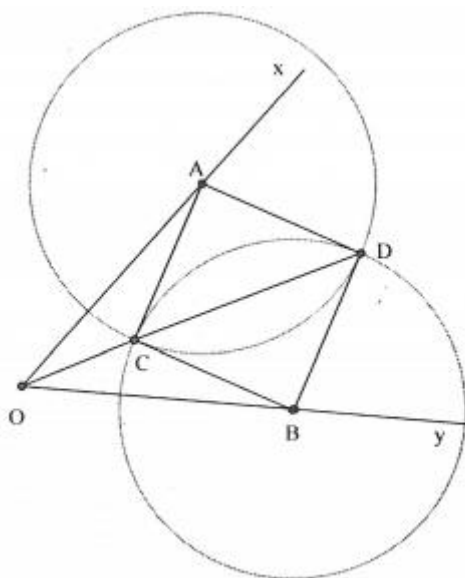
b) Ba điểm O, C, D thẳng hàng.

Giải

a) Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có: $OA = OB$ (giả thiết),
 $AC = BC$ (bán kính bằng nhau), OC cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC$ (c.c.c).

b) $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c.c.c) nên $\angle AOC = \angle BOC$



tương tự: $\triangle OAD = \triangle OBD$ (c.c.c) nên $AOD = BOD$.

Nên C, D cùng thuộc tia phân giác góc xOy hay O, C, D thẳng hàng.

* **Nhận xét.**

- Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau bạn nên chú ý cạnh chung.
- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh ba điểm đó cùng nằm trên tia phân giác của một góc.

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Lấy M thuộc cạnh AB ; lấy N thuộc tia đối của tia CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là một điểm sao cho $IB = IC$; $IM = IN$. Chứng minh rằng: $IC \perp AN$.

Giải

Ta có $\triangle ABI = \triangle ACI$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle ACI = \angle ABI$.

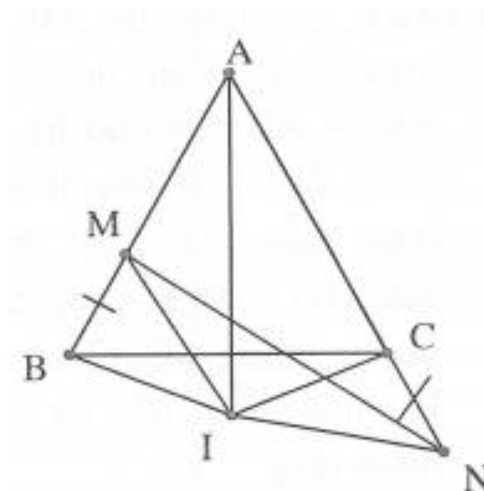
$\triangle MBI = \triangle NCI$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle NCI = \angle MBI$.

Suy ra $\angle ACI = \angle NCI$, mà đó là hai góc kề bù nên

$\angle ACI = \angle NCI = 90^\circ$, hay $IC \perp AN$.

* **Nhận xét.**

Đây là bài toán khó. Để chứng minh $IC \perp AN$ chúng ta suy nghĩ và chứng minh $\angle ICA = \angle ICN$ là điều cần thiết. Sau đó, chúng ta hãy tìm các cặp tam giác bằng nhau mà trong các tam giác ấy có chứa $\angle ICA$ hoặc $\angle ICN$.



Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ tia phân giác góc B cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$.

a) Chứng minh rằng $DM \perp BC$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

c) Nếu biết $\angle AMD = 36^\circ$. Tính số đo $\angle B$; $\angle C$ của $\triangle ABC$.

Giải

a) $\triangle ABD$ và $\triangle MBD$ có $BA = BM$; $\angle ABD = \angle MBD$; BD là cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle MBD$ (c.g.c).

$\Rightarrow \angle BAD = \angle BMD \Rightarrow \angle BMD = 90^\circ$

$\Rightarrow DM \perp BC$.

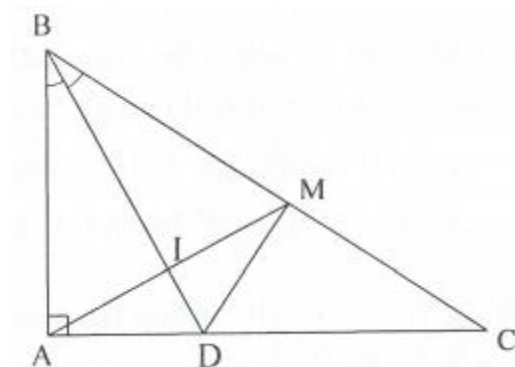
b) Gọi I là giao điểm của AM và BD .

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle MBI$ có $AB = MB$; $\angle ABI = \angle MBI$; BI là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle MBI$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle AIB = \angle MIB$ mà $\angle AIB + \angle MIB = 180^\circ$ nên $\angle AIB = \angle MIB = 90^\circ$, suy ra: $AM \perp BD$.

c) $\angle AMD = 36^\circ$ nên $\angle IMB = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$;

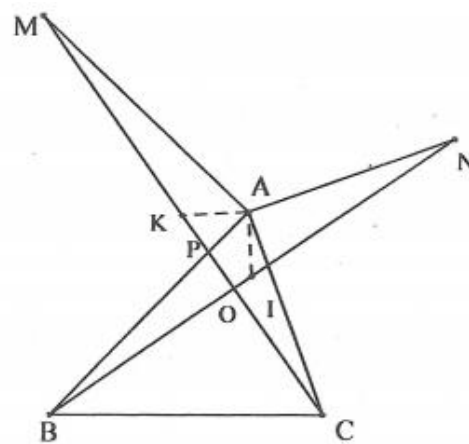


GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\triangle BIM$ vuông nên $IBM = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Suy ra $B = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ$ do đó $C = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB . Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm BN và CM . Chứng minh rằng:



- $\triangle AMC = \triangle ABN$;
- $MC = BN$ và $MC \perp BN$;
- $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

Giải

a) $\angle MAC = \angle BAN (= 90^\circ + \angle BAC)$ nên $\triangle MAC = \triangle BAN$ (c.g.c).

b) $\triangle MAC = \triangle BAN \Rightarrow BN = CM$. Và $\angle AMC = \angle ABN$.

Gọi P là giao điểm của AB và CM

Ta có: $\angle AMC + \angle APM = 90^\circ$ (vì $\triangle AMP$ vuông)

$\Rightarrow \angle ABN + \angle BPO = 90^\circ \Rightarrow BN \perp CM$.

c) $CM = BN \Rightarrow MK = BI$, mà $\angle AMK = \angle ABN$; $AM = AB$ nên $\triangle AMK = \triangle ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = AI$.

$\Rightarrow \angle MAK = \angle BAI$; mà $\angle MAK + \angle KAB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAI + \angle KAB = 90^\circ$ hay $AI \perp AK$.

Ví dụ 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D .

- Chứng minh rằng $BD = CD$.
- Tính góc B và C của tam giác ABC .

Giải

a) Gọi E là trung điểm của BC . Suy ra $BE = CE = AB \left(= \frac{1}{2} BC \right)$

$\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $BA = BE$; $\angle ABD = \angle EBD$ (giả thiết); BD là cạnh chung

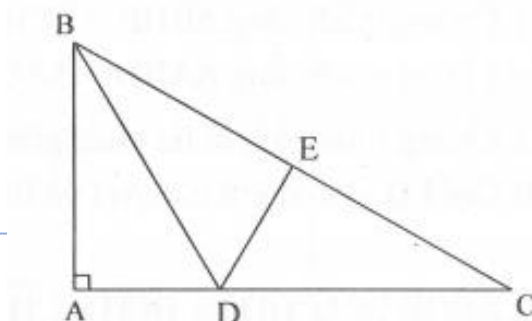
$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BAD = \angle BED \Rightarrow \angle BED = 90^\circ$.

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle CDE$ có: $\angle BED = \angle CED = 90^\circ$; $BE = CE$; DE chung

$\Rightarrow \triangle BDE = \triangle CDE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CD$

b) $\triangle BDE = \triangle CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle C = \angle DBE$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$\Rightarrow B = 2.C$$

Mặt khác: $B + C = 90^\circ$ (Vì $\triangle ABC$ vuông tại A)

$$\Rightarrow 2C + C = 90^\circ \Rightarrow C = 30^\circ; B = 60^\circ.$$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ$. Các tia phân giác góc B , góc C cắt nhau tại O và cắt AC ; AB theo thứ tự D ; E . Chứng minh rằng: $OD = OE$.

Giải

$\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$

Mà $A = 60^\circ$ nên $B + C = 120^\circ$.

$$\text{Ta có } B_1 + C_1 = \frac{1}{2}.B + \frac{1}{2}.C = 60^\circ.$$

$\triangle BOC$ có $BOC + B_1 + C_1 = 180^\circ$

Nên $BOC = 120^\circ$; $O_1 = 60^\circ$.

- Kẻ Ox là tia phân giác góc BOC , cắt BC tại I nên $O_2 = O_3 = 60^\circ$.

Xét $\triangle BEO$ và $\triangle BIO$ có $B_1 = B_2$ (giả thiết); $O_1 = O_2 (= 60^\circ)$; BO là cạnh chung

do đó $\triangle BEO = \triangle BIO$ (g.c.g). Suy ra $OE = OI$.

- Chứng minh tương tự ta có $\triangle COD = \triangle COI$ nên $OD = OI$.

Vậy $OE = OD (= OI)$.

*** Nhận xét.**

- Để chứng minh $OE = OD$, ta chưa thể ghép chúng vào hai tam giác nào bằng nhau được. Do vậy, ta nghĩ đến cách kẻ đường phụ. Cho số đo góc A ta liên hệ với bài đã biết nên tính được số đo góc BOC và góc BOE nên dựng được điểm I .

- Bài toán còn có cách khác, là lấy điểm I trên BC sao cho $BI = BE$, sau đó chứng minh $\triangle BOE = \triangle BOI$ rồi chứng minh $\triangle COD = \triangle COI$.

- Từ cách trên ta còn suy ra kết quả đẹp là $BE + CD = BC$.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC . Từ B kẻ $BD \perp AC$; $CE \perp AB$. Gọi H là giao điểm của BD và CE . Biết rằng $HD = HE$.

a) Chứng minh rằng $\triangle BHE = \triangle CHD$;

b) Chứng minh rằng $\triangle ABD = \triangle ACE$;

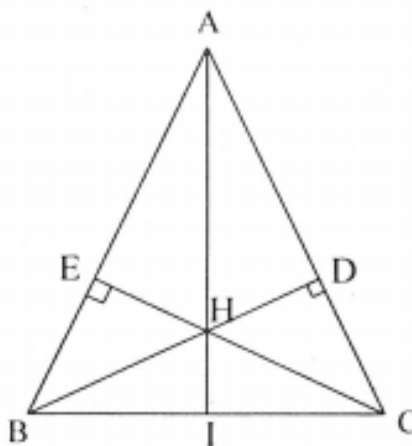
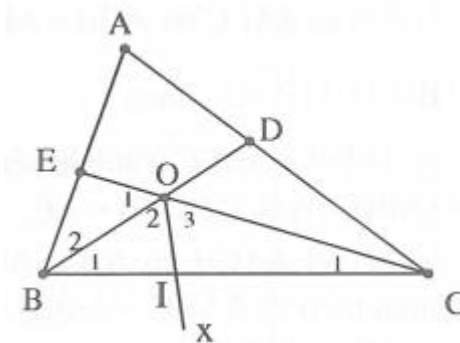
c) Chứng minh AH là tia phân giác của BAC .

d) Gọi I là giao điểm của AH và BC . Chứng minh rằng $AI \perp BC$.

Giải

a) $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có $BEH = CDH (= 90^\circ)$; $HD = HE$;

$$BHE = CHD$$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$\Rightarrow \triangle BHE = \triangle CHD (\text{g.c.g}).$$

$$\text{b) } \triangle BHE = \triangle CHD \Rightarrow BH = CH; \text{ mà } HD = HE$$

$$\Rightarrow BD = CE.$$

$\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có $\angle ADB = \angle AEC (= 90^\circ)$; $BD = CE$; BA chung

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle AEC \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}.$$

$$\text{c) } \triangle ABD = \triangle ACE \Rightarrow AB = AC.$$

$\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có $AB = AC$; AH là cạnh chung; $BH = CH$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH (\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \angle BAH = \angle CAH \Rightarrow AH \text{ là tia phân giác của } \angle BAC.$$

d) $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$; $\angle BAI = \angle CAI$; AI là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \angle AIB = \angle AIC; \text{ mà } \angle AIB + \angle AIC = 180^\circ \Rightarrow \angle AIB = \angle AIC = 90^\circ \text{ hay } AI \perp BC.$$

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng

$$AM = \frac{1}{2} BC.$$

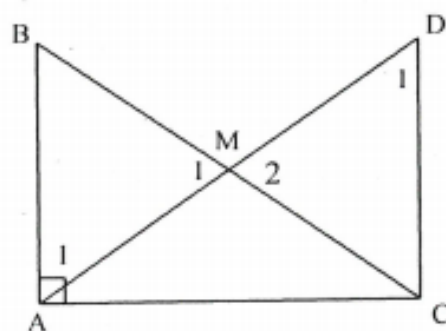
Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $AM = \frac{1}{2} BC$ ta cần chứng

minh $BC = 2.AM$. Về mặt suy luận, ta cần dựng một đoạn thẳng bằng $2.AM$ rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC .

* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Suy ra $AD = 2.AM$



$\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có $AM = MD$; $\angle M_1 = \angle M_2$; $MB = MC$ nên $\triangle AMB = \triangle DMC$.

Suy ra $AB = DC$; $\angle A_1 = \angle D_1$ nên $AB \parallel CD \Rightarrow DC \perp AC$.

$\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có $AB = DC$; $\angle BAC = \angle DCA (= 90^\circ)$, AC chung suy ra $\triangle ABC = \triangle CDA (\text{c.g.c})$

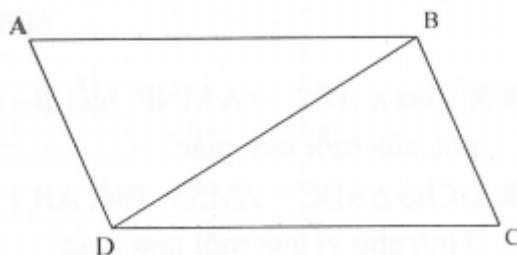
$$\Rightarrow BC = DA \Rightarrow BC = 2.AM \text{ hay } AM = \frac{1}{2} BC.$$

* *Nhận xét.* Bài này là một tính chất thú vị của tam giác vuông, thường được sử dụng trong những bài nổi trung điểm của cạnh huyền với đỉnh góc vuông.

Ví dụ 11: Cho hình vẽ bên.

Biết rằng $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$.

Chứng minh rằng: $AB = CD$, $AD = BC$.



Giải

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$AB \parallel CD \Rightarrow \angle ABD = \angle CDB$ (cặp so le trong)

$AD \parallel BC \Rightarrow \angle ADB = \angle CBD$ (cặp so le trong)

$\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có $\angle ABD = \angle CDB$, BD là cạnh chung, $\angle ADB = \angle CBD$.

Suy ra $\triangle ABD = \triangle CDB$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = CD$, $AD = BC$.

* **Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị, gọi là tính chất đoạn chắn song song. Tính chất này được vận dụng trong nhiều bài tập, đem lại hiệu quả cao.

C. Bài tập vận dụng

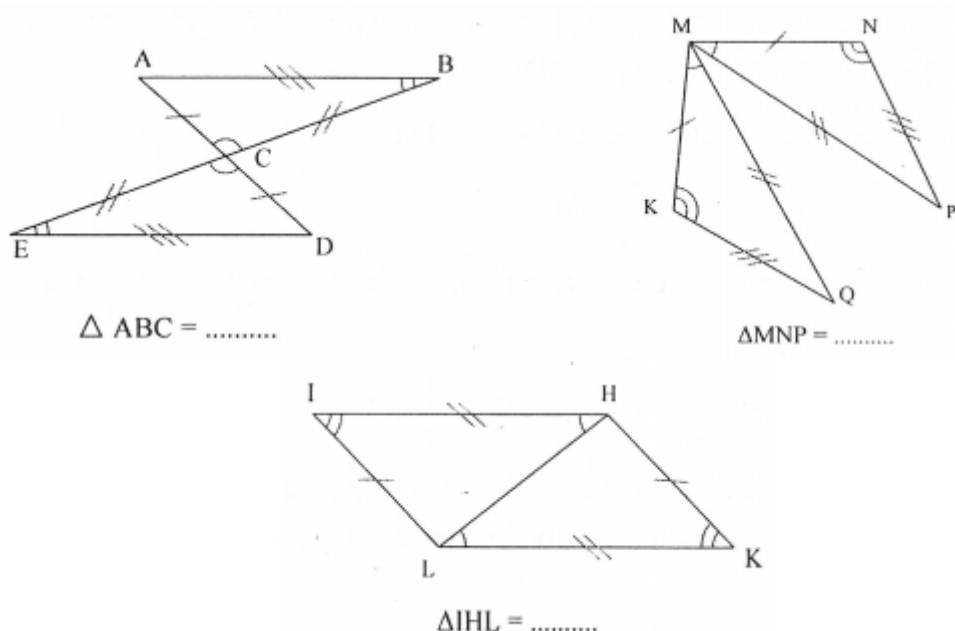
• Định nghĩa tam giác bằng nhau

2.1. Điền vào chỗ trống (.....) trong các phát biểu sau:

a) Nếu $\triangle ABC = \triangle MNP$ thì $AB = \dots\dots$; $\dots\dots = MP$; $BC = \dots\dots$

b) Nếu $\triangle IHK = \triangle DEF$ thì $\hat{I} = \dots\dots$; $\dots\dots = F$; $H = \dots\dots$

2.2. Điền vào ô trống:



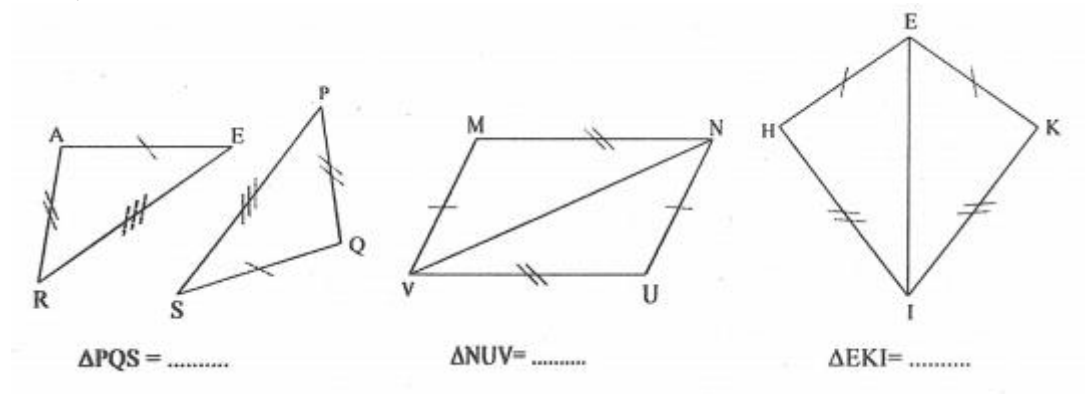
2.3. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$ biết $B - C = 10^\circ$; $N + P = 120^\circ$. Tính số đo các góc của mỗi tam giác.

2.4. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết $AB + AC = 9\text{cm}$; $MN - NP = 3\text{cm}$; $NP = 5\text{cm}$. Tính chu vi của mỗi tam giác.

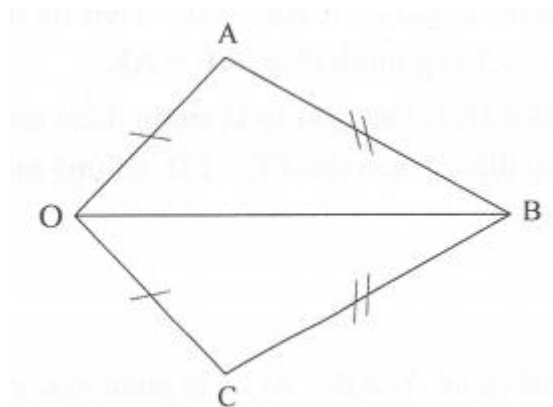
2.5. Cho $\triangle ABC = \triangle RST$, biết $\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3}$ và $ST - RS = 8\text{cm}$; $AC = 18\text{cm}$. Tính mỗi cạnh của mỗi tam giác.

• Trường hợp c.c.c

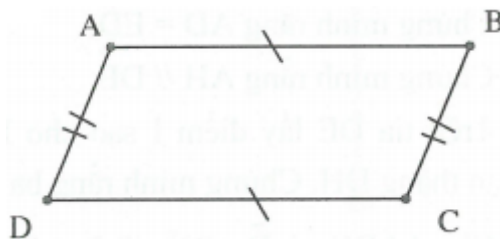
2.6. Điền vào ô trống:



2.7. Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng OB là tia phân giác của $\angle AOC$.



2.8. Trong hình vẽ bên biết $AB = CD$, $AD = BC$. Chứng minh: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



2.9. Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 50^\circ$; $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính các góc của $\triangle ABM$, $\triangle ACM$.

• Trường hợp c.g.c

2.10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Tia phân giác của $\angle ABC$ cắt AC ở D ; E là một điểm trên cạnh BC sao cho $BE = BA$.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ABD = \triangle EBD$.

b) Chứng minh rằng: $DE \perp BC$.

c) Gọi F là giao điểm của DE và AB . Chứng minh rằng $DC = DF$.

2.11. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh:

a) $ABH = ACK$;

b) $AH = AK$.

2.12. Cho tam giác ABC có $B = 2C$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Trên tia đối BD lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối CB lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng:
 $AE = AK$.

2.13. Cho $\triangle ABC$. Gọi $D; E$ theo thứ tự là trung điểm của AB, AC . Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $EF = ED$. Chứng minh:

a) $BD = CF$; $AB \parallel CF$.

b) $\triangle BCD = \triangle FDC$.

c) $DE \parallel BC$.

2.14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$. Tia phân giác của $\angle ABC$ cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H .

a) Chứng minh rằng $AD = ED$.

b) Chứng minh rằng $AH \parallel DE$.

c) Trên tia DE lấy điểm I sao cho $DI = AH$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng DH . Chứng minh rằng ba điểm A, O, I thẳng hàng.

2.15. Cho $\triangle ABC$ có $B < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A . Vẽ tia Bx vuông góc với BC . Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia By vuông góc với BA . Trên tia By lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $AD = CE$.

b) $AD \perp CE$.

2.16. Cho $\triangle ABC$ có $A < 90^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C kẻ tia Ax vuông góc với AB , trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B kẻ tia Ay vuông góc với AC . Trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Trên tia đối tia MA lấy $MN = MA$. Chứng minh rằng:

a) $BN = AE$;

b) $AM = \frac{DE}{2}$;

c) $AM \perp DE$.

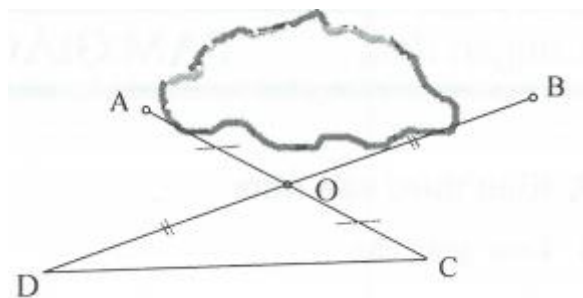
2.17. Để đo khoảng cách AB mà không đo trực tiếp, người ta đã thực hiện như sau:

- Chọn vị trí điểm O .

- Lấy điểm C trên tia đối tia OA sao cho $OC = OA$.

- Lấy điểm D trên tia đối tia OB sao cho $OD = OB$.

- Đo độ dài đoạn thẳng CD , đó chính là khoảng cách AB . Hãy giải thích tại sao?



• Trường hợp g.c.g

2.18. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác của $\angle B$; $\angle C$ của ABC và $\angle ACB$ cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho
 $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$.

a) Tính số đo của $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

2.19. Cho tam giác ABC có $B + C = 60^\circ$, tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $ABM = ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $ACN = ACO$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

2.20. Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm K và D sao cho $AK = BD$.

Vẽ $KI \parallel BC$; $DE \parallel BC$ ($I; E \in AC$).

a) Chứng minh $AI = CE$.

b) Tính độ dài $DE + KI$.

2.21. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc BC ($BM > MC$). Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM . Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABD = \triangle CAE$.

b) $BD - CE = DE$.

Hướng dẫn giải**• Định nghĩa tam giác bằng nhau****2.1. Đáp số:**

a) $AB = MN$; $AC = MP$; $BC = NP$.

b) $\hat{I} = D$; $K = F$; $H = E$.

2.2. Đáp số: $\triangle ABC = \triangle DEC$; $\triangle MNP = \triangle MKQ$; $\triangle IHL = \triangle KHL$.

2.3. $\triangle ABC = \triangle MNP$ suy ra: $B = N$; $C = P$ mà $N + P = 120^\circ$

$\Rightarrow B + C = 120^\circ$

Ta có: $B - C = 10^\circ$ nên $B = (120^\circ + 10^\circ) : 2 = 65^\circ$

$C = (120^\circ - 10^\circ) : 2 = 55^\circ$

$\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$

$A + 120^\circ = 180^\circ$; $A = 60^\circ$

Vậy $M = A = 60^\circ$; $N = B = 65^\circ$; $P = C = 55^\circ$.

2.4. $\triangle ABC = \triangle MNP \Rightarrow AB = MN$; $BC = NP$; $AC = MP$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $AB + AC = 9\text{cm} \Rightarrow MN + MP = 9\text{cm}$, mà $MN - NP = 3\text{cm}$, nên

$MN = (9 + 3) : 2 = 6(\text{cm})$

$MP = (9 - 3) : 2 = 3(\text{cm})$

Do đó chu vi $\triangle MNP$ là: $MN + NP + MP = 6 + 5 + 3 = 14\text{cm}$.

Vì $\triangle ABC = \triangle MNP$ nên chu vi $\triangle ABC$ bằng chu vi $\triangle MNP$ và bằng 14cm .

2.5. $\triangle ABC = \triangle RST \Rightarrow AB = RS$; $BC = ST$; $AC = RT$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $ST - RS = 8\text{cm} \Rightarrow BC - AB = 8\text{cm}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} = \frac{BC - AB}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow BC = 4 \cdot 5 = 20\text{cm}; AB = 4 \cdot 3 = 12\text{cm}.$$

Vậy: $AB = RS = 12\text{cm}$; $AC = RT = 18\text{cm}$; $BC = ST = 20\text{cm}$.

• Trường hợp c.c.c

2.6. Đáp số: $\triangle PQS = \triangle RAE$; $\triangle NUV = \triangle VMN$; $\triangle EKI = \triangle EHI$.

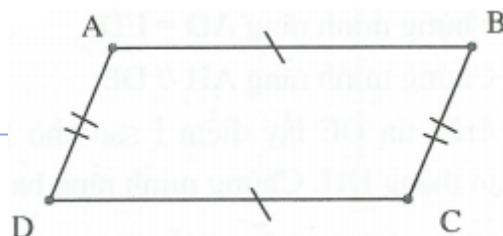
2.7. $\triangle OAB$ và $\triangle OCB$ có $OA = OC$; $AB = CB$; OB chung

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle AOB = \angle COB$ (cặp góc tương ứng), hay OB là tia phân giác của $\angle AOC$.

2.8. Nối AC.Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$AB = CD$; $AD = BC$; AC cạnh chung



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Nên $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.c.c)

Suy ra $\angle DAC = \angle BCA$.

Mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AD \parallel CD$.

$\angle BAC = \angle DCA$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \parallel CD$.

2.9. $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có AM chung; $AB = AC$; $BM = CM$

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CAM$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CAM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$.

$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC$ (góc tương ứng).

Mà $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ nên $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$.

$\triangle AMB$ có $\angle ABM + \angle BAM + \angle AMB = 180^\circ$.

$\angle ABM + 25^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle ABM = 65^\circ$ suy ra $\angle ACM = 65^\circ$.

• Trường hợp c.g.c

2.10.

a) $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $AB = BE$; $\angle ABD = \angle EBD$; BD chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c).

b) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow \angle BED = \angle BAD$

$\Rightarrow \angle BED = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AB$.

c) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow AD = ED$.

$\triangle ADF$ và $\triangle EDC$ có $\angle ADF = \angle EDC$; $AD = ED$;

$\angle FAD = \angle DEC = (90^\circ)$

$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle EDC$ (g.c.g) $\Rightarrow DC = DF$.

2.11.

a) $\triangle ABD$ có $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ABD + \angle BAC = 90^\circ$ (1)

$\triangle ACE$ có $\angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACE + \angle BAC = 90^\circ$ (2)

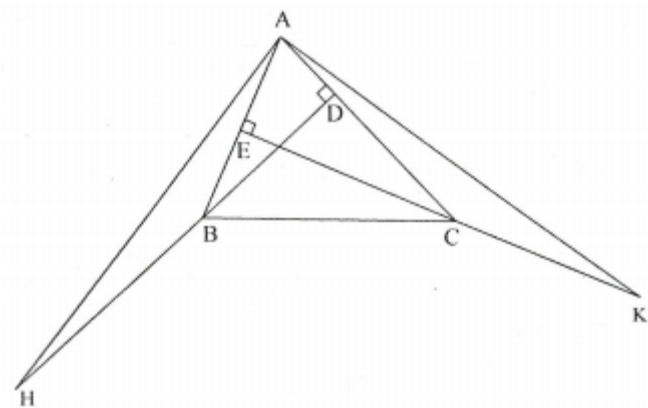
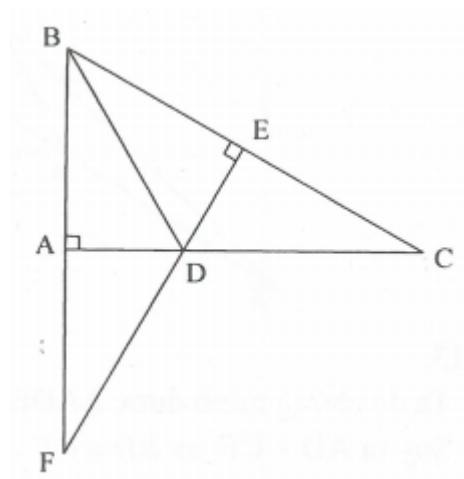
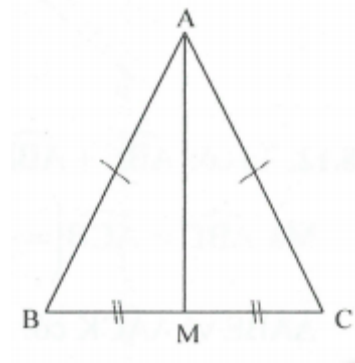
Từ (1) và (2), suy ra: $\angle ABD = \angle ACE$ do đó

$\angle ABH = \angle ACK$.

b) $\triangle ABH$ và $\triangle KCA$ có $AB = CK$; $\angle ABD = \angle ACE$;

$\angle BH = \angle AC$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCA$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AK$.

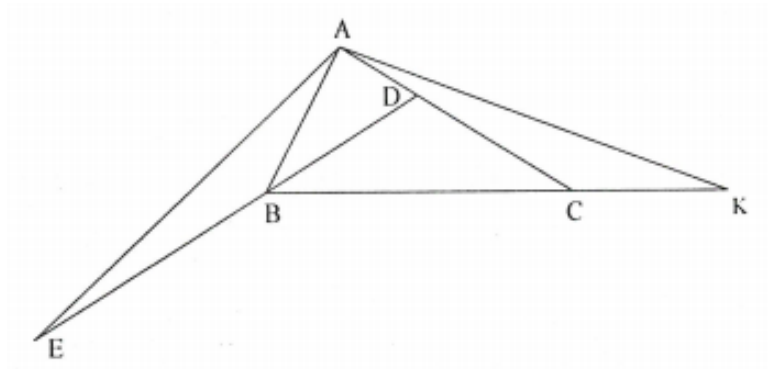


2.12. Ta có: $\angle ABE + \angle ABD = 180^\circ$; $\angle ACK + \angle ACB = 180^\circ$ (cặp góc kề bù)

$$\text{Mà } \angle ABD = \angle ACB = \left(\frac{1}{2} \angle ABC\right) \Rightarrow \angle ABE = \angle ACK.$$

$\triangle ABE$ và $\triangle ACK$ có: $AB = CK$; $\angle ABD = \angle ACK$; $BE = AC$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle KCA (\text{c.g.c}) \Rightarrow AE = KA.$$



8.13.

a) Ta dễ chứng minh được $\triangle ADE = \triangle CFE$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra } AD = CF \Rightarrow BD = CF$$

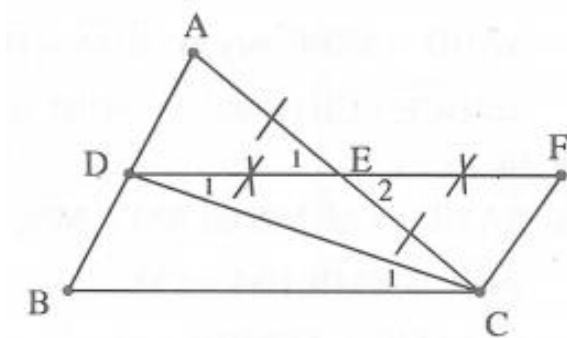
Và $\angle A = \angle FCE$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $CF \parallel AB$.

b) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle FCD$ có $BD = FC$ (chứng minh trên); $\angle BDC = \angle FCD$ (so le trong $AB \parallel CF$); CD là cạnh chung

$$\text{do đó: } \triangle BDC = \triangle FCD (\text{c.g.c}).$$

c) $\triangle BDC = \triangle FCD$ (chứng minh trên) nên $\angle D_1 = \angle C_1$, mà hai góc ở vị trí so le trong suy ra $DE \parallel BC$.

* Nhận xét. Từ kết luận $\triangle BDC = \triangle FCD$, chúng ta còn suy ra được: $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$.



2.14.

a) $\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $\angle ABD = \angle EBD$ (giả thiết); $BE = BA$; BD là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AD = ED.$$

b) $\triangle ABD = \triangle EBD \Rightarrow \angle BAD = \angle BED$

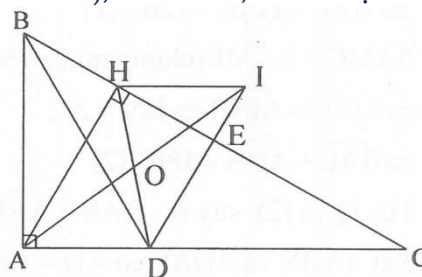
$$\Rightarrow \angle BED = 90^\circ \Rightarrow DE \perp BC,$$

Mà $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel DE$.

c) $AH \parallel DE \Rightarrow \angle AHO = \angle IDO$ (cặp góc so le trong).

$\triangle AHO$ và $\triangle IDO$ có $\angle AHO = \angle IDO$; $OH = OD$; $AH = ID$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle IDO (\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle AOH = \angle IOD.$$



Mà $\angle AOH + \angle AOD = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle IOD + \angle AOD = 180^\circ$.

Suy ra A, O, I thẳng hàng.

2.15.

a) $\angle CBD = \angle ABE (= 90^\circ)$

$$\Rightarrow \angle CBA + \angle ABD = \angle CBA + \angle CBE$$

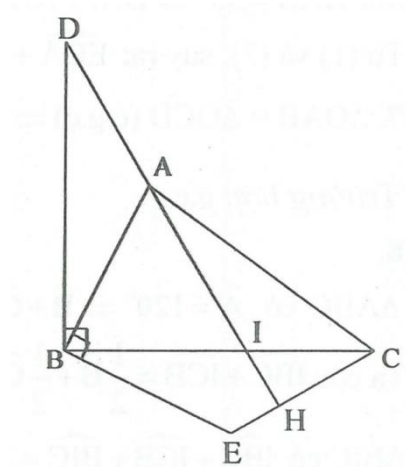
$$\Rightarrow \angle ABD = \angle CBE$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBC$ có $AB = EB$; $\angle ABD = \angle CBE$

(cùng phụ với góc $\angle ABC$); $BD = BC$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AD = CE.$$



b) Gọi H, I là giao điểm của đường thẳng AD với CE và BC . $\triangle ABD = \triangle EBC$ suy ra: $\angle BDA = \angle BCE$
mà $\angle BDA + \angle BIA = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle BCE + \angle CIH = 90^\circ \Rightarrow \triangle CIH \text{ vuông, hay } AD \perp CE.$$

2.16.

a) $\triangle AMC$ và $\triangle NMB$ có $AM = MN$; $\angle AMC = \angle NMB$;

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle NMB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = BN \text{ mà } AC = AE$$

$$\Rightarrow BN = AE.$$

b) Ta có $\angle BAD = 90^\circ$; $\angle CAE = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAC + \angle DAE = 180^\circ \quad (1)$$

$\triangle AMC = \triangle NMB$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MNB \Rightarrow BN \parallel AC$$

$$\Rightarrow \angle BAC + \angle ABN = 180^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle DAE = \angle ABN$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle DAE$ có $AD = BA$; $\angle DAE = \angle ABN$;

$$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle DAE \text{ (c.g.c)}$$

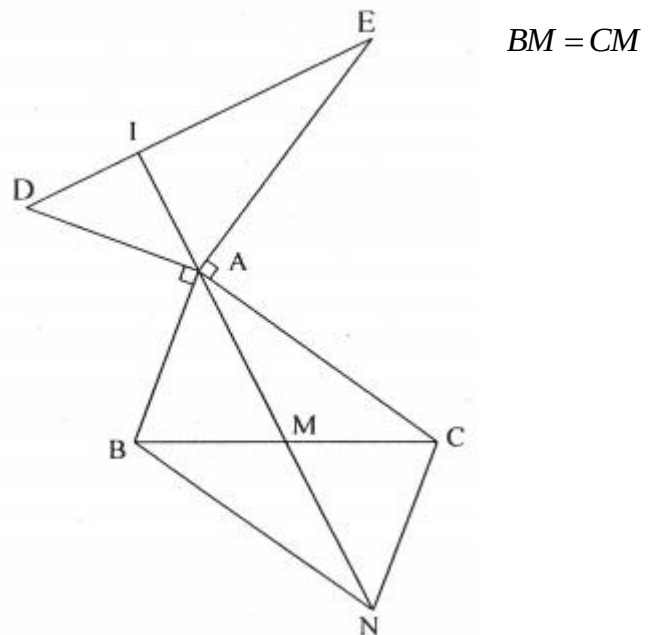
$$\Rightarrow AN = DE; \text{ mà } AN = 2.AM \Rightarrow AM = \frac{DE}{2}.$$

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM và DE .

$$\triangle ABN = \triangle DAE \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \angle EDA = \angle NAB \quad (1)$$

$$\text{Mà } \angle DAB = 90^\circ \Rightarrow \angle DAI + \angle NAB = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle EDA + \angle DAI = 90^\circ$ hay $AM \perp DE$.



$$BM = CM$$

$$AE = BN$$

2.17. $\triangle OAB = \triangle OCD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD$.

• Trường hợp g.c.g

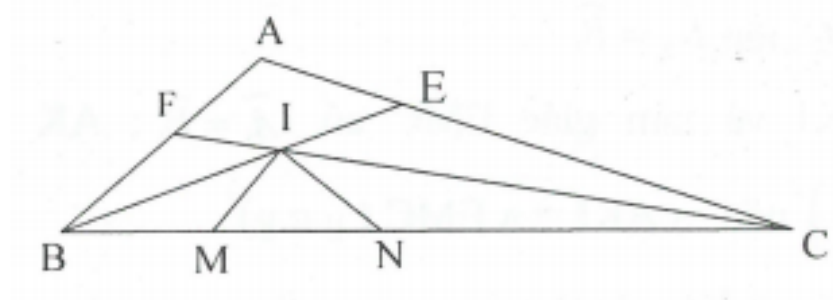
2.18.

a) $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ \Rightarrow B + C = 60^\circ$.

Ta có: $IBC + ICB = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ$.

$\triangle BIC$ có $IBC + ICB + BIC = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + BIC = 180^\circ \Rightarrow BIC = 150^\circ$.

Từ đó $MIN = BIC - BIM - CIN \Rightarrow MIN = 150^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.



b) $BIC = 150^\circ \Rightarrow BIF = CIE = 30^\circ$.

$\triangle CIN$ và $\triangle CIE$ có $ECI = NCI$; CI là cạnh chung; $EIC = NIC (= 30^\circ)$

$\Rightarrow \triangle CIN = \triangle CIE$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CN$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\triangle BFI = \triangle BMI$ (g.c.g) $\Rightarrow BM = BF$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CE + BF = CN + BM < BC$.

2.19. $\triangle ABC$ có $B + C = 60^\circ \Rightarrow BAC = 120^\circ$.

Ta có AD là tia phân giác $BAC \Rightarrow BAD = CAD = \frac{1}{2}BAC = 60^\circ$.

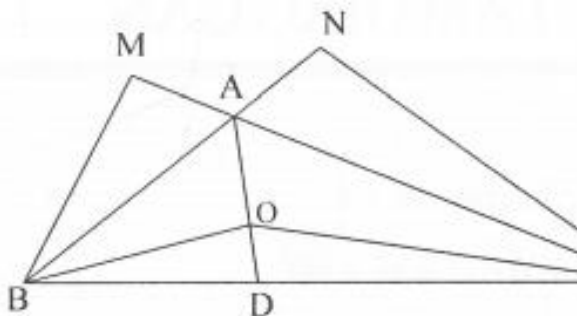
$\triangle ABO$ và $\triangle ABM$ có $BAO = BAM (= 60^\circ)$; AB chung; $ABM = ABO$

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = AO$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle ACO = \triangle ACN$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = AO$ (2)

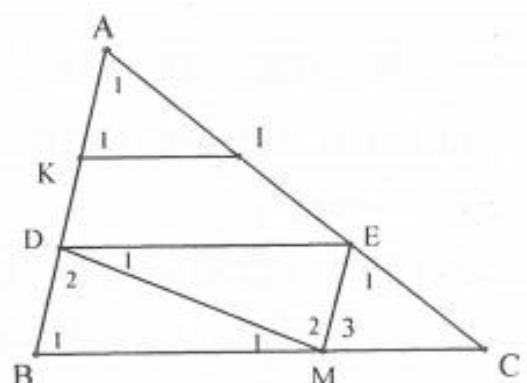
Từ (1) và (2),

suy ra: $AM = AN$.



2.20.

a) Kẻ $EM \parallel AB$ ($M \in BC$)



Tam giác DEM và tam giác MBD có $D_1 = M_1$; DM chung; $D_2 = M_2$

nên $\triangle DEM = \triangle MBD$ (g.c.g) suy ra $BD = ME$; $DE = BM$.

Ta có $AB \parallel EM$ nên $A_1 = E_1$; $B_1 = M_3$

Lại có $KI \parallel BC$ nên $K_1 = B_1$.

- Tam giác AKI và tam giác EMC có $A_1 = E_1$; $AK = EM (= BD)$; $M_3 = K_1 (= B_1)$

Nên $\triangle AKI = \triangle EMC$ (g.c.g)

Suy ra $AI = EC$ và $KI = MC$.

b) Ta có $KI = MC$; $DE = BM$ suy ra $KI + DE = MC + BM = BC = 5\text{cm}$.

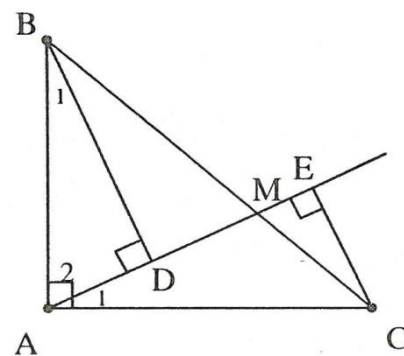
2.21.

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có $BDA = AEC = 90^\circ$; $AB = AC$ (giả thiết); $B_1 = C_1$ (cùng phụ với A_2)

do đó $\triangle ABD = \triangle CAE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\triangle ABD = \triangle CAE$ nên $BD = AE$; $AD = CE$ do đó $BD - CE = AE - AD$. Vậy $BD - CE = DE$.

* **Nhận xét.** Để chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng cộng, trừ đoạn thẳng.



Chuyên đề 3. TAM GIÁC CÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tam giác cân

a) **Định nghĩa.** Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ABC \\ AB = AC \end{cases}$$

b) **Tính chất.** Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

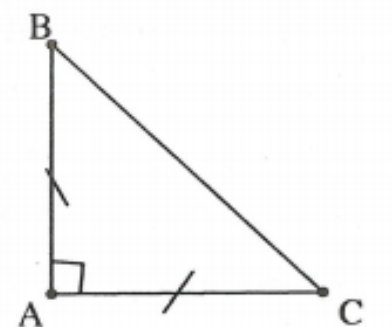
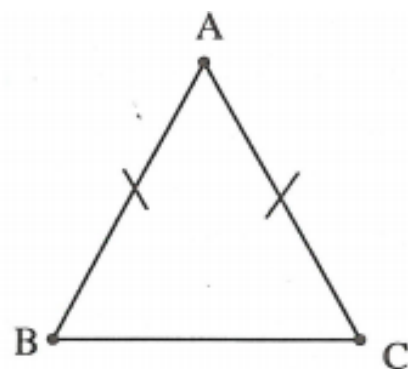
$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow B = C.$$

c) **Dấu hiệu nhận biết**

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

2. Tam giác vuông cân

a) **Định nghĩa.** Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ A = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$$

b) *Tính chất.* Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45° .

$$B = C = 45^\circ.$$

3. Tam giác đều

a) *Định nghĩa.* Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

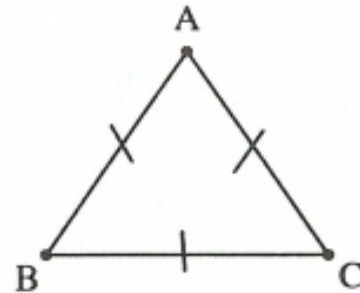
$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$$

b) *Tính chất.* Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .

$$A = B = C = 60^\circ.$$

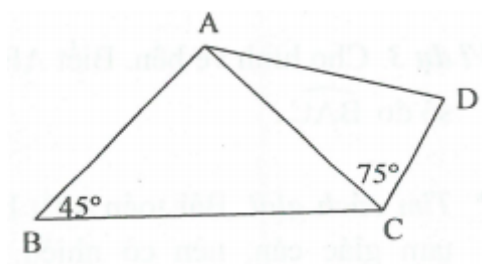
c) *Dấu hiệu nhận biết*

- Theo định nghĩa.
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.
- Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC = AD$; $ABC = 45^\circ$; $ACD = 75^\circ$. Tính số đo góc BAD .



Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta lưu ý rằng: trong một tam giác cân, nếu biết một góc thì tính được hai góc còn lại. Chẳng hạn: nếu ΔABC cân tại A thì $A = 180^\circ - 2.B = 180^\circ - 2.C$ hoặc

$$B = C = \frac{180^\circ - A}{2}.$$

* *Trình bày lời giải.*

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } BAC = 180^\circ - 2ABC = 90^\circ.$$

$$\Delta ACD \text{ cân tại } A \text{ nên } CAD = 180^\circ - 2ACD = 30^\circ.$$

Ta có $BAD = BAC + CAD = 120^\circ$.

Ví dụ 2:

a) Một tam giác cân có một góc là 80° . Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

b) Một tam giác cân có một góc là 100° . Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

Giải

a) Nếu góc ở đỉnh tam giác cân là 80° , thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$.

- Nếu mỗi góc ở đáy tam giác cân là 80° , thì góc ở đỉnh tam giác cân là $180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$.

b) Nếu góc ở đáy tam giác cân là 100° , thì tổng hai góc ở đáy là $100^\circ + 100^\circ = 200^\circ > 180^\circ$ (không xảy ra).

Do đó góc ở đỉnh tam giác cân là 100° , thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$.

* **Nhận xét.** Bài toán này dễ bỏ sót các trường hợp. Khi đề bài chưa cho cụ thể số đo đó là số đo góc ở đỉnh hay ở đáy, ta cần xét hai trường hợp.

Ví dụ 3: Cho hình vẽ bên. Biết $AB = AC$; $AE = DE = CD$ và $BC = CE$. Tính số đo BAC .

Giải

* **Tìm cách giải.** Bài toán xuất hiện nhiều tam giác cân, nên có nhiều góc bằng nhau. Để lời giải giản đơn, không bị nhầm lẫn, chúng ta nên đặt góc nhỏ nhất trong hình vẽ là x . Sau đó biểu diễn các góc khác theo x . Trong quá trình giải, lưu ý tính chất góc của tam giác cân và tính chất góc ngoài của tam giác.

* **Trình bày lời giải.**

$\triangle DEC$ cân tại D . Đặt $DCE = DEC = x$.

$\triangle DEC$ có $ADE = DCE + DEC = 2x$ (góc ngoài tam giác).

$\triangle AED$ cân tại E nên $EAD = ADE = 2x$.

$\triangle AEC$ có: $BEC = CAE + ECA = 3x$ (góc ngoài tam giác)

$\triangle BCE$ cân tại C nên $B = BEC = 3x$.

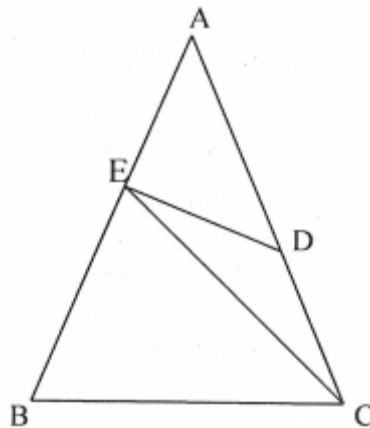
$\triangle ABC$ cân tại A nên $BCA = B = 3x$.

$\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$.

Suy ra $2x + 3x + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 22,5^\circ$.

Do đó: $BAC = 2.22,5^\circ = 45^\circ$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy điểm E sao cho $EBC = 2.ABE$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh MBC và BMC .



Giải

* **Cách 1.** Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC \Rightarrow \triangle BKC$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle BCK = \angle BKC = \frac{180^\circ - \angle KBC}{2} = 90^\circ - \angle ABE = \angle AEB$$

$$\Rightarrow \triangle CEK \text{ cân tại } C \Rightarrow CE = CK;$$

$$\angle CEK = \angle CKE \Rightarrow \angle CEB = \angle CKM$$

$$\text{Mà } BK = EM \Rightarrow BE = KM$$

$$\Rightarrow \triangle CEB = \triangle CKM \text{ (c.g.c)}, \text{ suy ra } \angle MBC = \angle BMC.$$

* **Cách 2.** Kẻ $MH \perp AC$ ($H \in AC$)

Gọi MH cắt tia phân giác CBE tại I .

$$\text{Ta có: } \angle ABE = \angle EBI = \angle IBC \left(= \frac{1}{2} \angle EBC \right)$$

$$\text{mà } \angle ABE = \angle EMI \text{ (so le trong)} \Rightarrow \angle EMI = \angle CBI \left(= \angle ABE \right).$$

$$\triangle BIM \text{ có } \angle IBM = \angle IMB \Rightarrow \triangle BIM \text{ cân} \Rightarrow IB = IM.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \triangle IBC = \triangle IME \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \triangle IEC \text{ cân tại } I, \text{ mà } IH \perp EC$$

$$\text{nên dễ có } \triangle EMH = \triangle CMH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow EM = CM \Rightarrow BC = CM$$

$$\Rightarrow \triangle BCM \text{ cân tại } C \text{ suy ra } \angle MBC = \angle BMC.$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao điểm của AB và DC .

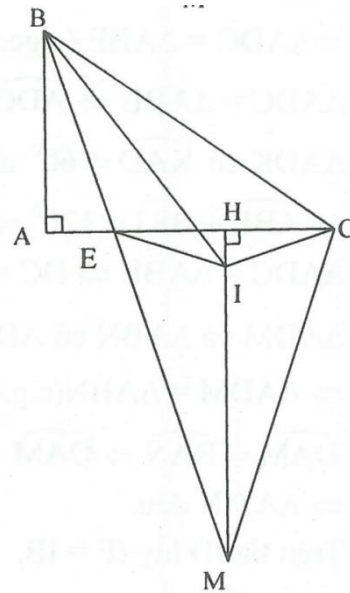
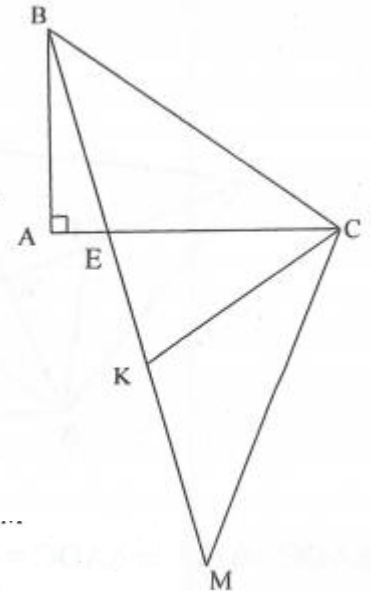
a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

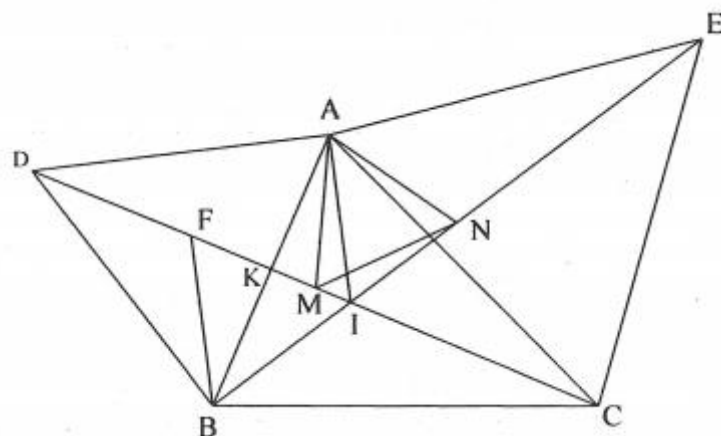
b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

e) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc DIE .

Giải



a) $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE = (60^\circ + \angle BAC)$; $AC = AE$

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c).

b) $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ADC = \angle ABE$.

$\triangle ADK$ có $\angle KAD = 60^\circ$ nên $\angle ADC + \angle AKD = 120^\circ$

$\Rightarrow \angle ABE + \angle BKI = 120^\circ \Rightarrow \angle BIK = 60^\circ$ hay $\angle DIB = 60^\circ$.

c) $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow DC = BE \Rightarrow DM = BN$.

$\triangle ADM$ và $\triangle ABN$ có $AD = AB$; $\angle ADK = \angle ABN$; $DM = BN$

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle ABN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân.

$\angle DAM = \angle BAN \Rightarrow \angle DAM + \angle MAB = \angle MAB + \angle BAN \Rightarrow \angle MAN = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy $IF = IB$.

Ta có $\angle BIF = 60^\circ$ nên $\triangle BIF$ là tam giác đều.

Xét $\triangle BFD$ và $\triangle BIA$ có $BD = BA$; $\angle DBF = \angle ABI = (60^\circ - \angle FBA)$; $BF = BI$

Suy ra $\triangle BFD = \triangle BIA$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = IA$.

Do đó $IA + IB = DF + FI = ID$.

e) $\triangle BIF$ đều nên $\angle BFI = 60^\circ \Rightarrow \angle BFD = 120^\circ \Rightarrow \angle BIA = 120^\circ$.

Mà $\angle BID = 60^\circ$ nên $\angle DIA = 60^\circ \Rightarrow \angle AIE = 60^\circ$. Do đó $\angle AID = \angle AIE (= 60^\circ)$

hay IA là tia phân giác của góc DIE .

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đoạn thẳng AM . Trên tia đối tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2.MH$. Chứng minh $BN = AC$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán chưa thể ghép BN và AC vào hai tam giác bằng nhau trực tiếp được. Mặt khác $MB = MC$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc trên tia đối của tia MA lấy

Trên tia đối của tia MA lấy $MD = MA$.

Suy ra $\Delta ACM = \Delta DBM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = BD.$$
$$HD = MD + HM = AM + HM \Rightarrow HN = HD.$$

$\triangle BDN$ có $BH \perp DN$; $HD = HN \Rightarrow \triangle BDN$ cân tại $B \Rightarrow BN = BD$.

Vậy $BN = AC$.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C sao cho tam giác DAB vuông cân tại D ; điểm E (khác A) không thuộc đoạn AD . Đường thẳng qua E , vuông góc với BE cắt AC tại F . Chứng minh rằng $EF = EB$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $EF = EB$, thông thường chúng ta nghĩ tới việc ghép vào hai tam giác, sau đó chứng minh hai tam giác bằng nhau. Tuy nhiên, với hình vẽ chúng ta chưa thể ghép được. Phân tích đề bài, chúng ta có nhiều góc vuông, góc 45° cũng như cặp cạnh bằng nhau $DA = DB$, $AB = AC$. Với sự phân tích trên, chúng ta nghĩ tới việc kẻ thêm đường phụ nhằm kết hợp được giả thiết với nhau cũng như ghép EF và EB là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Từ đó chúng ta có hai hướng giải sau:

- *Cách 1.* Có thể EF ghép vào $\triangle AEF$ có $\angle EAF = 135^\circ$ nên cần ghép EB vào tam giác có góc đối diện với nó cũng bằng 135° . Khai thác yếu tố tam giác vuông cân ADB , ta lấy điểm K trên BD sao cho $\triangle DEK$ vuông cân.
- *Cách 2.* Nhận thấy $\angle BAD = 45^\circ$, tia AD là tia phân giác góc ngoài đỉnh A của $\triangle ABC$, nên có thể kẻ EM, EN vuông góc với các đường thẳng AC, AB . Dễ chứng minh được $EM = EN$. Từ đó cũng có lời giải.

* Trình bày lời giải.

- Cách 1. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho

$BK = EA$ (1). Vì tam giác DAB vuông cân tại D nên $\triangle DKE$ vuông cân tại D , suy ra $DKE = 45^\circ$, do đó: $BKE = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;

Mà $EAF = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$,

Nên $BKE = EAF$ (2)

Mặt khác, $KBE = 90^\circ - DEB = AEF$ (3) (do $BEF = 90^\circ$)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\triangle BKE = \triangle EAF$ (g.c.g)

Từ đó $EF = EB$.

- Cách 2. Vẽ EM , EN vuông góc với các đường thẳng AC , AB .

$\triangle AME$ và $\triangle ANE$ có: $\angle AME = \angle ANE (= 90^\circ)$; $\angle MAE = \angle NAE (= 45^\circ)$;
 AE là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle AME = \triangle ANE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EM = EN$.

Mặt khác, $\triangle AME$ và $\triangle ANE$ là tam giác vuông cân, suy ra $\angle MEN = 90^\circ$.

$\triangle BNE$ và $\triangle FME$ có: $\angle ENB = \angle EMF (= 90^\circ)$; $\angle BEN = \angle FEM (= 90^\circ - \angle FEN)$; $EN = EM$

$\Rightarrow \triangle BNE = \triangle FME$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow EF = EB$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\angle ABC = 30^\circ$. Chứng minh rằng $AC = \frac{1}{2}BC$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Từ đề bài, suy ra được. Gọi cho chúng ta liên tưởng tới góc của tam giác đều.

Phân tích kết luận $AC = \frac{1}{2}BC$, dễ dàng cho chúng ta hai hướng suy luận:

• *Hướng 1.* Tạo ra một đoạn thẳng bằng $2.AC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng BC . Chú ý $\angle ACB = 60^\circ$, nên chúng ta dựng điểm D trên tia CA sao cho $CD = 2.AC$, sau đó chứng minh $BC = CD$. Bài toán được giải quyết.

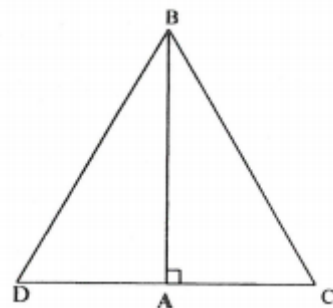
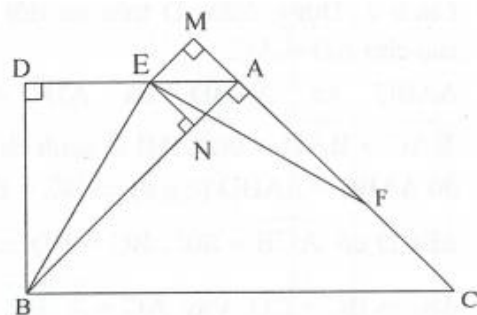
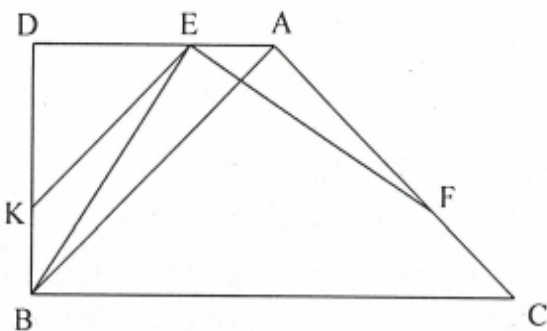
• *Hướng 2.* Tạo ra một đoạn thẳng bằng $\frac{1}{2}.BC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng AC .

Chú ý $\angle ACB = 60^\circ$, nên chúng ta gọi trung điểm M của BC . Sau đó chứng minh $CM = AC$. Bài toán được giải quyết.

* *Trình bày lời giải.*

• *Cách 1.* Dựng điểm D trên tia đối tia AC sao cho $AD = AC$.

$\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có $AD = AC$; $\angle BAC = \angle BAD = 90^\circ$; AB là cạnh chung,
do đó $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = BD$.



$\triangle BCD$ có $ACB = 60^\circ$, $BC = BD \Rightarrow \triangle BCD$ đều $\Rightarrow BC = CD$. Vậy $AC = \frac{1}{2} \cdot BC$.

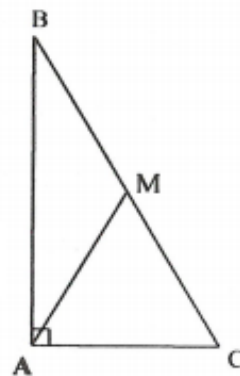
• Cách 2. Gọi M trung điểm của BC .

$\triangle ABC$ vuông tại A có M là trung điểm của BC , suy ra: $MA = MB = MC$ (theo ví dụ 10, chuyên đề 8).

$\triangle MAC$ có $MA = MC$, $ACB = 60^\circ$ nên $\triangle MAC$ là tam giác đều, suy ra

$$AC = MC. \text{ Vậy } AC = \frac{1}{2} BC.$$

* **Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị về một tam giác vuông đặc biệt. Tính chất được phát biểu như sau: Trong một tam giác vuông có một góc bằng 30° , thì cạnh đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền.



Ví dụ 9: Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC . Biết rằng $AM = \frac{1}{2} \cdot BC$, chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .

Giải

$\triangle AMC$ có $AM = CM$, nên $\triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow A_2 = C_2$.

$\triangle AMB$ có $AM = BM$, nên $\triangle AMB$ cân tại $M \Rightarrow A_1 = B_1$.

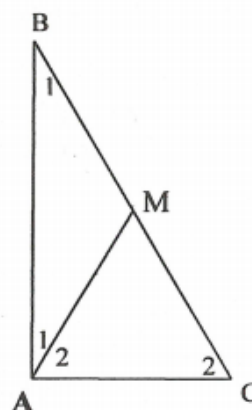
$\triangle ABC$ có $A + B_2 + C_1 = 180^\circ$

$$\Rightarrow A + A_2 + A_1 = 180^\circ \Rightarrow 2A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A = 90^\circ.$$

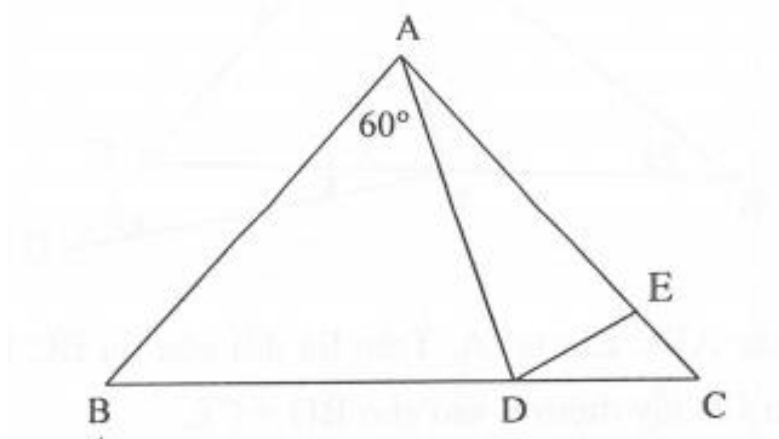
Vậy tam giác ABC vuông tại A .

* **Nhận xét.** Đây là một tính chất thú vị để nhận biết tam giác vuông.



C. Bài tập vận dụng

3.1. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC$; $AD = AE$ và $BAD = 60^\circ$. Tính số đo góc CDE .



3.2. Tam giác ABC có $B = 80^\circ$ và điểm D trên cạnh AC . Lấy E thuộc AB , F thuộc BC sao cho $AE = AD$ và $CF = CD$. Tính số đo góc EDF .

3.3. Cho tam giác ABC vuông tại B ($AB > BC$). Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC và

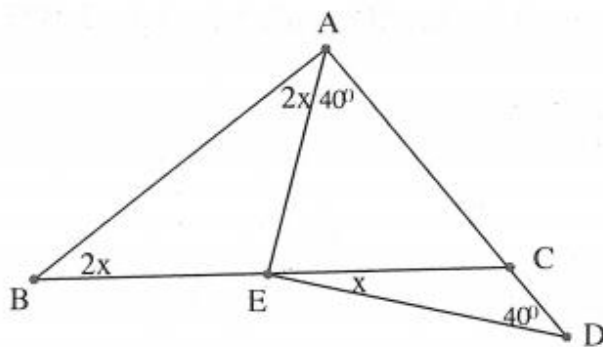
AB lần lượt tại D và E . Biết rằng $\frac{DCE}{5} = \frac{BCE}{2}$. Tính số đo $\angle ACB$.

3.4. Cho tam giác ABC có đường phân giác góc A cắt BC tại D . Biết rằng $\angle BAC = 114^\circ$;
 $AB + BD = AC$. Tính số đo góc $\angle ACB$.

3.5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA$;
 $CN = CA$. Tính góc $\angle MAN$.

3.6. Cho tam giác ABC nhọn. Lấy D thuộc AC sao cho $AB = BD$, lấy điểm E thuộc AB sao cho
 $AC = CE$. Gọi F là giao điểm của BD và CE . Biết $\angle BFC = 150^\circ$. Tính số đo góc $\angle BAC$.

3.7. Tìm x trong hình vẽ sau:



3.8. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác cân.

b) Kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), kẻ $CK \perp AE$ ($K \in AE$). Chứng minh rằng $BH = CK$.

c) Gọi O là giao điểm của BH và CK . Tam giác OBC là tam giác gì? Vì sao?

3.9. Cho tam giác ABC có $\angle B = 2\angle C$. Kẻ AH vuông góc BC (H thuộc BC). Trên tia đối BA lấy
 $BE = BH$. Đường thẳng EH cắt AC tại F . Chứng minh:

a) $FH = FA = FC$.

b) $AE = HC$.

3.10. Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$), đường cao AH . Kẻ HI vuông góc với AB , kẻ HK vuông góc với AC . Gọi $E; F$ lần lượt là điểm sao cho $I; K$ lần lượt là trung điểm của HE và HF . Đường thẳng EF cắt $AB; AC$ lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$;

b) HA là phân giác của $\angle MHN$.

3.11. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tam giác đều ACD và BCE . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD . Chứng minh rằng:

a) $AE = BD$.

b) $\triangle CME = \triangle CNB$.

c) Tam giác MNC là tam giác đều.

3.12. Cho tam giác LMN có 3 góc đều nhọn. Dựng ra phía ngoài tam giác ấy ba tam giác đều LMA ; MNB và NLC . Chứng minh rằng: $LB = MC = NA$.

3.13. Cho góc $xOz = 120^\circ$. Oy là tia phân giác xOz ; Ot là tia phân giác của xOy . M là điểm miền trong góc yOz . Vẽ MA vuông góc Ox , MB vuông góc Oy , MC vuông góc Ot . Chứng minh rằng: $OC = MA - MB$.

3.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc kẻ từ A và E với CD cắt BC ở G và H . Đường thẳng EH và đường thẳng AB cắt nhau ở M . Đường thẳng kẻ từ A song song với BC cắt MH ở I . Chứng minh rằng:

a) $\triangle ACD = \triangle AME$;

b) $\triangle AGB = \triangle MIA$;

c) $BG = GH$.

3.15. Cho tam giác ABC với $\angle ABC = \angle ACB = 36^\circ$. Trên tia phân giác của góc ABC lấy điểm N sao cho $\angle BCN = 12^\circ$. Hãy so sánh độ dài của CN và CA .

3.16. Cho $\triangle ABC$ có các tia phân giác trong của góc B và C cắt nhau tại I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB , AC tại D và E . Chứng minh $BD + CE = DE$.

3.17. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC . Biết rằng AM là phân giác góc BAC . Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ cân.

3.18. Cho M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều ABC . Chứng minh rằng từ ba đoạn MA , MB , MC ta có thể dựng được một tam giác.

Hướng dẫn giải

3.1. $\triangle ABC$ ($AB = AC$) cân. Đặt $B = C = \alpha$

$\triangle ABD$ có $\angle ADC = B + \angle BAD = \alpha + 60^\circ$.

$\triangle ADE$ ($AD = AE$) cân nên $\angle ADE = \angle AED$

$$\Rightarrow \angle AED + \angle CDE = \angle ADE + \angle CDE = \angle ADC = \alpha + 60^\circ$$

$\triangle CED$ có $\angle AED = C + \angle CDE$.

Từ đó suy ra:

$$C + \angle CDE + \angle CDE = \angle AED + \angle CDE = \angle ADC = \alpha + 60^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + 2 \cdot \angle CDE = \alpha + 60^\circ \Rightarrow \angle CDE = 30^\circ.$$

3.2. $\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ$ mà $B = 80^\circ \Rightarrow A + C = 100^\circ$.

$$\triangle AED \text{ cân tại } A \Rightarrow D_1 = \frac{180^\circ - A}{2}.$$

$$\triangle CDF \text{ cân tại } C \Rightarrow D_2 = \frac{180^\circ - C}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } D_1 + D_2 = \frac{360^\circ - A - C}{2} = 130^\circ.$$

Do vậy $D_3 = 50^\circ \Rightarrow \angle EDF = 50^\circ$.

3.3. $\triangle AEC$ có ED là đường trung trực của AC nên dễ dàng chứng minh được $\triangle AEC$ cân tại E

$$\Rightarrow \angle DCE = \angle BAC \text{ mà } \angle BAC + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle DCE + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{Đặt } \frac{\angle DCE}{5} = \frac{\angle BCE}{2} = x^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCE = 5x^\circ; \angle BCE = 2x^\circ$$

$$\text{Suy ra: } 5x^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 7,5^\circ$$

$$\text{Do vậy } \angle DCE = 5 \cdot 7,5^\circ = 37,5^\circ; \angle BCE = 2 \cdot 7,5^\circ = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACB = 37,5^\circ + 15^\circ = 52,5^\circ.$$

3.4. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$

Từ giả thiết suy ra $MC = BD$ (1)

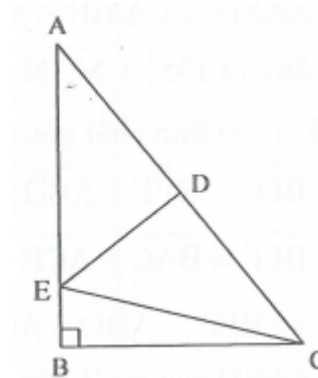
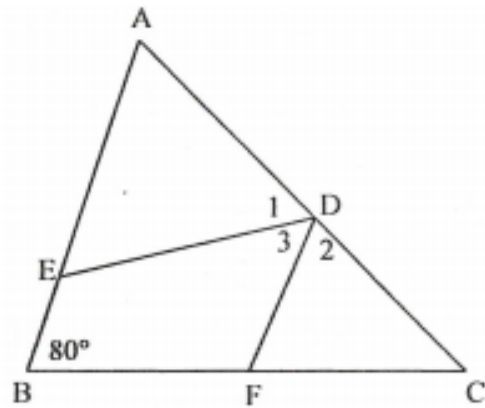
$\triangle ABD$ và $\triangle AMD$ có $AB = AM$; $\angle BAD = \angle CAD$; AD là cạnh chung

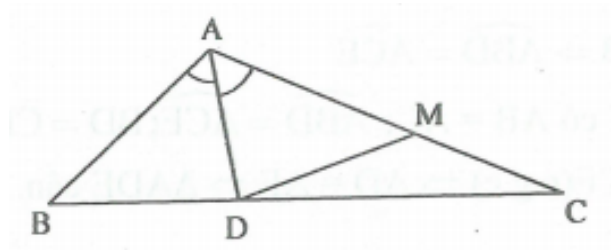
$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AMD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BD = MD; \angle ABD = \angle AMD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MD = MC \Rightarrow \triangle MCD$ cân

$$\Rightarrow \angle AMD = 2 \cdot \angle ACB \text{ (góc ngoài của tam giác)} \Rightarrow \angle ABC = 2 \cdot \angle ACB$$

$$\text{Mà } \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ \text{ nên } \angle ACB = 66^\circ : 3 = 22^\circ.$$



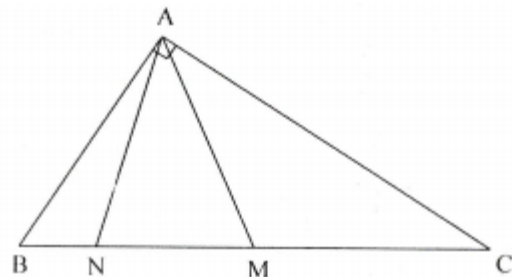


3.5. $\triangle ABM$ ($BA = BM$) cân tại $B \Rightarrow \angle AMB = \frac{180^\circ - B}{2}$.

$\triangle CAN$ ($CA = CN$) cân tại $C \Rightarrow \angle ANC = \frac{180^\circ - C}{2}$. Suy

ra:

$$\angle AMB + \angle ANC = \frac{180^\circ - B + 180^\circ - C}{2} = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$$



$\triangle AMN$ có $\angle AMB + \angle ANC + \angle MAN = 180^\circ$.

Suy ra $135^\circ + \angle MAN = 180^\circ \Rightarrow \angle MAN = 45^\circ$.

3.6. Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có:

$$\angle BFC = \angle BEF + \angle ABD;$$

$$\angle BEF = \angle BAC + \angle ACE$$

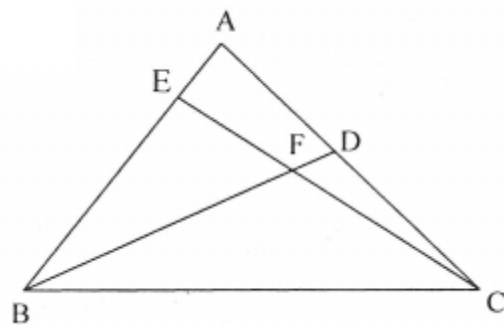
$$\Rightarrow \angle BFC = \angle ABD + \angle ACE + \angle BAC \quad (1)$$

$\triangle ABD$ cân tại B nên $\angle ABD = 180^\circ - 2 \cdot \angle BAC$.

$\triangle ACE$ cân tại C nên $\angle ACE = 180^\circ - 2 \cdot \angle BAC$

Thay vào (1) ta có: $\angle BFC = 180^\circ - 2\angle BAC + 180^\circ - 2\angle BAC + \angle BAC$

Suy ra: $\angle BAC = 70^\circ$.



3.7. $\triangle AED$ có $\angle EAD = \angle EDA = 40^\circ$, nên nó là tam giác cân.

Suy ra $\angle AED = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

$\triangle AEB$ cân tại E , theo tính chất góc ngoài tam giác: $\angle AEC = 2 \cdot \angle B = 4x$.

Suy ra $4x + x = 100^\circ$, do đó $x = 20^\circ$.

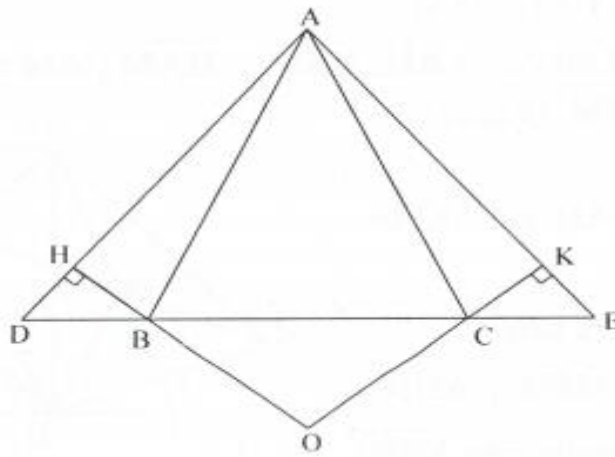
3.8.

a) $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$; $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$ (cặp góc kề bù)

mà $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

$\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $AB = AC$; $\angle ABD = \angle ACE$; $BD = CE$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân.



b) $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có $BHD = CKE$; $ADB = AEC$; $BD = CE$

$$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE \Rightarrow BH = CK$$

c) $\triangle BHD = \triangle CKE \Rightarrow HBD = KCE \Rightarrow OBC = OCB \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O .

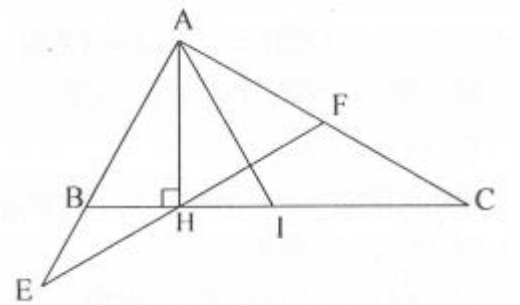
3.9.

a) $\triangle BHE$ ($BH = BE$) cân tại $B \Rightarrow ABC = 2.BHE$.

$$\text{Mà } ABC = 2.C \Rightarrow C = BHE$$

$$\Rightarrow C = FHC \Rightarrow \triangle CHF \text{ cân tại } F$$

$$\Rightarrow FH = FC \quad (1)$$



Ta có $FHC + FHA = 90^\circ$; $CAH + C = 90^\circ$ mà $FHC = C \Rightarrow FHA = CAH$

$$\Rightarrow \triangle FHA \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FH \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $FH = FA = FC$.

b) Trên tia HC lấy $HI = HB \Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHI$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AI \text{ và } ABH = AIH \Rightarrow AIH = 2.C \quad (1)$$

Mà $\triangle AIC$ có $AIH = C + IAC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $C + IAC = 2C \Rightarrow IAC = C$

$$\Rightarrow \triangle IAC \text{ cân tại } I \Rightarrow AI = IC.$$

Từ đó suy ra $AB = IC$ mặt khác $BE = HI (= BH)$

$$\Rightarrow AB + BE = IC + HI \text{ hay } AE = HC.$$

3.10. a) $\triangle AIE$ và $\triangle AIH$ có: $AIH = AIE (= 90^\circ)$; $IE = IH$; AI chung

$$\Rightarrow \triangle AIE = \triangle AIH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AE = AH.$$

Tương tự, ta có: $\triangle AKF = \triangle AKH \Rightarrow AF = AH \Rightarrow AE = AF$.

b) $\triangle AIE = \triangle AIH \Rightarrow EAI = HAI$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\triangle AEM$ và $\triangle AHM$ có $AE = AH$; $\angle EAM = \angle HAM$; AM chung

$$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle AHM \text{ (c.g.c)}$$

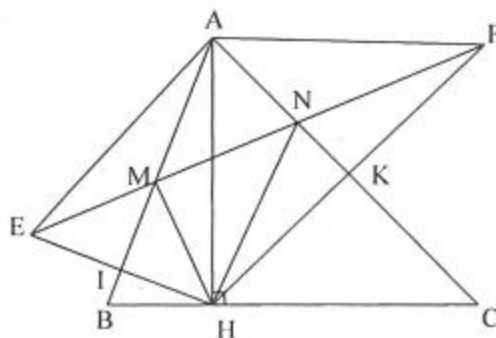
$$\Rightarrow \angle AEM = \angle AHM.$$

Tương tự, ta có $\triangle AHN = \triangle AFN$

$$\Rightarrow \angle AHN = \angle AFN.$$

Mà $\triangle AEF$ cân tại A nên $\angle AEM = \angle AFN \Rightarrow \angle AHM = \angle AHN$.

Suy ra HA là tia phân giác $\angle MHN$.



3.11.

a) $\triangle ACE$ và $\triangle DCB$ có $AC = DC$; $\angle ACE = \angle DCB (= 120^\circ)$;

$$EC = BC$$

$$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle DCB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AE = BD.$$

b) $\triangle ACE = \triangle DCB \Rightarrow \angle CEM = \angle CBN$

$\triangle CME$ và $\triangle CNB$ có $CE = CB$; $\angle CEM = \angle CBN$; $EM = BN$

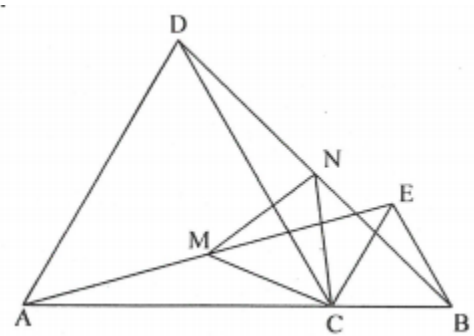
$$\Rightarrow \triangle CME = \triangle CNB \text{ (c.g.c)}.$$

c) $\triangle CME = \triangle CNB$

$$\Rightarrow CM = CN; \angle MCE = \angle NCB$$

$$\Rightarrow \angle MCE - \angle NCE = \angle NCB - \angle NCE = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MCN = 60^\circ \Rightarrow \triangle MNC \text{ là tam giác đều.}$$



3.12. $\triangle MLC$ và $\triangle ALN$ có $AL = LM$;

$$\angle ALN = \angle MLC (= 60^\circ + \angle MLN);$$

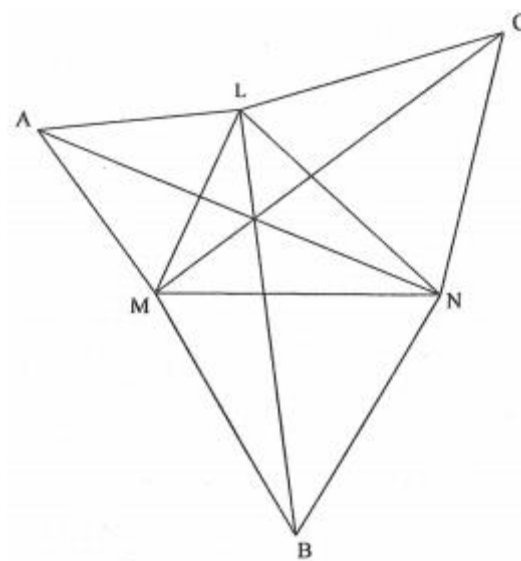
$$LN = LC \Rightarrow \triangle MLC = \triangle ALN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MC = AN.$$

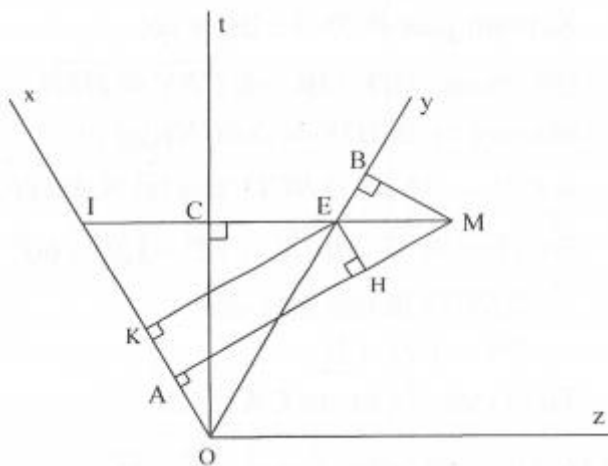
Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle MAN = \triangle MLB \text{ (c.g.c)}$

$$\Rightarrow AN = BL$$

Từ đó suy ra: $LB = MC = NA$.



3.13.



$\Rightarrow \Delta EOI$ đều. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta OCE = \Delta EKO$

$$\Rightarrow OC = EK.$$

Vẽ $EH \perp MA$; $EK \perp OI$.

Dễ dàng chứng minh được: $\Delta MBE = \Delta MHE$

$$\Rightarrow MH = MB$$
$$\Delta OCE = \Delta EKO \Rightarrow EK = OC$$
$$MA-MB=MA-MH=HA=EK=OC.$$

3.14.

a) Ta có $ACD = AME (= 90^\circ - ADC)$; $CAD = MAE$; $AD = AE$

$$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta AME \text{ (g.c.g.)}.$$

b) $\triangle ACD = \triangle AME \Rightarrow AC = AM \Rightarrow AB = AM$

$\triangle AGB$ và $\triangle MIA$ có: $ABG = MAI$ (đồng vị);

$$AB = AM ; BAG = AMI \text{ (đồng vị)}$$
$$\Rightarrow \Delta AGB = \Delta MIA (g.c.g).$$

c) $AG \parallel MH$ (cùng vuông góc với CD)

$$\Rightarrow GAH = IHA \text{ (cặp góc so le trong).}$$
$$AI \parallel GH \Rightarrow GHA = IAH \text{ (so le trong);}$$

AH chung, suy ra $\Delta AGH = \Delta HIA$ (g.c.g)

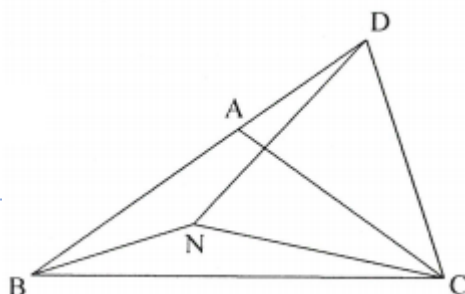
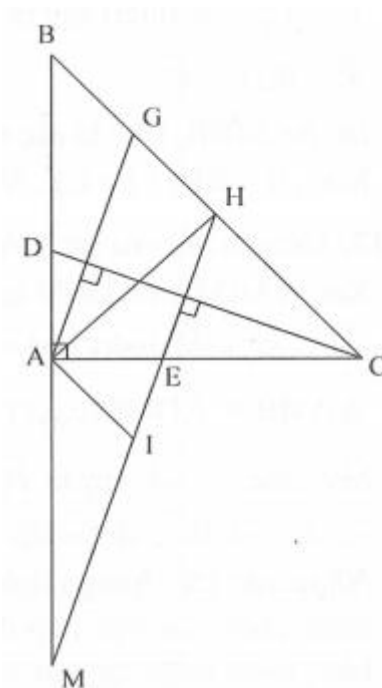
$$\Rightarrow HG = AI \text{ mặt khác } \triangle AGB = \triangle MIA$$

$\Rightarrow AI = BG$. Từ đó suy ra $BG = HG$.

3.15. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$.

Ta có tam giác BCD cân tại B .

Vì $ABC = 36^\circ$ nên $BCD = BDC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.



Ta lại có $DAC = ABC + ACB = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (tính chất của góc ngoài).

$$\Rightarrow BDC = DAC (= 72^\circ).$$

Suy ra tam giác ACD cân tại C do đó $CA = CD$ (1).

Xét tam giác BDN và BCN có:

BN chung, $BD = BC$ và $CBN = DBN$ nên suy ra $\triangle BDN = \triangle BCN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow CN = DN \Rightarrow \triangle NCD \text{ cân tại } N, \text{ lại có: } NCD = BCD - BCN = 72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle NCD$ là tam giác đều

$$\Rightarrow CN = CD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), ta có: $CA = CN$.

3.16. $DE \parallel BC$ nên $I_1 = B_1$; $I_2 = C_2$.

Mà $B_1 = B_2$ (giả thiết)

$$C_1 = C_2 \text{ (giả thiết) suy ra: } I_1 = B_2; I_2 = C_1.$$

Do đó $\triangle DIB$; $\triangle EIC$ là các tam giác cân đỉnh D và E .

Nên $DI = BD$; $EI = CE$. Vậy $DE = DI + IE = BD + CE$.

3.17. Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MD = MA$.

- Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DCM$ có: $MB = MC$ (giả thiết);

$$M_1 = M_2 \text{ (đối đỉnh); } AM = MD$$

do đó $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c) nên $AB = DC$; $A_1 = D_1$.

Mặt khác $A_1 = A_2$ suy ra $D_1 = A_2$ hay $\triangle ACD$ cân tại C

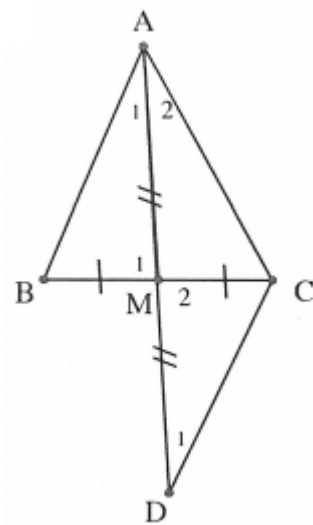
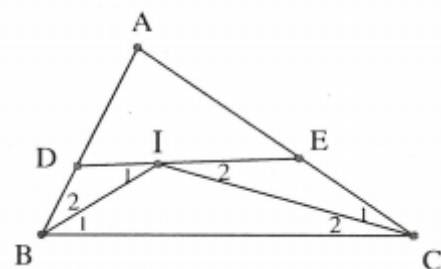
$$\Rightarrow AC = CD \Rightarrow AC = AB. \text{ Vậy } \triangle ABC \text{ cân.}$$

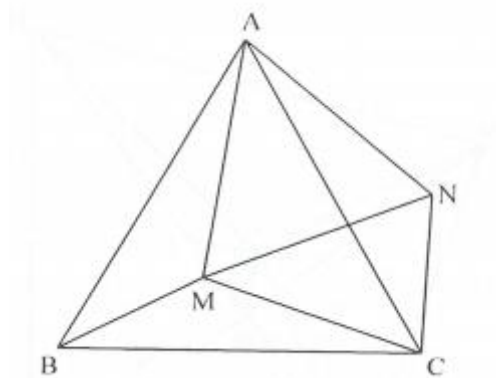
* **Nhận xét.** Để chứng minh $\triangle ABC$ cân ta chưa tìm được cách nào trực tiếp để chứng minh cặp cạnh bằng nhau hoặc cặp góc bằng nhau, cũng như vận dụng $BM = CM$. Vì vậy, việc kẻ thêm đường phụ là điều cần thiết.

3.18.

Dựng tam giác đều AMN (N và B khác phía đối với AC). Ta có $MA = MN$. Mặt khác,

$CAN = BAM = 60^\circ - MAC$. Suy ra $\triangle MAB = \triangle NAC$ (c.g.c) dẫn đến $MB = NC$. Rõ ràng tam giác MCN có các cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC .





Chuyên đề 4. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A. Kiến thức cần nhớ

Trong toán học, **định lý Py-ta-go** là một liên hệ trong hình học phẳng giữa ba cạnh tam giác của một tam giác vuông.

- **Pythagoras** (tiếng Hy Lạp: Πυθαγόρας; sinh khoảng năm 580 đến 572 TCN - mất khoảng năm 500 đến 490 TCN) là một nhà triết học người Hy Lạp và là người sáng lập ra phong trào tín ngưỡng có tên học thuyết Pythagoras. Ông thường được biết đến như một nhà khoa học và toán học vĩ đại. Trong tiếng Việt, tên của ông thường được phiên âm từ tiếng Pháp (*Pythagore*) thành **Py-ta-go**.

- Pythagoras đã thành công trong việc chứng minh tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° và nổi tiếng nhất nhờ định lý toán học mang tên ông. Ông cũng được biết đến là "cha đẻ của số học". Ông đã có nhiều đóng góp quan trọng cho triết học và tín ngưỡng vào cuối thế kỷ 7 TCN. Về cuộc đời và sự nghiệp của ông, có quá nhiều các huyền thoại khiến việc tìm lại sự thật lịch sử không dễ dàng. Pythagoras và các học trò của ông tin rằng mọi sự vật đều liên hệ đến toán học, và mọi sự việc đều có thể tiên đoán trước qua các chu kỳ.

1) Định lý Py-ta-go

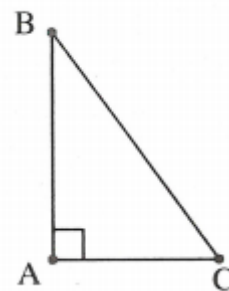
Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

2) Định lý Py-ta-go đảo

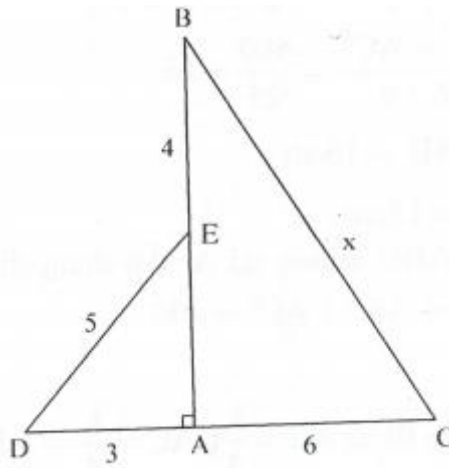
Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ.$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ sau. Tìm x :

**Giải**

* *Tìm cách giải.* Trong một tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì tìm được độ dài cạnh thứ ba.

Xét $\triangle ADE$ ta tính được AE từ đó xét $\triangle ABC$, tính được BC .

* *Trình bày lời giải.*

Tam giác ADE vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Rightarrow 3^2 + AE^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 4.$$

Từ đó suy ra $AB = 8$.

Tam giác ABC vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $3AB = 4AC$ và $BC = 20\text{cm}$.

Tính độ dài các cạnh AB và AC .

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán biết độ dài cạnh huyền tam giác vuông, tính độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác ấy, tất yếu suy nghĩ tới việc dùng định lý Py-ta-go.

Bài toán cho $3AB = 4AC$. Khai thác yếu tố này, chúng ta có thể giải bài toán theo ba cách:

* *Trình bày lời giải.*

- **Cách 1.** Tam giác ABC vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$$

$$\text{Từ đề bài: } 3AB = 4AC \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AC}{3} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9}$$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{16 + 9} = \frac{400}{25} = 16$$

$$\Rightarrow AB^2 = 16 \cdot 16 \Rightarrow AB = 16\text{cm}$$

$$AC^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow AC = 12\text{cm}.$$

- **Cách 2.** Tam giác ABC vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$$

Từ đề bài, đặt:

$$3AB = 4AC = k (k > 0) \Rightarrow AB = \frac{k}{3}; AC = \frac{k}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{k^2}{9}; AC^2 = \frac{k^2}{16}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} = 400 \Rightarrow 25k^2 = 57600 \Rightarrow k^2 = 2304$$

Với $k > 0 \Rightarrow k = 48$. Từ đó suy ra $AB = 16\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

- **Cách 3.** Tam giác ABC vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$$

Từ đề bài, đặt: $3AB = 4AC \Rightarrow AB = \frac{4.AC}{3} \Rightarrow AB^2 = \frac{16.AC^2}{9}$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{16.AC^2}{9} + AC^2 = 400 \Rightarrow \frac{25.AC^2}{9} = 400 \Rightarrow AC^2 = 144$$

Từ đó suy ra $AC = 12\text{cm}$, $AB = 16\text{cm}$.

Ví dụ 3: Gấp mảnh giấy hình chữ nhật như hình dưới đây sao cho điểm D trùng với điểm E , là một điểm nằm trên cạnh BC . Biết rằng $AD = 10\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$. Tính độ dài của CE .

Giải

* *Tìm cách giải.* Khi gấp hình, chúng ta lưu ý các yếu tố bằng nhau.

Suy ra được $AE = AD$

Để tính CE , chúng ta chỉ cần tính BE . Từ đó chúng ta có lời giải sau:

* *Trình bày lời giải.*

Ta có $AEF = ADF = 90^\circ$; $AD = AE = 10\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABE , ta có:

$$BE^2 = AE^2 - AB^2 \Rightarrow BE^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow BE = 6\text{cm}.$$

Suy ra $CE = 10 - 6 = 4\text{cm}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A , $A = 30^\circ$; $BC = a$. Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $CBD = 60^\circ$. Tính độ dài AD theo a .

Giải

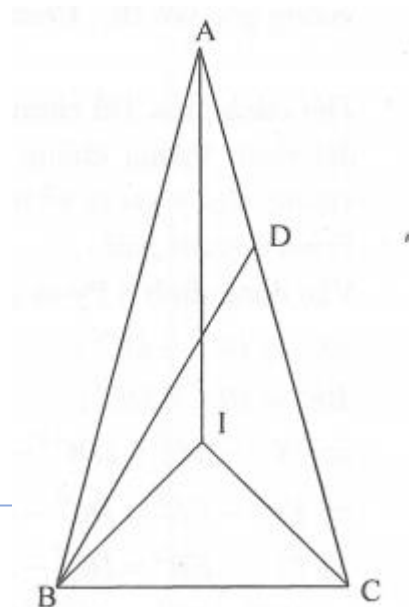
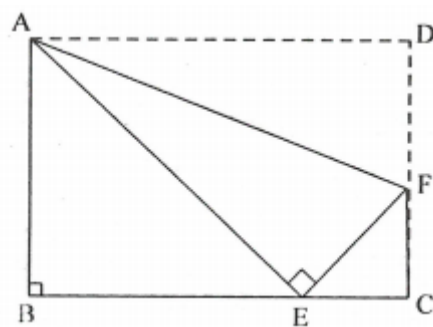
- **Cách 1.** Tam giác ABC cân tại A ; $A = 30^\circ$ nên $ABC = ACB = 75^\circ$.

Trên nửa mặt phẳng bờ BC , chứa điểm A , vẽ $\triangle BIC$ vuông cân tại I thì I nằm trong $\triangle ABC$.

Ta có: $CBI = 45^\circ$; $IBA = 30^\circ \Rightarrow IBD = 15^\circ \Rightarrow ABD = 15^\circ$.

$\triangle IAB$ và $\triangle IAC$ có $AB = AC$; $IB = IC$; AI là cạnh chung.

Do đó $\triangle IAB = \triangle IAC$ (c.c.c) $\Rightarrow IAB = IAC = 15^\circ$.



$\triangle IAB$ và $\triangle DBA$ có $IBA = DBA (= 15^\circ)$; AB là cạnh chung; $ABI = BAD (= 30^\circ)$. Do đó

$$\triangle IAB = \triangle DBA (\text{g.c.g}) \Rightarrow IB = AD.$$

$\triangle IBC$ vuông cân tại I , theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$BI^2 + IC^2 = BC^2 = a^2 \Rightarrow 2.BI^2 = a^2 \Rightarrow BI = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } AD = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

- **Cách 2.** Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , dựng tia Ax sao cho $C Ax = 45^\circ$. Trên Ax lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Suy ra $BAE = 75^\circ$.

$\triangle ABC$ và $\triangle BAE$ có AB là cạnh chung; $ABC = BAE (= 75^\circ)$; $AE = BC$. Do đó $\triangle ABC = \triangle BAE$ (c.g.c).

$$\Rightarrow AC = BE; ABE = BAC \Rightarrow ABE = 30^\circ \Rightarrow DBE = 15^\circ.$$

$\triangle ABD$ và $\triangle EBD$ có $AB = EB (= AC)$; $ABD = EBD (= 15^\circ)$; BD là cạnh chung.

Do đó $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = ED \Rightarrow \triangle AED$ vuông cân tại D .

$\triangle ADE$ vuông cân tại D , theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$AD^2 + ED^2 = AE^2 = a^2 \Rightarrow 2.AD^2 = a^2 \Rightarrow AD = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy D là trung điểm của AB . Từ D vẽ DE vuông góc với BC . Chứng minh rằng: $EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh đẳng thức, chỉ chứa các bình phương độ dài đoạn thẳng, chúng ta sử dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông, chú ý tạo ra vế trái, rồi biến đổi đại số tạo ra vế phải.

* *Trình bày lời giải.*

Vận dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông, ta có:

$$EC^2 = DC^2 - DE^2;$$

$$BE^2 = BD^2 - DE^2;$$

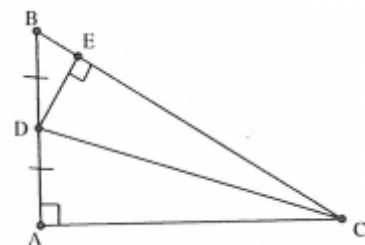
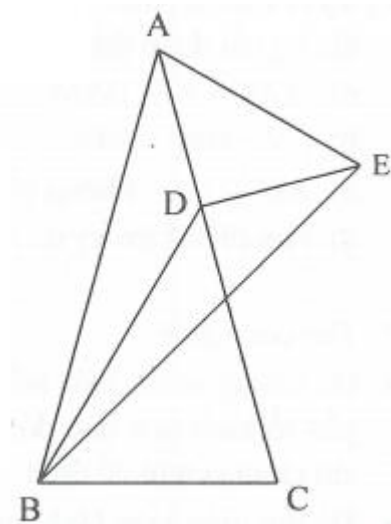
$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = (DC^2 - DE^2) - (BD^2 - DE^2)$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = DC^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = DC^2 - AD^2 \text{ (vì } BD = AD \text{)}$$

$$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = AC^2.$$

Ví dụ 6: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại đỉnh A . Qua A kẻ đường thẳng xy bất kỳ không cắt đoạn thẳng BC . Kẻ BM và CN vuông góc với xy . Chứng minh:



b) $CN + BM = MN$.

c) $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy .

d) Tìm điều kiện xy để A là trung điểm MN .

Giải

* *Tìm cách giải.*

- Để chứng minh một biểu thức hình học không phụ thuộc vào vị trí của yếu tố hình học nào đó, ta biến đổi chứng tỏ biểu thức đó bằng kết quả chỉ chứa yếu tố cố định.
- Để tìm điều kiện hình học thỏa mãn yêu cầu nào đó, ta coi yêu cầu đó là giả thiết từ đó suy ra điều kiện cần tìm.

* Trình bày lời giải.

a) Ta có: $B_1 + A_2 = 90^\circ$; $A_1 + A_2 = 90^\circ$ nên $B_1 = A_1$.

- $\triangle BAM$ và $\triangle ACN$ có $M = N (= 90^\circ)$; $B_1 = A_1$;
 $AB = AC$ nên $\triangle BAM = \triangle ACN$ (cạnh huyền –
 góc nhọn)

b) $\triangle BAM = \triangle ACN$ nên $BM = AN$; $AM = CN$

Suy ra: $BM + CN = AN + AM = MN$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông *BAM*:

$$BM^2 + AM^2 = AB^2 \text{ hay } BM^2 + CN^2 = AB^2$$

Suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy .

d) $\triangle BAM = \triangle ACN$ nên $AM = CN$

$AM = AN \Leftrightarrow AN = CN$ hay $\triangle ACN$ vuông cân tại N

$$\Leftrightarrow A_1 = 45^\circ \Leftrightarrow xy \parallel BC.$$

** Nhân xét.*

- Nếu gọi I là trung điểm của BC ta còn có kết quả đẹp: $\triangle IMN$ vuông cân.

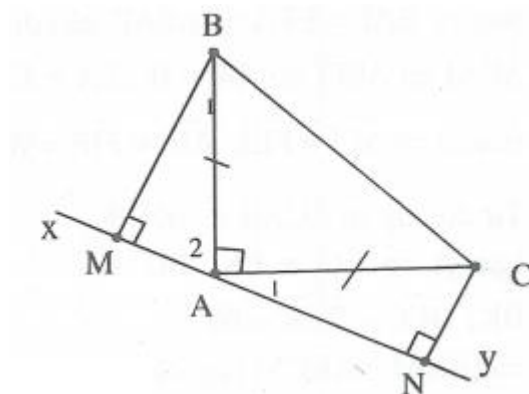
Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có $A = 50^\circ$; $B = 20^\circ$. Trên đường phân giác BE của góc ABC lấy điểm F sao cho $FAB = 20^\circ$. Gọi I là trung điểm của AF , K là giao điểm của tia EI với AB ; M là giao điểm của CK với EB . Chứng minh rằng: $AI^2 + EI^2 = AF \cdot \left(MF + \frac{1}{2} KE \right)$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Phân tích kết luận $AI^2 + EI^2$ gợi cho chúng ta dùng định lý Py-ta-go.

Dựa vào hình vẽ, chúng ta phán đoán tam giác AIE vuông tại I . Sau đó chứng minh dự đoán này.

Phân tích từ giả thiết, với các yếu tố về góc, chúng ta tính được C ; $FAE = 30^\circ$; $ABE = CBE = 10^\circ$.
 Từ đó tính được $BEC = 60^\circ$. Từ phân tích đó, chúng ta có lời giải sau:



* Trình bày lời giải.

$\triangle ABF$ có $\angle AFE = \angle BAF + \angle ABF = 30^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $\angle EAF = \angle EFA \Rightarrow \triangle EAF$ cân đỉnh $E \Rightarrow EA = EF$.

$\triangle EAI$ và $\triangle EFI$ có $IA = IF$; $EA = EF$; EI là cạnh chung $\Rightarrow \triangle EAI = \triangle EFI$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle AEI = \angle FEI; \angle AIE = \angle FIE = 90^\circ \Rightarrow \angle AEI = \angle FEI = \frac{1}{2} \angle AEF = 60^\circ.$$

Từ đó suy ra $\triangle CEB = \triangle KEB$ (g.c.g) $\Rightarrow EC = EK$;

$$BC = BK; \angle BEC = \angle BEK = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle EKM = \triangle ECM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle EMK = \angle EMC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EM = \frac{1}{2} EK \text{ (theo ví dụ 8, chuyên đề 9)}$$

$\triangle AIE$ vuông tại I suy ra:

$$AI^2 + EI^2 = AE^2 = AE \cdot EF = AE(MF + EM) = AE \left(MF + \frac{1}{2} EK \right).$$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Biết $AB = 2\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$ và $AM = \sqrt{3}\text{cm}$. Hãy tính số đo góc BAC và độ dài BC .

Giải

Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của $AD \Rightarrow AD = 2\sqrt{3}\text{cm}$

$\triangle AMB$ và $\triangle DMC$ có $MB = MC$; $\angle AMB = \angle DMC$;
 $MA = MD$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle DMC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = DC = 2\text{cm}.$$

$$\triangle ADC \text{ có } DC^2 + AD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16;$$

$$AC^2 = 16 \Rightarrow DC^2 + AD^2 = AC^2$$

$\Rightarrow \triangle ADC$ vuông tại D (định lý đảo Py-ta-go)

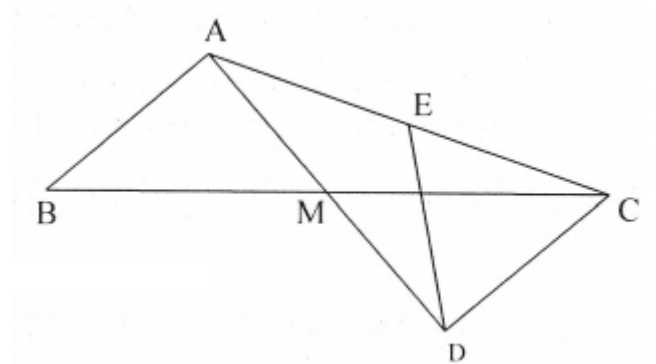
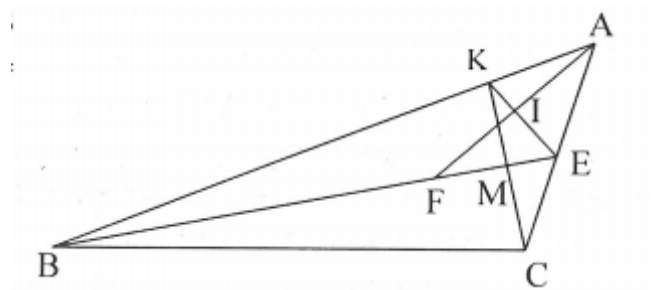
$$\Rightarrow \angle MDC = 90^\circ \Rightarrow \angle MAB = 90^\circ$$

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow DE = 2\text{cm} = CE = DC$ (theo ví dụ 10, chuyên đề 8) $\Rightarrow \triangle DCE$ là tam giác đều

$$\Rightarrow \angle DCE = 60^\circ \Rightarrow \angle MAC = 30^\circ \Rightarrow \angle BAC = 120^\circ.$$

$$\triangle ABM \text{ vuông tại } A \text{ nên } MB^2 = AB^2 + AM^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$

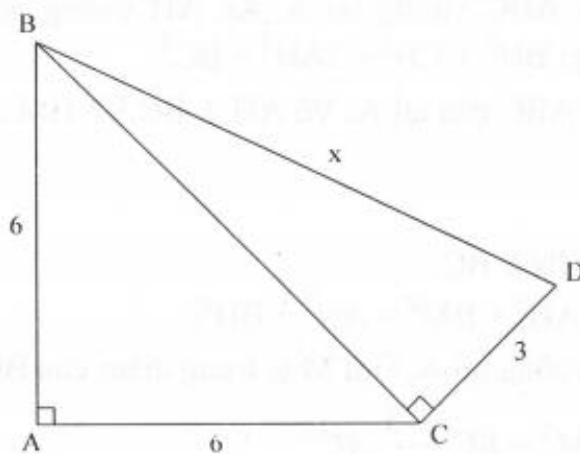
$$\Rightarrow MB = \sqrt{7}\text{cm} \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}\text{cm}.$$



C. Bài tập vận dụng

4.1. Cho tam giác ABC nhọn, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Biết $AB = 10\text{cm}$; $AH = 8\text{cm}$; $HC = 15\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC .

4.2. Tìm x trong hình vẽ sau:



4.3. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM , ACN vuông cân tại A . BN và MC cắt nhau tại D .

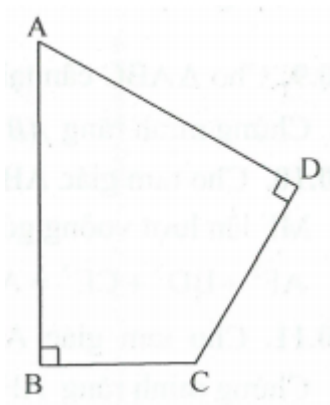
a) Chứng minh: $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

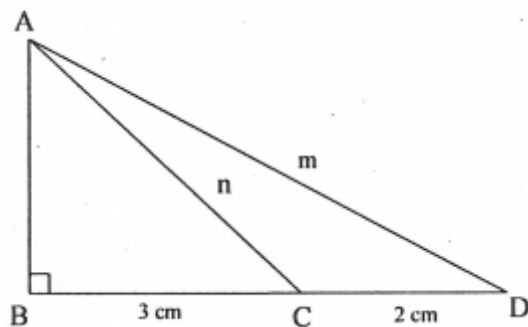
c) Cho $MB = 3\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$; $CN = 4\text{cm}$. Tính MN .

d) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

4.4. Cho hình vẽ sau. Biết rằng $A = 60^\circ$; $B = D = 90^\circ$, $BC = 4\text{cm}$; $CD = 6\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AB ?



4.5. Trong tam giác vuông dưới đây, biết $BC = 3\text{cm}$; $CD = 2\text{cm}$; $AC = n$ và $AD = m$. Tính giá trị của $m^2 - n^2$.



4.6. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Chứng minh rằng:
 $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$.

4.7. Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ $AH \perp BC$. Vẽ $HM \perp AB$, $HN \perp AC$. Chứng minh:

a) $\triangle AMN$ cân;

b) Chứng minh $MN \parallel BC$.

c) Chứng minh $AH^2 + BM^2 = AN^2 + BH^2$.

4.8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: $BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}AC^2$.

4.9. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $A < 90^\circ$. Kẻ BH vuông góc với AC .

Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

4.10. Cho tam giác ABC . Từ điểm M nằm bên trong tam giác kẻ MD , ME , MF lần lượt vuông góc với BC , CA , AB . Chứng minh rằng: $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

4.11. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD ; BE cắt nhau tại H .

Chứng minh rằng: $AH^2 + BC^2 = CH^2 + AB^2$.

4.12. Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vẽ góc CBx sao cho $CBx = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn thẳng BM . Vẽ BH và CI vuông góc đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

a) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM .

b) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

4.13. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH , trên đó lấy điểm D . Trên tia đối HA lấy E sao cho $HE = AD$. Đường vuông góc với AH tại D cắt AC tại F . Chứng minh EB vuông góc với EF .

4.14. Cho tam giác ABC có góc $A = 30^\circ$. Dựng bên ngoài tam giác ABC tam giác đều BCD . Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Hướng dẫn giải

4.1. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$\Delta ABH \text{ vuông, nên } AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$64 + BH^2 = 100 \Rightarrow BH = 6(\text{cm}).$$

$$\Delta ACH \text{ vuông, nên } AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$AC^2 = 64 + 225 \Rightarrow AC = 17(\text{cm}).$$

$$\text{Chu vi } \Delta ABC \text{ là: } AB + AC + BC = 10 + 17 + 6 + 15 = 48(\text{cm}).$$

4.2. Tam giác ABC vuông tại A . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 72.$$

Tam giác BCD vuông tại C . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow 72 + 3^2 = BD^2 \Rightarrow BD^2 = 81 \Rightarrow BD = 9.$$

Từ đó suy ra $x = 9$.

4.3.

a) Ta có $\angle MAC = \angle BAN$ (cùng bằng $90^\circ + \angle BAC$).

$$MA = AB \text{ (} \Delta MAB \text{ vuông cân tại } A)$$

$$AC = AN \text{ (tam giác } NAC \text{ vuông cân tại } A)$$

$$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN \text{ (c.g.c).}$$

b) Gọi giao điểm của BN với AC là F .

$$\angle ANF = \angle FCD \text{ (vì } \Delta AMC = \Delta ABN), \angle AFN = \angle CFD \text{ (đối đỉnh)}$$

Từ đó suy ra $\angle FDC = \angle FAN$. Do đó $BN \perp CM$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông MDN, BDC, MDB, NDC , ta có:

$$MN^2 + BC^2 = MD^2 + ND^2 + BD^2 + CD^2$$

$$BM^2 + CN^2 = MD^2 + BD^2 + ND^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow MN^2 + BC^2 = BM^2 + CN^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2.$$

Thay $MB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CN = 4\text{cm}$, vào đẳng thức $MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2$, tính được $MN = \sqrt{21}\text{cm}$.

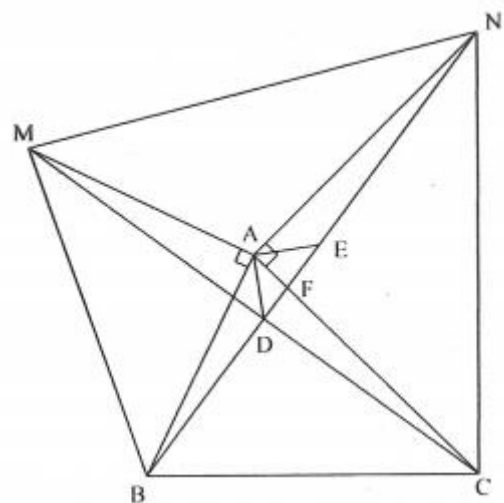
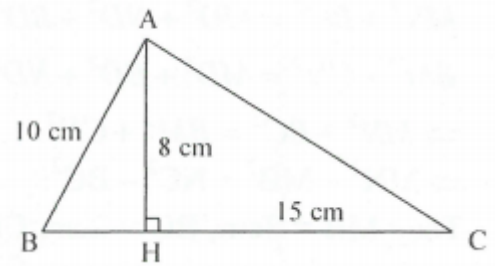
d) Trên tia BN lấy điểm E , sao cho $BE = MD$.

$$\Delta AMD = \Delta ABE \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A (1)

$$\Delta AMD = \Delta ABE \Rightarrow \angle MAD = \angle BAE \Rightarrow \angle DAE = \angle MAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ vuông tại } A \text{ (2).}$$



Từ (1) và (2) $\angle ADE = 45^\circ \Rightarrow \angle ADE = \frac{1}{2} \angle MDN$.

$\Rightarrow DA$ là phân giác của $\angle MDN$.

4.4. Ta kéo dài AD và BC sao cho chúng cắt nhau tại E . Suy ra $\angle E = 30^\circ$.

$\triangle CDE$ vuông tại D có $\angle E = 30^\circ$ nên $CE = 2 \cdot CD = 12\text{cm}$ (theo ví dụ 8, chuyên đề 9)

$\Rightarrow BE = 4 + 12 = 16\text{cm}$.

Đặt $AB = x$, $\triangle ABE$ vuông tại B có $\angle E = 30^\circ$ nên $AE = 2 \cdot AB = 2x$ (theo ví dụ 8, chuyên đề 9).

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

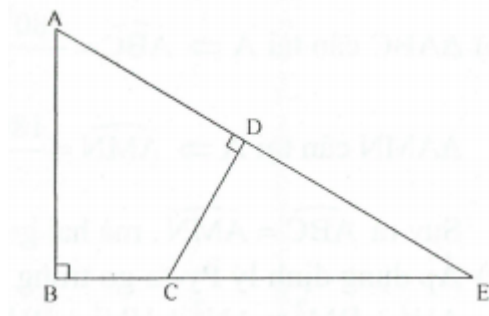
$$BE^2 + AB^2 = AE^2$$

$$BE^2 = 16^2 = 256$$

$$\text{Ta có } AB^2 = x^2; AE^2 = 4x^2.$$

$$\text{Nên } 256 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 256 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{256}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}.$$



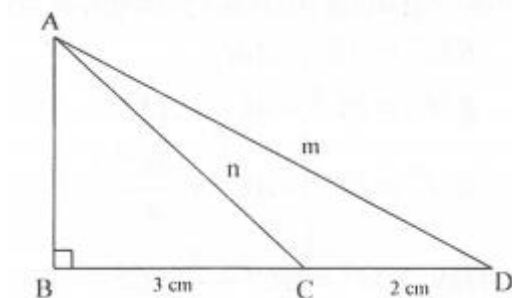
4.5. $\triangle ABC$ vuông suy ra: $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$\triangle ABD$ vuông suy ra: $AB^2 = AD^2 - BD^2$

Do đó: $AD^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$

$$\Rightarrow AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

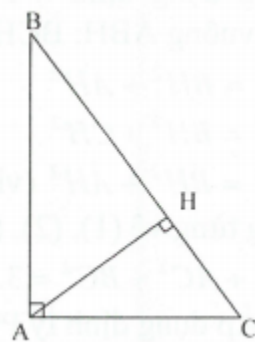


4.6. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC , AHB , AHC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2 \cdot AH^2 \text{ (điều phải chứng minh).}$$



4.7.

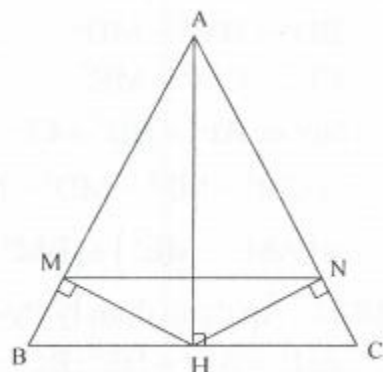
a) $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có $AB = AC$; $\angle AHB = \angle AHC (= 90^\circ)$; $B = C$

$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CH$; $\angle BAH = \angle CAH$.

$\triangle AMH$ và $\triangle ANH$ có $\angle AMH = \angle ANH (= 90^\circ)$; $\angle MAH = \angle NAH$; AH chung

$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle ANH$ (cạnh huyền – góc nhọn)



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân.

$$b) \triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow \angle ABC = \frac{180^\circ - A}{2}.$$

$$\triangle AMN \text{ cân tại } A \Rightarrow \angle AMN = \frac{180^\circ - A}{2}.$$

Suy ra $\angle ABC = \angle AMN$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel BC$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có:

$$AH^2 + BM^2 = AN^2 + HN^2 + BH^2 - HM^2 = AN^2 + BH^2 \text{ (vì } HM = HN \text{)}.$$

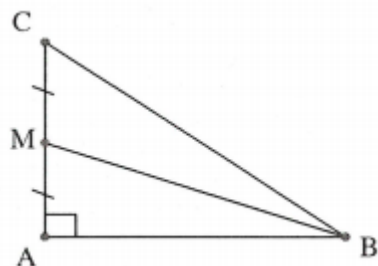
4.8. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2$$

$$BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2$$

$$BM^2 = BC^2 - AC^2 + \frac{AC^2}{4}$$

$$\text{Hay } BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4} \cdot AC^2.$$



4.9. Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông ABH; BCH ta có:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \quad (1)$$

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad (2)$$

$$AC^2 = BH^2 + AH^2 \text{ (vì } AB = AC \text{)} \quad (3).$$

Cộng từng vế (1), (2), (3), ta có:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3 \cdot BH^2 + 2 \cdot AH^2 + CH^2.$$

4.10. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AF^2 = AM^2 - MF^2$$

$$BD^2 = BM^2 - MD^2$$

$$CE^2 = CM^2 - ME^2$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } AF^2 + BD^2 + CE^2 &= AM^2 + BM^2 + CM^2 - MF^2 - MD^2 - ME^2 \\ &= (AM^2 - ME^2) + (BM^2 - MF^2) + (CM^2 - MD^2) = AE^2 + BF^2 + CD^2. \end{aligned}$$

4.11. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AH^2 = AE^2 + HE^2; \quad BC^2 = BE^2 + CE^2$$

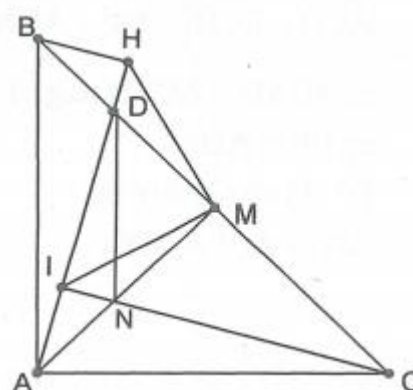
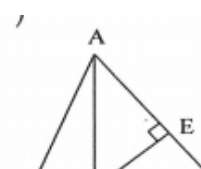
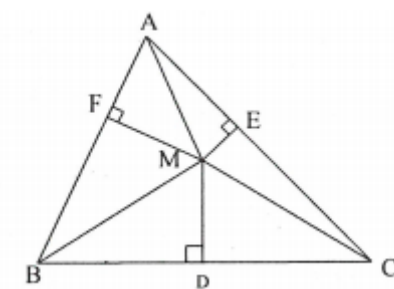
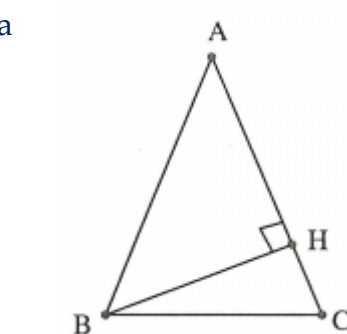
$$\Rightarrow AH^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + HE^2 + CE^2.$$

$$= AB^2 + CH^2.$$

4.12. a) Từ M kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'.

Tam giác BMA' vuông cân tại M nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên AM vuông góc với BC



Ta có $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.g.c) nên $AB = AC$ và góc $ACB = 45^\circ$

Tam giác ABC vuông cân tại A và có $BAH = ACI = 90^\circ - CAH$

H, I là hình chiếu của B và C trên AD nên $H = I = 90^\circ$

Suy ra $\triangle AIC = \triangle BHA$ (c.h - g.n)

$\Rightarrow CI = AH$.

Ta có $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$ (không đổi).

b) $\triangle BHM = \triangle AIM$ (c.g.c) $\Rightarrow HM = MI$ và $BMH = IMA$

mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân $\Rightarrow HIM = 45^\circ$ mà $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ$

$\Rightarrow IM$ là tia phân giác của góc HIC .

Vậy tia phân giác của góc HIC luôn đi qua điểm cố định M .

4.13. Vì $AD = HE$ (gt) nên $AH = DE$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông $ABF; ABH; ADF; BHE; DEF$ ta được:

$$\begin{aligned} BF^2 &= AB^2 + AF^2 \\ &= (BH^2 + AH^2) + (AD^2 + DF^2) \end{aligned}$$

$$= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2$$

$$(\text{vì } AH^2 = DE^2; AD^2 = HE^2)$$

$$= (BH^2 + HE^2) + (DE^2 + DF^2)$$

$$\Rightarrow BF^2 = BE^2 + EF^2$$

Suy ra tam giác BEF vuông tại E (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BE \perp EF$.

4.14.

Dựng ra phía ngoài $\triangle ABC$ tam giác đều ACE .

$\Rightarrow BAE = BAC + CAE = 90^\circ$ và $AC = AE = CE$.

$\triangle ABE$ có $BAE = 90^\circ$ theo định lý Py-ta-go, ta có: $AB^2 + AE^2 = BE^2$

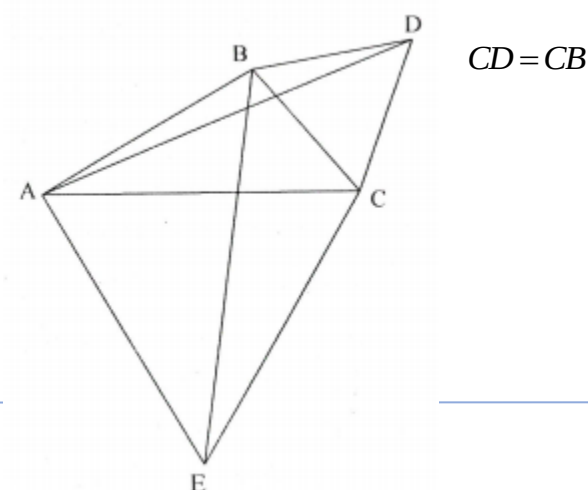
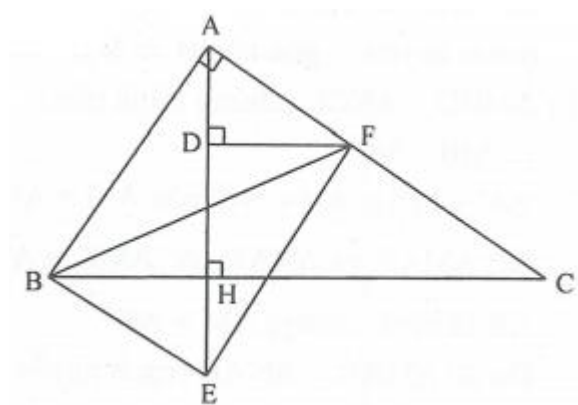
$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BE^2 \quad (1)$$

$\triangle CAD$ và $\triangle CEB$ có $CA = CE; \angle ACD = \angle ECB (= 60^\circ + \angle ACB)$;

$$\Rightarrow \triangle CAD = \triangle CEB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AB^2 + AC^2 = AD^2$.



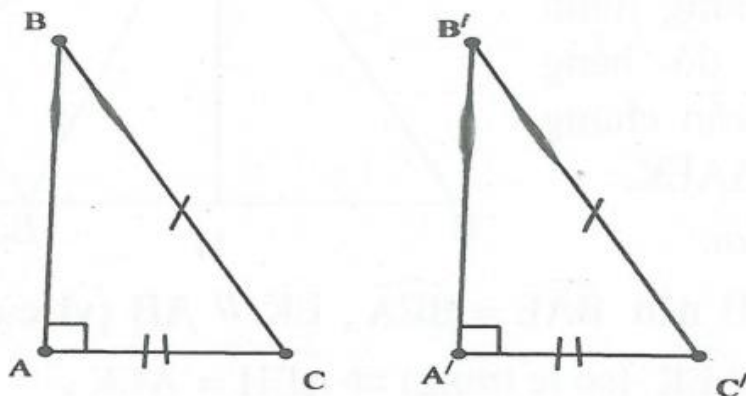
Chuyên đề 5. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền – cạnh góc vuông.

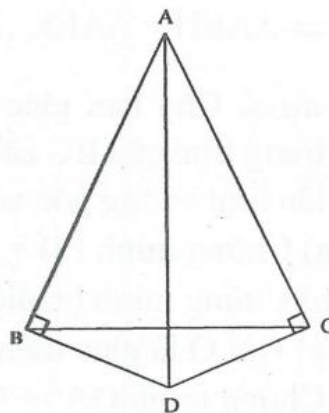
- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).}$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.



Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC, chúng ta cần chứng minh $\angle BAD = \angle CAD$. Do đó hiển nhiên cần chứng minh $\triangle BAD = \triangle CAD$.

* *Trình bày lời giải.*

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle CAD$ có: $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$; AD là cạnh chung; $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).

Do đó $\triangle BAD = \triangle CAD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$ (cặp góc tương ứng).

Vậy AD là tia phân giác góc BAC.

* *Nhận xét.* Chúng ta còn có DA là tia phân giác của góc BDC, tam giác DBC cân tại D.

AD vuông góc với BC.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Kẻ $EK \perp AC$ $K \in AC$. Chứng minh rằng $AK = AH$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $AK = AH$, chúng ta cần ghép chúng vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau. Do vậy cần chứng minh $\triangle AEH = \triangle AEK$.

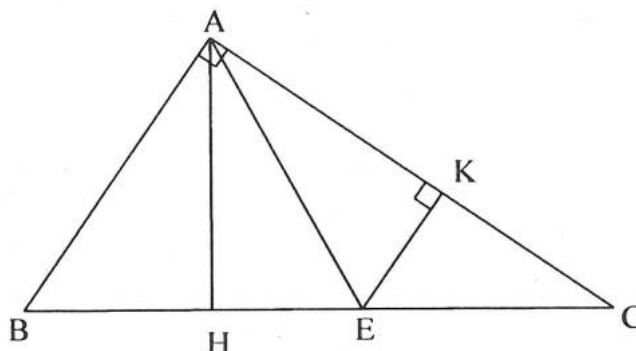
* *Trình bày lời giải.*

$\triangle ABE$ cân tại B nên $BAE = BEA$, $EK \parallel AB$ (vì cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow EAB = AEK$ (so le trong)

$\Rightarrow AEH = AEK$

$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle AEK$ (cạnh huyền - góc nhọn),
suy ra $AK = AH$.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC. Đường trung trực của BC cắt tia phân giác của góc BAC tại điểm P. Vẽ PH và PK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC.

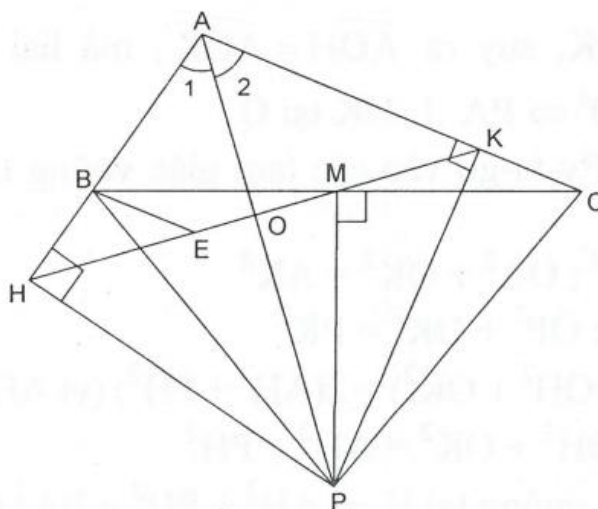
a) Chứng minh $PB = PC$ và $BH = CK$.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

c) Gọi O là giao điểm của PA và HK.

Chứng minh $OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

Giải



a) $\triangle PMB$ và $\triangle PMC$ có $PMB = PMC = 90^\circ$, $MB = MC$, MP là cạnh chung

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\Rightarrow \triangle PMB = \triangle PMC$ c.g.c $\Rightarrow PB = PC$ (hai cạnh tương ứng)

b) $\triangle PHA$ và $\triangle PKA$ có $PHA = PKA = 90^\circ$, $PAH = PAK$, AP là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle PHA = \triangle PKA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow PH = PK$ (hai cạnh tương ứng)

$\triangle PHB$ và $\triangle PKC$ có $PHB = PKC = 90^\circ$, $PB = PC$, $PH = PK$

$\Rightarrow \triangle PHB = \triangle PKC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE \parallel AC$ $E \in HK \Rightarrow BEH = AKH$ (hai góc đồng vị) (1)

Mà $\triangle PHA = \triangle PKA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại $A \Rightarrow AHK = AKH$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BEH = AHK$ hay $BEH = BHE$

$\Rightarrow \triangle BEH$ cân tại $B \Rightarrow BH = BE$.

Mà $BH = CK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BE = CK$

$\triangle BEM$ và $\triangle CKM$ có $MB = MC$, $EBM = KCM$, $BE = CK$

$\Rightarrow \triangle BEM = \triangle CKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BME = CMK$ (hai góc tương ứng)

Mà $BME + EMC = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow CMK + EMC = 180^\circ \Rightarrow EMK = 180^\circ \Rightarrow E, M, K$ thẳng hàng.

Mà $E \in HK \Rightarrow H, M, K$ thẳng hàng.

c) $\triangle AOH$ và $\triangle AOK$ có $AH = AK$, $OAH = OAK$, AO là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle AOH = \triangle AOK$, suy ra $AOH = AOK$, mà hai góc này kề bù nên

$AOH = AOK = 90^\circ \Rightarrow PA \perp HK$ tại O .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông tại O là $OA H$, OAK , OPH , OPK ta có:

$$OA^2 + OH^2 = AH^2; OA^2 + OK^2 = AK^2$$

$$OP^2 + OH^2 = PH^2; OP^2 + OK^2 = PK^2$$

$$\Rightarrow 2 OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = 2 AH^2 + PH^2 \quad (\text{vì } AH = AK \text{ và } PH = PK)$$

$$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = AH^2 + PH^2$$

Mà tam giác PAH vuông tại $H \Rightarrow AH^2 + PH^2 = PA^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$$

C. Bài tập vận dụng

5.1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy D, E (D nằm giữa B và E) sao cho $BD = CE$.

Vẽ $DM \perp AB$ tại M , $EN \perp AC$ tại N . Gọi K là giao điểm của MD và NE . Chứng minh rằng:

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

a) $\triangle MBD = \triangle NCE$;

b) $\triangle MAK = \triangle NAK$.

5.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Kẻ $BH \perp AD$ tại H, kẻ $CK \perp AE$ tại K.

Chứng minh rằng:

a) $\triangle BHD = \triangle CKE$;

b) $\triangle AHB = \triangle AKC$;

c) $BC \parallel HK$.

5.3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, AM là tia phân giác góc A. Kẻ MH vuông góc với AB; MK vuông góc với AC. Chứng minh rằng:

a) $MH = MK$;

b) $\triangle ABC$ cân.

5.4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $C = 30^\circ$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABD là tam giác đều.

b) EH song song với AC.

5.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $AE = DE$.

b) Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng BE tại K. Tính $\angle BAK$.

5.6. Cho tam giác ABC có $AB = AC$; $\angle BAC = 90^\circ$ và M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D. Kẻ BK vuông góc với đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng KM là tia phân giác của $\angle BKD$.

5.7. Cho tam giác DEF vuông tại D và $DF > DE$. Kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF). Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $MDH = E - F$.

5.8. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC. Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H, kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABH cân.

b) HM là tia phân giác góc BHE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

5.1.

a) Xét $\triangle MBD$ và $\triangle NCE$ có: $\angle BMD = \angle CNE = 90^\circ$;

$B = C$; $BD = CE$. Do đó $\triangle MBD = \triangle NCE$

(cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MB = NC$.

b) $\triangle MBD = \triangle NCE$ (chứng minh trên)

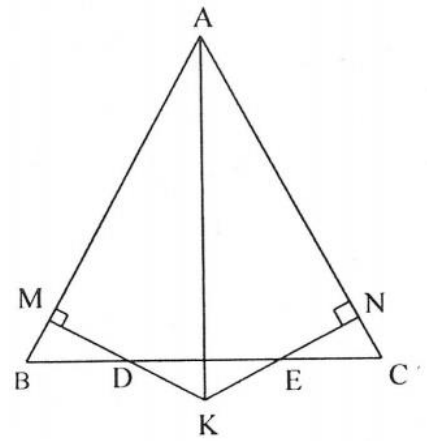
$\Rightarrow MB = NC$

$AM + MB = AN + NC$ nên $AM = AN$

Xét $\triangle MAK$ và $\triangle NAK$ có: $\angle AMK = \angle ANK = 90^\circ$;

AK là cạnh chung; $AM = AN$.

Do đó $\triangle MAK = \triangle NAK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).



5.2.

a) Ta có $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$; $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$ mà

$\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ACE = \angle ABD$

$\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $AB = AC$; $\angle ABD = \angle ACE$; $BD = CE$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ADB = \angle AEC$

$\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có $\angle BHD = \angle CKE = 90^\circ$; $\angle HDB = \angle KEC$;

$BD = CE \Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) Ta có $\triangle AHB$ và $\triangle AKC$ có $\angle AHB = \angle AKC = 90^\circ$;

$AB = AC$; $BH = CK$ $\triangle BHD = \triangle CKE$

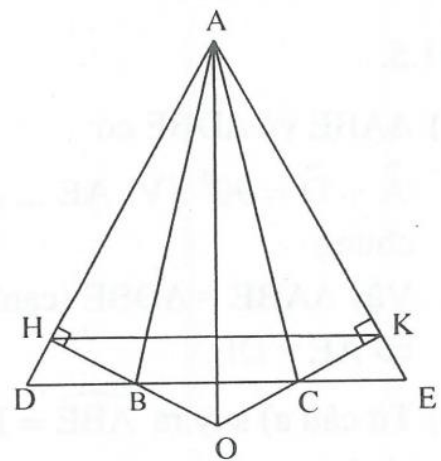
$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

c) $\triangle AHB = \triangle AKC \Rightarrow AH = AK$

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại A $\Rightarrow \angle AHK = \frac{180^\circ - \angle HAK}{2}$

$\triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow \angle ADE = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2}$

$\Rightarrow \angle AHK = \angle ADE \Rightarrow HK \parallel DE$. Vậy $BC \parallel HK$.



5.3.

a) $\triangle AHM$ và $\triangle AKM$ có: $\angle AHM = \angle AKM = 90^\circ$;

AM chung; $HA = KA$

$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle AKM$ (cạnh huyền góc nhọn)

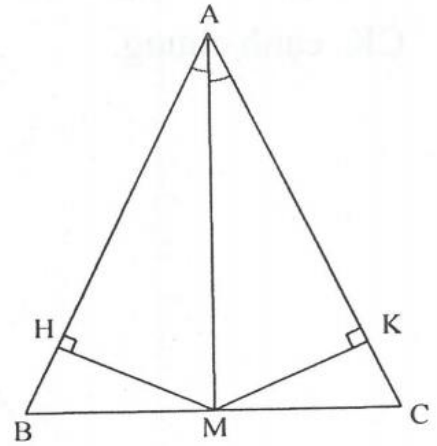
$\Rightarrow MH = MK$.

b) $\triangle BHM$ và $\triangle CKM$ có $BHM = CKM = 90^\circ$;

$$BM = MC; MH = MK$$

$\Rightarrow \triangle BHM = \triangle CKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A.



5.4.

a) $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c), suy ra $AB = AD$.

$\triangle ABC$ vuông tại A, có $C = 30^\circ$ nên $B = 60^\circ$.

Tam giác ABD cân, có $B = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ là tam giác đều.

b) $EAC = BAC - BAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\Rightarrow EAC = ACB$$

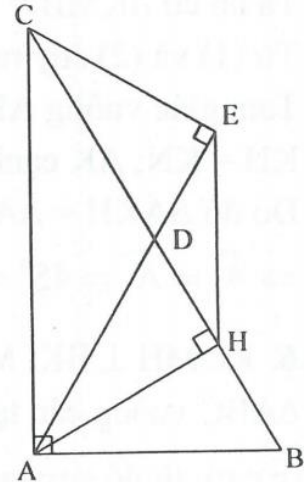
$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $CH = AE$.

$\triangle ADC$ cân tại D vì $DAC = DCA$ nên $DA = DC$.

Suy ra $AE - AD = CH - CD$ hay $DE = DH$. Do đó $\triangle DEH$ cân tại D, hai tam giác cân DAC và DEH có góc ở đỉnh $ADC = EHD \Rightarrow EAC = AEH$

$$\Rightarrow EH \parallel AC.$$



5.5.

a) $\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ có:

$A = D = 90^\circ$ (Vì $AE \perp AB, AD \perp BC$) $AB = AD$ (giả thiết), BE: cạnh chung

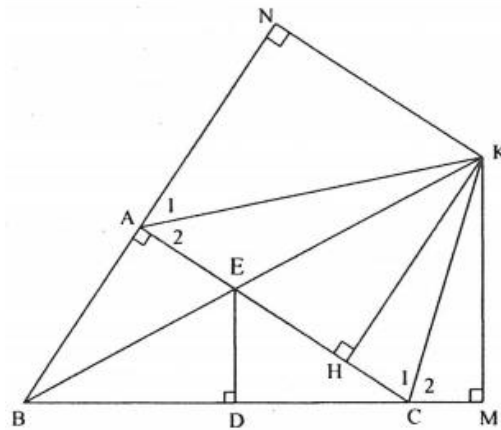
Vậy $\triangle ABE = \triangle DBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow AE = DE.$$

b) Từ câu a) suy ra $ABE = DBE$, do đó BK là phân giác của góc ABC.

Vẽ $KN \perp BA, KH \perp AC, KM \perp BC$.

Tam giác vuông KMC và tam giác vuông KHC có: $C_2 = C_1$ (giả thiết); CK cạnh chung.



Do đó $\triangle KMC = \triangle KHC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $KM = KH$ (1)

Ta lại có $\triangle KMB = \triangle KNB$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $KM = KN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KH = KN$

Tam giác vuông AKH và tam giác vuông AKN có:

$KH = KN$; AK cạnh chung.

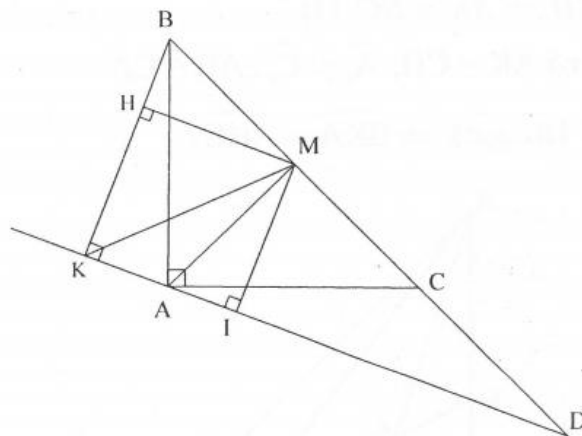
Do đó $\triangle AKH = \triangle AKN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow A_1 = A_2 = 45^\circ \Rightarrow BAK = 135^\circ$

5.6. Kẻ $MH \perp BK, MI \perp KD$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có $MB = MC$ nên dễ dàng suy ra $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c), từ đó suy ra $AM \perp BC, BMA = CAM$

$\Rightarrow AM = MB; MAC = 45^\circ$



Ta có: $KBA = CAD = 90^\circ - BAK \Rightarrow KBC = MAI$

$\triangle BMH$ và $\triangle AMI$ có $AIM = BHM = 90^\circ; BM = AM$

$MBH = MAI \Rightarrow \triangle BMH = \triangle AMI$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MH = MI$.

$\triangle MHK$ và $\triangle MIK$ có $MHK = MIK = 90^\circ$, MK chung; $MH = MI$

$\Rightarrow \triangle MHK = \triangle MIK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow HKM = IKM$

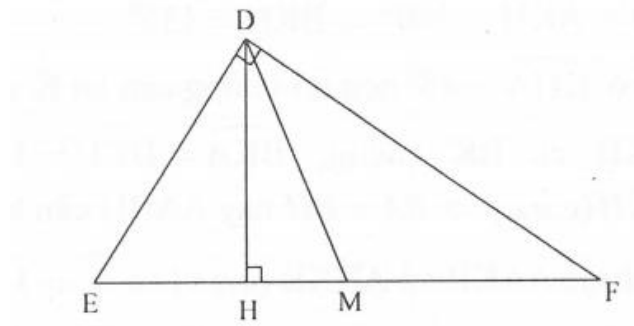
Vậy KM là tia phân giác BKD

5.7. Áp dụng *ví dụ 10* chuyên đề 8, ta có: $ME = MD$

$$\Rightarrow \triangle MDE \text{ cân tại } M \Rightarrow MDE = E$$

Mặt khác, ta có: $HDE = F$ (cùng phụ với góc HDF)

$$\text{Ta có: } MDH = MDE - HDE = E - F$$



5.8.

a) Từ A kẻ $AK \perp MC$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q.

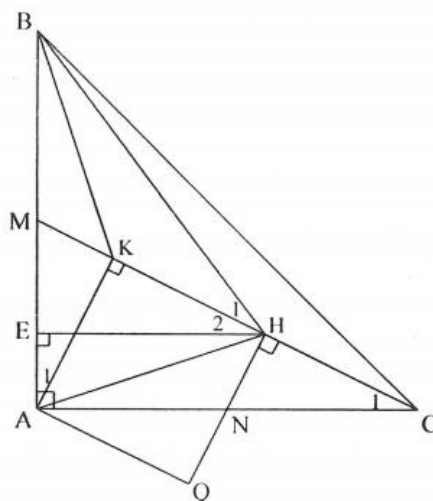
Hai tam giác vuông MAK và NCH có

$$MA = NC \left(= \frac{1}{2} AB \right), A_1 = C_1 \text{ (cùng phụ với góc AMC)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAK = \triangle NCH \Rightarrow AK = HC \quad (1)$$

$$\triangle BAK \text{ và } \triangle ACH \text{ có } AK = CH, A_1 = C_1, AB = CA$$

$$\Rightarrow \triangle BAK = \triangle ACH \text{ c.g.c} \Rightarrow BKA = AHC$$



$$\triangle AQN \text{ và } \triangle CHN \text{ có } AN = NC,$$

$$ANQ = CNH \Rightarrow \triangle ANQ = \triangle CNH \text{ ch-gn} \Rightarrow AQ = CH \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $AK = AQ$.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\triangle AKH$ và $\triangle AQH$ có $AKH = AQH = 90^\circ, AK = AQ, AH$ chung

$\Rightarrow \triangle AKH = \triangle AQH$ ch - cgv $KHA = QHA \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc KHQ

$\Rightarrow AHQ = 45^\circ \Rightarrow AHC = 135^\circ \Rightarrow BKA = 135^\circ$

Từ $BKA + BKH + AKH = 360^\circ \Rightarrow BKH = 135^\circ$

Tam giác AKH có $KHA = 45^\circ$ nên nó vuông cân tại K suy ra $KA = KH$.

$\Rightarrow \triangle BKA = \triangle BKH$ c.g.c $\Rightarrow BA = BH$ hay $\triangle ABH$ cân tại B.

b) Để chứng minh được $\triangle AKB$ và $\triangle HKB$ c.c.c $\Rightarrow A_1 = H_1$

Mà $HE \parallel CA \Rightarrow H_2 = C_1$ (góc đồng vị) vì $A_1 = C_1 \Rightarrow H_1 = H_2$.

Hay HM là tia phân giác góc BHE.

Chuyên đề 6. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong một số bài toán ở các chuyên đề trước, chúng ta đã phải vẽ thêm hình phụ thì mới giải được. Trong chuyên đề này, chúng ta hệ thống một vài kỹ thuật vẽ hình phụ để giải toán.

1. Mục đích của việc vẽ thêm hình phụ

Khi vẽ thêm đường phụ, chúng ta thường nhằm các mục đích sau đây:

- Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến chứng minh tập hợp (ở một hình mới) làm cho chúng có liên quan đến nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng thứ ba (hoặc góc thứ ba) làm cho hai đoạn thẳng (hoặc hai góc) cần chứng minh trở lên có mối quan hệ với nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng (hay góc) bằng tổng, hiệu gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng (hay góc) cho trước để đạt được chứng minh của bài tập hình học.
- Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hay góc) bằng nhau, thêm vào những đại lượng bằng nhau mà đề bài đã cho để giúp cho việc chứng minh.
- Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý nào đó.
- Biến đổi kết luận, hình vẽ làm cho bài toán trở lên dễ chứng minh hơn.

2. Các loại đường phụ thường vẽ

- Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với một độ dài tùy ý hoặc cắt một đường thẳng khác.
- Nối hai điểm cho trước hoặc cố định
- Từ một điểm cho trước dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
- Dựng đường phân giác của một góc cho trước.
- Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng một góc cho trước.

* *Chú ý:* Khi vẽ đường phụ phải có mục đích không vẽ tùy tiện.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

Chứng minh $BC = AD + BD$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Đây là bài toán khó tuy nhiên nếu bạn biết lưu tâm đến giả thiết của bài toán và phương pháp kẻ đường phụ thì bài toán trở nên đơn giản. Phân tích kết luận, chúng ta có hai hướng vẽ đường phụ cho bài toán này.

- Vì A, D, B không thẳng hàng, mà kết luận $AD + BD = BC$, do vậy chúng ta vẽ thêm hình phụ sao cho $AD + BD$ bằng một đoạn thẳng. Sau đó chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.
- Phân tích kết luận, chúng ta cũng có thể nghĩ tới việc tách BC thành tổng hai đoạn thẳng mà trong đó có một đoạn thẳng bằng BD (hoặc AD) và chứng minh đoạn thẳng còn lại bằng AD (hoặc BD).

Trong hai hướng suy nghĩ trên, chúng ta lưu ý đến giả thiết là tam giác cân và biết số đo góc để tính tất cả các góc có thể.

*** Trình bày lời giải**

- **Cách vẽ 1.** Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.

$\triangle ABC$ cân tại A có $A = 100^\circ$ nên $B = C = 40^\circ$.

Ta có: $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DE$,

$BED = BAD = 100^\circ \Rightarrow D_1 = D_2 = D_3 = 60^\circ$

Mà BD là tia phân giác của góc B nên $B_1 = B_2 = 20^\circ$

Mặt khác: $BDC = 120^\circ \Rightarrow D_4 = 60^\circ$. Từ đó ta có:

$\triangle KDC = \triangle EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow DKC = DEC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow KCB = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BK = BD + DK = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD$.

- **Cách vẽ 2.** Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$, lấy điểm N sao cho $BN = BD$.

Ta có: $\triangle ABD = \triangle MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DM$ * , $A = BMD = 100^\circ$.

Do $BMD = 100^\circ \Rightarrow DNM = 80^\circ$ (1)

Mặt khác $\triangle BDN$ cân tại B nên

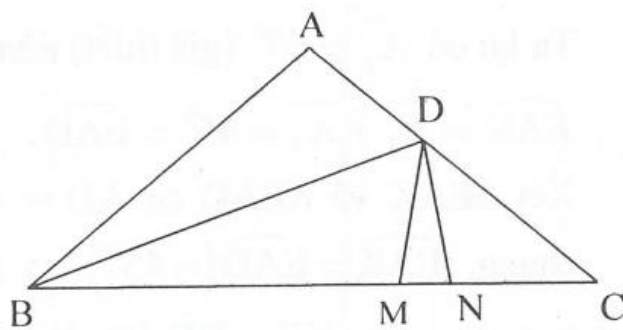
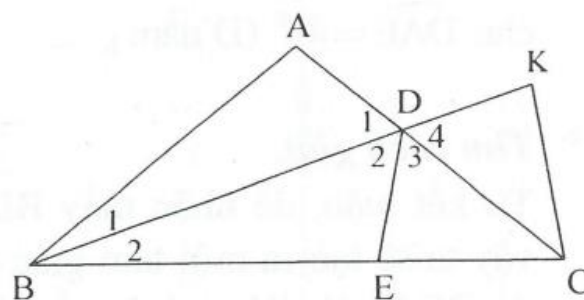
$BDN = BND = 80^\circ$ 2

Từ (1) (2) ta có: $\triangle MDN$ cân tại D

nên $DM = DN$ (**)

Ta có: $NDC = NCD = 40^\circ$

$\Rightarrow \triangle DNC$ cân tại N, nên $NC = ND$ (***)



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Từ (*) (**) (***) $\Rightarrow AD = NC \Rightarrow BC = BN + NC \Rightarrow BC = BD + AD$.

- Cách vẽ 3. Trên cạnh BC lấy điểm

F sao cho $BF = BD$, trên cạnh AB

lấy điểm K sao cho $AK = AD$. Ta

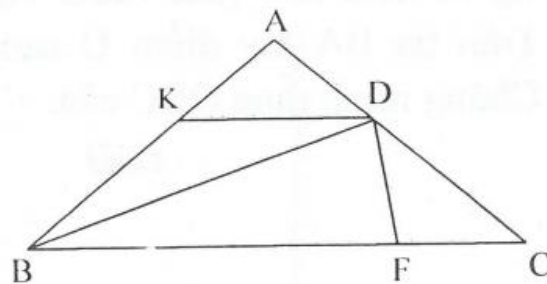
sẽ chứng minh được tam giác BKD

cân tại K nên $KB = KD$, mà $KB = DC$

nên $KD = DC$ do đó $\triangle AKD = \triangle FDC$ g.c.g $\Rightarrow AD = FC$

$\Rightarrow BC = BF + FC = BD + AD$.

Vậy $BC = BD + AD$.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc BC sao cho $\angle DAE = 45^\circ$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng $BD^2 + CE^2 = DE^2$.

Giải

* *Tìm cách giải.*

Từ kết luận, để nhận thấy BD, CE, DE thỏa mãn định lý Py-ta-go. Do vậy ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE trong đó DE là độ dài cạnh huyền. Do BD, CE, DE cùng nằm trên một đường thẳng. Do vậy cần kẻ thêm đường phụ. Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE$.

* *Trình bày lời giải.*

Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$

(K và A cùng phía đối với BC). Ta

có $C_2 = 90^\circ - C_1 = 90^\circ - 45^\circ = B$,

$CK = BD$ (theo cách dựng)

$AC = AB$ (giả thiết)

Do đó $\triangle ACK = \triangle ABD$ c. g. c ,

suy ra $AK = AD, A_4 = A_1$

Ta lại có $A_2 = 45^\circ$ (giả thiết) nên $A_1 + A_3 = 45^\circ$ suy ra:

$EAK = A_4 + A_3 = 45^\circ = EAD$

Xét $\triangle EAK$ và $\triangle EAD$ có $AD = AK$, AE là cạnh

chung, $EAK = EAD = 45^\circ \Rightarrow \triangle EAK = \triangle EAD$

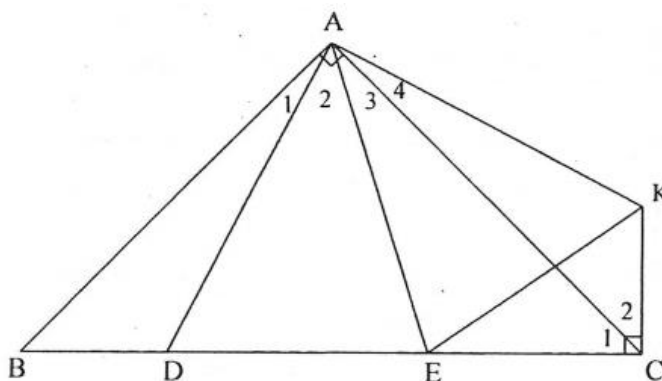
(c.g.c), suy ra $KE = DE$. Từ đây, hiển nhiên ta có

điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 15^\circ$.

Trên tia BA lấy điểm O sao cho $BO = 2AC$.

Chứng minh rằng OBC cân.



Giải

* **Tìm cách giải.** Trong bài toán trên, vì phát hiện thấy $C = 15^\circ$ suy ra $B = 75^\circ$, mà $75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ là số đo của mỗi góc trong tam giác đều.

Điều này gợi ý cho chúng ta vẽ tam giác đều BCM như hình vẽ. Nhờ các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam giác đều là 60° , chúng ta chứng minh được

$$\triangle HMB = \triangle ABC \text{ c.g.c} ; \triangle MOB = \triangle MOC \text{ c.g.c}$$

dẫn tới $\triangle OBC$ cân tại O. Do đó nên nghĩ tới việc vận dụng vẽ thêm tam giác đều vào giải toán.

* **Trình bày lời giải**

Ta có: $\triangle ABC$; $A = 90^\circ$; $C = 15^\circ$ gt $\Rightarrow B = 75^\circ$.

Vẽ tam giác đều BCM.

(M và A cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta có: $OBM = ABC - MBC = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

Gọi H là trung điểm của OB $\Rightarrow HO = HB = \frac{1}{2}OB$

Mặt khác $BO = 2AC$ (gt) nên $AC = \frac{1}{2}OB$ từ đó ta có $AC = BH$

Xét $\triangle HMB$ và $\triangle ABC$ có: $BH = AC$ (cmt) $HBM = ACB = 15^\circ$;

$MB = BC$ (cạnh $\triangle$ đều BMC)

Do đó $\triangle HMB = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow H = A = 90^\circ \Rightarrow MH \perp OB$

$\triangle MBH$ và $\triangle MOH$ có $MHB = MHO = 90^\circ$, $BH = HO$, MH chung

$\Rightarrow \triangle MBH = \triangle MOH \Rightarrow OBM = BOM \Rightarrow OBM = BOM = 15^\circ$.

$\Rightarrow BMO = 180^\circ - 2.15^\circ = 150^\circ$

Từ đó $MB = MC$, $CMO = BMO = 150^\circ$, OM là cạnh chung

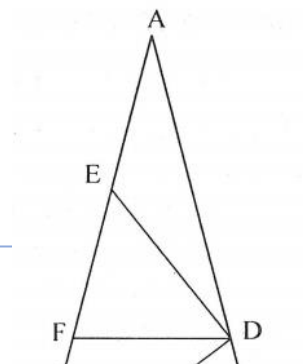
Do đó $\triangle MOB = \triangle MOC$ c - g - c $\Rightarrow OB = OC$.

Vậy $\triangle OBC$ cân tại O. (điều phải chứng minh)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = 2CD$. Chứng minh rằng $\angle EDB = 90^\circ$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Từ giả thiết $BE = 2CD$, gợi ý cho chúng ta vẽ trung điểm F của BE. Muốn chứng minh



$EDB = 90^\circ$ mà $FB = FE$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh $BF = FD = FE$.

*** Trình bày lời giải**

- **Cách 1.** Gọi F là trung điểm của BE thì $FB = CD$

(cùng bằng $\frac{1}{2}BE$). Mà $AB = AC$ (tam giác

ABC cân tại A) nên $AF = AD$. Suy ra tam giác AFD cân tại A.

Từ đó $\angle AFD = \angle ABC$ (cùng bằng $\frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$).

Suy ra $DF \parallel BC$ (hai góc đồng vị bằng nhau),

nên $\angle FBD = \angle FDB$ (cùng bằng $\angle DBC$). Điều này dẫn đến tam giác FBD cân tại F, hay

$$FD = FB = \frac{1}{2}BE.$$

Tam giác BDE có F là trung điểm cạnh BE và $DF = \frac{1}{2}BE$ nên tam giác BDE vuông tại D hay

$EDB = 90^\circ$ (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.** Từ D kẻ $DF \parallel BC$ $F \in AB$. Suy ra $\angle FDB = \angle CBD$ (so le trong)

$$\Rightarrow \angle FDB = \angle FBD \Rightarrow \triangle FBD \text{ cân tại } F \Rightarrow BF = FD$$

Mặt khác, $\triangle AFD$ và $\triangle ABC$ cân tại A, suy ra $AF = AD$, $AB = AC$

$$\Rightarrow BF = CD.$$

Từ đó suy ra $BF = FD = FE \Rightarrow$ tam giác BDE vuông tại D hay $EDB = 90^\circ$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC ($AB < AC$),

kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi

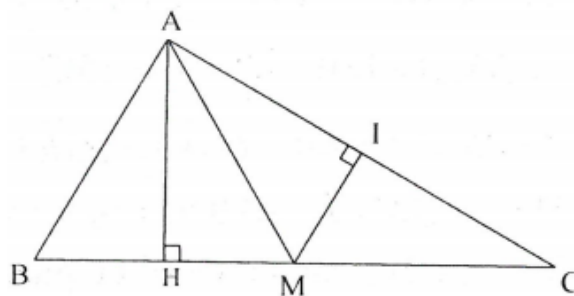
M là trung điểm của BC. Biết rằng

AH và AM chia góc A thành 3 góc

bằng nhau. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC vuông.

b) Tam giác ABM là tam giác đều.



Giải

* **Tìm cách giải.** Muốn chứng minh tam giác ABC vuông tại A ta cần kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh đường thẳng đó song song với AB, từ đó suy ra $AB \perp AC$ và suy ra $\angle A = 90^\circ$.

*** Trình bày lời giải.**

a) Vẽ MI vuông góc với AC.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\triangle AHM$ và $\triangle AIM$ có $AHM = AIM = 90^\circ$, AM là cạnh chung, $HA = IA$

$\Rightarrow \triangle MAI = \triangle MAH$ (c.h-g.n) $\Rightarrow MI = MH$

$\triangle AHM$ và $\triangle AHB$ có $AHM = AHB = 90^\circ$, AH là cạnh chung,

$HA = HB \Rightarrow \triangle AHM = \triangle AHB$ g.c.g $\Rightarrow BH = MH$

$\Rightarrow BH = MH = \frac{1}{2}BM \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MC \Rightarrow C = 30^\circ; HAC = 60^\circ$

Vậy $BAC = 60^\circ.3 : 2 = 90^\circ \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A .

b) Ta có $C = 30^\circ \Rightarrow B = 60^\circ; AM = BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ tam giác ABM cân có một góc bằng $60^\circ \Rightarrow$ tam giác ABM đều.

* *Nhận xét:* Trong bài toán trên nếu chỉ có các yếu tố bài ra thì tưởng chừng như rất khó giải, tuy nhiên, chỉ bằng một đường vẽ thêm ($MI \perp AC$) thì bài toán lại trở nên rất dễ dàng, qua đó càng thấy rõ vai trò của việc vẽ thêm yếu tố phụ trong giải toán hình học.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC với $BAC = 40^\circ$ và $ABC = 60^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $DCB = 70^\circ$ và $EBC = 40^\circ$; F là giao điểm của DC và EB . Chứng minh rằng AF vuông góc với BC .

Giải

Trên AC lấy điểm N sao cho

$ABN = 40^\circ$. Ta có

$ABN = BAN = 40^\circ$ nên $\triangle ABN$

cân tại N , suy ra $BNC = 80^\circ$

(tính chất góc ngoài của tam

giác). Do đó $BNC = BCN = 80^\circ$

suy ra $\triangle BCN$ cân tại B

$\Rightarrow BN = BC$ (1)

$\triangle BFC$ có $FBC = 40^\circ, FCB = 70^\circ$ nên

$BFC = 70^\circ$

Vậy $\triangle BFC$ cân tại $B \Rightarrow BC = BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BN = BF$ (3). Kéo dài BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$

$\Rightarrow \triangle ABM$ đều.

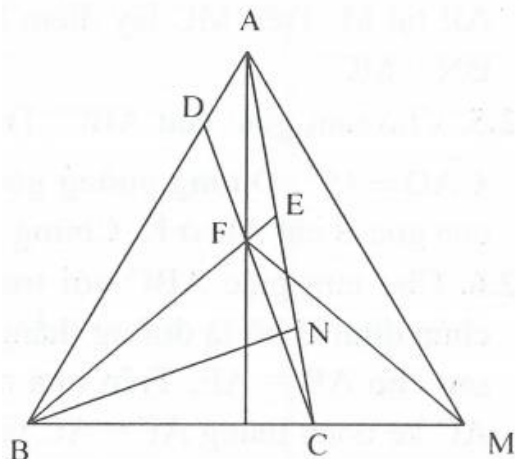
Xét $\triangle ABN$ và $\triangle MBF$ có $AB = MB$, $BN = BF$ (do (3)), $ABN = FBM = 40^\circ$, do đó $\triangle ABN = \triangle MBF$ (c.g.c). Mà $\triangle ABN$ cân tại N , suy ra $\triangle MBF$ cân tại F . Từ $AB = AM$ (do $\triangle ABM$ đều),

$FB = FM \Rightarrow \triangle ABF = \triangle AMF$ c.c.c, suy ra $BAF = MAF$.

Mặt khác, $\triangle ABM$ đều nên AF vuông góc với BC .

* *Nhận xét:*

- Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.



- Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán.

C. Bài tập vận dụng

- 6.1. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$), trên cạnh AB lấy điểm D, trên phần kéo dài của cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh $DF = FE$
- 6.2. Cho $\triangle ABC$ có $B = 45^\circ; A = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy D sao cho $CD = 2.CB$. Tính $\angle ADB$
- 6.3. Ở trong góc nhọn xOy vẽ Oz sao cho $\angle xOz = \frac{1}{2}\angle yOz$. Qua điểm A thuộc Oy vẽ AH vuông góc Ox cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy D sao cho $BD = OA$. Chứng minh tam giác AOD cân.
- 6.4. Cho $\triangle ABC$ có $\angle ABC = 50^\circ; \angle BAC = 70^\circ$. Tia phân giác góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho $\angle MBN = 40^\circ$. Chứng minh rằng: $BN = MC$
- 6.5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm D sao cho $\angle CAD = 15^\circ$. Đường vuông góc với BC tại C cắt AD ở E. Tia phân giác của góc B cắt AD ở K. Chứng minh rằng $AK = ED$.
- 6.6. Cho tam giác ABC với trung điểm M của BC. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho $AB = AE$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF = AC và AF vuông góc với AC. Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.
- 6.7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng $AD = 2ED$.
- 6.8. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng 120° và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.
- 6.9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\angle ABC = 54^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $CE = AB$.
- 6.10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB < AC$. Vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $\angle BIH = \angle ACB$

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.1. Cách 1. Từ D kẻ $DH \parallel AC$ $H \in BC$ suy ra $DHB = ACB$, mà

$$ABC = ACB \Rightarrow DHB = ABC \Rightarrow \triangle DHB \text{ cân tại D} \Rightarrow DH = DB$$

$$\Rightarrow DH = CE$$

$$\triangle DHF \text{ và } \triangle ECF \text{ có } DHF = ECF, DH = CE, HDF = CEF$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHE = \triangle ECF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE$$

- Cách 2. Từ E kẻ $EK \parallel AB$ $K \in BC$

$$\Rightarrow ABC = CKE, \text{ mà } ABC = ACB$$

$$\Rightarrow ACB = CKE \Rightarrow ECK = CKE$$

$$\Rightarrow \triangle ECK \text{ cân tại E} \Rightarrow CE = KE \Rightarrow BD = KE$$

$$\triangle BDF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } DBF = EKF, BD = KE,$$

$$BDF = KEF$$

$$\text{Suy ra } \triangle BDF = \triangle KEF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE$$

- Cách 3. Hạ $DH \perp BC$, $EK \perp BC$ $H, K \in BC$

$$\triangle BDH \text{ và } \triangle CEK \text{ có } BHD = CKE = 90^\circ,$$

$$BD = CE, DBH = KCE$$

$$\text{Suy ra } \triangle DBH = \triangle ECK \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow DH = EK.$$

$$\triangle DHF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } DHF = EKF = 90^\circ,$$

$$DH = KE, DFH = KFE$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHF = \triangle EKF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE.$$

Tóm lại: Chứng minh $DF = EF$ dựa vào cặp tam giác bằng nhau, do đó cần tạo ra cặp tam giác bằng nhau.

6.2. Tìm cách giải. Dễ thấy $DCA = 60^\circ$ mà $CD = 2.BC$ nên ta nghĩ tới tam giác vuông có góc nhọn 60° .

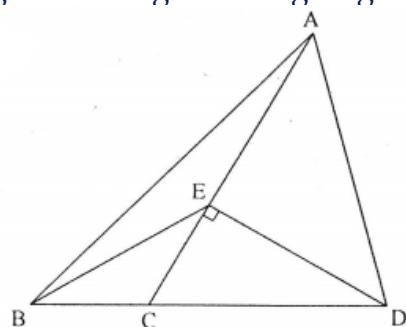
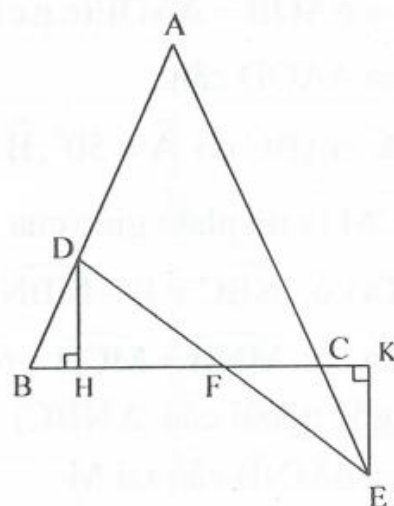
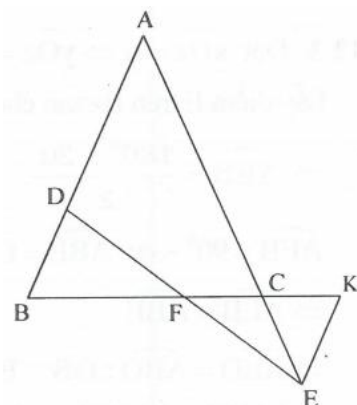
$$\text{Ta hạ } DE \perp AC \Rightarrow CD = 2.CE \Rightarrow CE = CB.$$

$$\text{Dễ thấy } \triangle BED \text{ và } \triangle BEA \text{ cân tại E}$$

$$\Rightarrow \triangle EAD \text{ cân tại E.}$$

Từ đó tính được:

$$ADE = 45^\circ, EDB = 30^\circ \Rightarrow ADB = 75^\circ$$



6.3. Đặt $xOz = \alpha \Rightarrow yOz = 2\alpha$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Lấy điểm E trên Bz sao cho $OE = OA$ $\triangle AEO$ cân tại O

$$\Rightarrow AEB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

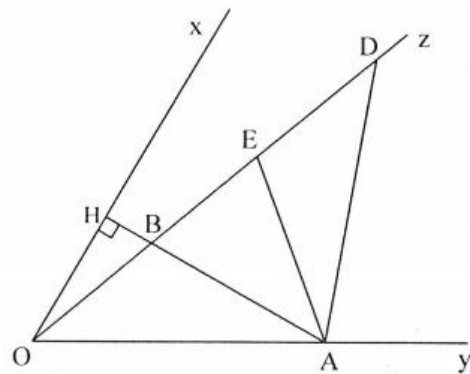
$$AEB = 90^\circ - \alpha; ABE = OBH = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow AEB = ABE$$

$$\Rightarrow AED = ABO; OB = ED; AE = AB$$

$$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADE \text{ c.g.c} \Rightarrow AO = AD$$

$$\Rightarrow \triangle AOD \text{ cân.}$$



6.4. $\triangle ABC$ có $A = 50^\circ; B = 70^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$.

CM là tia phân giác của C nên $MCA = MCB = 30^\circ$.

Ta có: $NBC = B - MBN = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$.

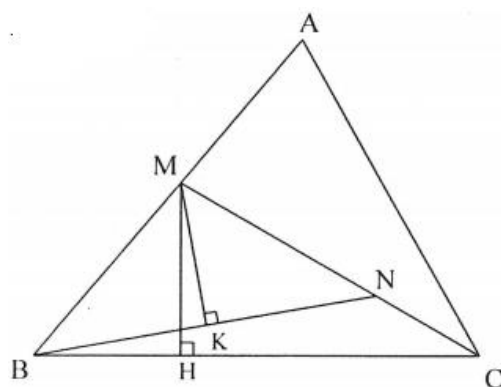
Ta có: $MNB = MCB + NBC = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$

(góc ngoài của $\triangle NBC$)

$$\Rightarrow \triangle MNB \text{ cân tại M}$$

Từ M vẽ $MH \perp BC$ ta có $MH = \frac{1}{2}MC$ (1)

Từ M vẽ $MK \perp BN \Rightarrow BK = KN = \frac{1}{2}BN$ (2)



Xét $\triangle MKB$ và $\triangle BHM$ có $BHM = BKM = 90^\circ$, BM là cạnh chung,

$$MBK = BMH = 40^\circ \Rightarrow \triangle MKB = \triangle BHM \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow MH = KB \text{ (3)}$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow BN = MC$ (điều phải chứng minh).

6.5. Kẻ $BH \perp AD$; $CI \perp ED$.

$$\triangle BDK \text{ có } AKB = KBD + KDB = 30^\circ + 45^\circ$$

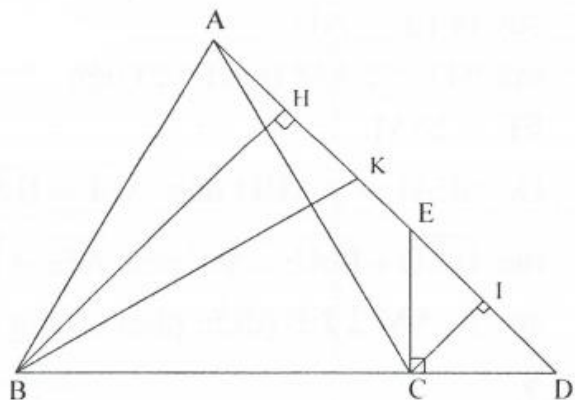
$$\Rightarrow AKB = 75^\circ$$

$$\triangle ABK \text{ có } BAK = AKB = 75^\circ,$$

$$BH \perp AK \text{ nên } AH = KH$$

BH là tia phân giác của ABK nên

$$ABH = \frac{1}{2}ABK = 15^\circ$$



$$\triangle CDE \text{ có } ECD = 90^\circ; CDE = 45^\circ \text{ nên } \triangle CDE \text{ vuông cân tại C.}$$

Kẻ $CI \perp ED$ suy ra $EI = ID = CI$ suy ra $ED = 2.CI$.

$$\triangle AHB \text{ và } \triangle CIA \text{ có } AHB = CIA = 90^\circ; AB = AC; ABH = CAI = 15^\circ$$

nên $\triangle AHB = \triangle CIA$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $AH = CI$. Từ đó suy ra $AK = ED$.

6.6. Trường hợp $BAC = 90^\circ$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh cho trường hợp $BAC < 90^\circ$.

Trường hợp $BAC > 90^\circ$, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$.

Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC và DMB có $AM = MD$;

$$\angle AMC = \angle DMB; BM = MC$$

Nên $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c), suy ra $\angle CAM = \angle BDM$ (1) và $BD = AC$.

Ta có $AE \perp AB; BG \perp AB$ nên $BG \parallel AE$ suy ra $\angle EAM = \angle BGA$ (so le trong) (2)

Mà $\angle BGA = \angle GBD + \angle BDM$ và $\angle EAM = \angle EAC + \angle CAM$ (3)

Nên từ (1) và (2), (3) suy ra $\angle EAC = \angle GBD$.

Ta có $AE = AB; \angle EAF = \angle ABD = 180^\circ - \angle BAC$;

$BD = AF (=AC)$.

Do đó $\triangle EAF = \triangle ABD$ (c.g.c)

Suy ra $EF = AD$,

Mà $AD = 2 \cdot AM$ (cách vẽ) nên $EF = 2AM$.

Do $\triangle EAF = \triangle ABD$ nên $\angle AEF = \angle BAD$

Mà $\angle BAD + \angle DAE = 90^\circ$ nên $\angle AEF + \angle DAE = 90^\circ$

Suy ra $AM \perp EF$ (điều phải chứng minh).

6.7.

Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F.

Do $AB = AC, \angle ABE = \angle CAF$ (cùng phụ với góc AEB);

$$\angle BAE = \angle ACF = 90^\circ \text{ nên}$$

$$\triangle BAE = \triangle ACF \text{ g.c.g} \Rightarrow AE = CF$$

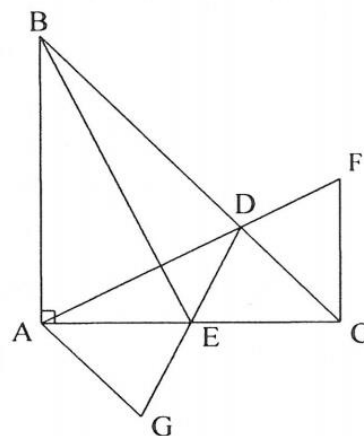
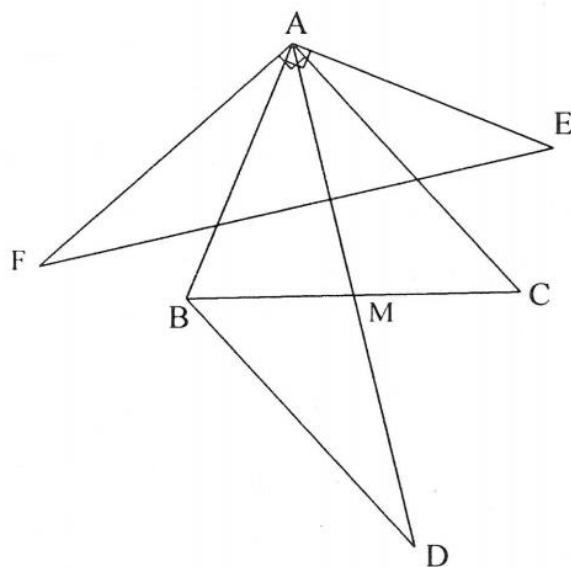
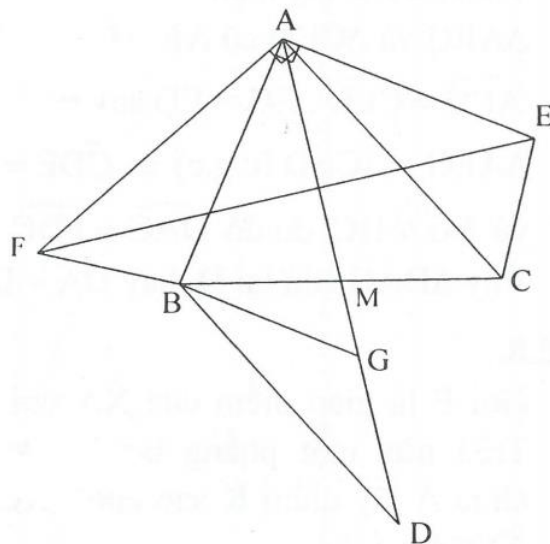
$$\Rightarrow CE = CF.$$

Suy ra $\triangle CED = \triangle CFD$ c.g.c

Trên tia DE lấy điểm G sao cho $EG = ED$,

$$\triangle AEG \text{ và } \triangle CED \text{ có } AE = CE,$$

$$\angle AEG = \angle CED, EG = ED \text{ suy ra}$$



$$\triangle AEG = \triangle CED \quad \text{c.g.c} \Rightarrow CDE = AGE$$

và $AG \parallel DC$, do đó $DAG = FDC$ (đồng vị) suy ra $DAG = DGA$.

Vậy $\triangle DAG$ cân tại D, hay $DA = DG = 2DE$ (điều phải chứng minh).

6.8.

Gọi E là giao điểm của XA với YZ.

Trên nửa mặt phẳng bờ XC không

chứa A lấy điểm K sao cho $\triangle XCK = \triangle XBA$.

Ta có $XK = XA$ và $KXC = AXB$ suy ra

$$AXK = BXC = 120^\circ$$

Do đó $XAK = 30^\circ$. Mặt khác, ta có $CK = BA = AZ$

(vì $\triangle XCK = \triangle XBA$ và $\triangle ABZ$ đều); $CA = AY$ (vì $\triangle YCA$ đều);

$$ACK = ACB + BCX + XCK = C + 30^\circ + XBA$$

$$= C + 30^\circ + 30^\circ + B = 60^\circ + 180^\circ - A$$

$$= 240^\circ - 360^\circ - YAC - ZAB - YAZ = YAZ;$$

suy ra $\triangle CAK = \triangle AYZ$ (c.g.c)

do đó $CAK = AYZ = EYA$

Ta có: $EAY + CAK = 180^\circ - YAC + XAK = 180^\circ - 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

$\triangle EAY$ có $EAY + EYA = 90^\circ$, suy ra $AEY = 90^\circ$. Vậy $XA \perp YZ$.

6.9.

* Trên tia đối của tia MA lấy A' sao cho $MA' = MA$.

Khi đó $\triangle MCA' = \triangle MBA$ (c.g.c),

suy ra $CA' = AB$ (1);

$$MCA' = MBA = 54^\circ$$

Do đó $ACA' = ACB + BCA' = 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ$

Từ $\triangle ABC = \triangle CA'A$ c.g.c $\Rightarrow AA' = BC$; $MC = MA = \frac{1}{2}BC$, $MAC = MCA = 36^\circ$.

Mặt khác, CD là phân giác ACB nên $ECA = 18^\circ$, $A'EC$ là góc ngoài của tam giác AEC nên

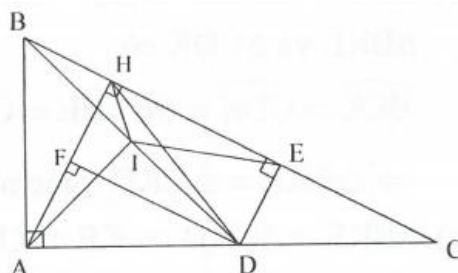
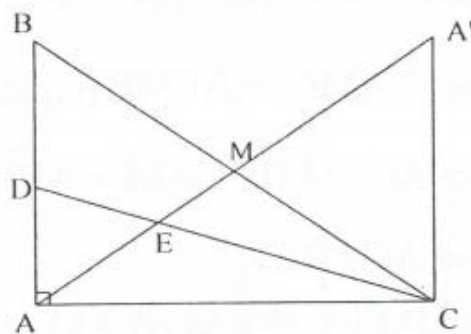
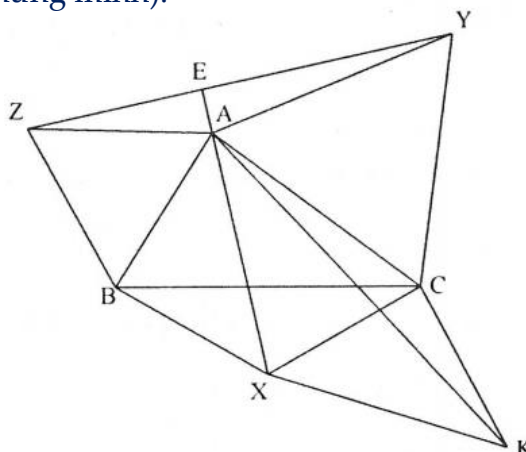
$$A'EC = EAC + ECA = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ = EA'C,$$

suy ra tam giác ECA' cân tại C, nên $CE = CA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CE = AB$.

6.10.

Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F.



Xét các tam giác vuông ABD và EBD

$$\text{Có } IB = ID \text{ nên } AI = EI = \frac{BD}{2}.$$

Ta có $\triangle ABH = \triangle DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DF$ (1).

$$\triangle HED = \triangle DFH \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)} \Rightarrow HE = DF \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2), suy ra: $AH = HE$. Từ đó $\triangle IHA = \triangle IHE$ (c.c.c)

$$\Rightarrow IHA = IHE = 90^\circ : 2 = 45^\circ. \text{ Ta có } BIH + IBH = IHE = 45^\circ$$

Mà $IBH = FDI$ (so le trong) $\Rightarrow BIH = ADF$. Lại có $ADF = ACB$ (đồng vị), suy ra $BIH = ACB$ (điều phải chứng minh).

Chủ đề 7. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ba điểm cùng thuộc một đường thẳng gọi là ba điểm thẳng hàng. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta có thể sử dụng một số phương pháp sau đây:

1. Phương pháp 1.

Nếu $\angle ABD + \angle DBC = 180^\circ$ thì ba

Điểm A; B; C thẳng hàng.

2. Phương pháp 2.

Nếu $AB \parallel a$ và $AC \parallel a$ thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: tiên đề O-Clit)

3. Phương pháp 3.

Nếu $AB \perp a$; $AC \perp a$ thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: Có một và chỉ một đường

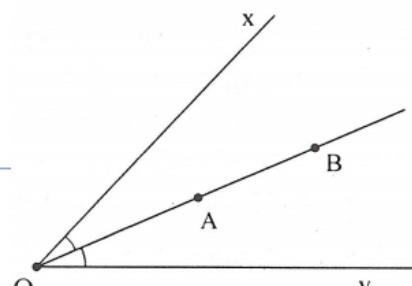
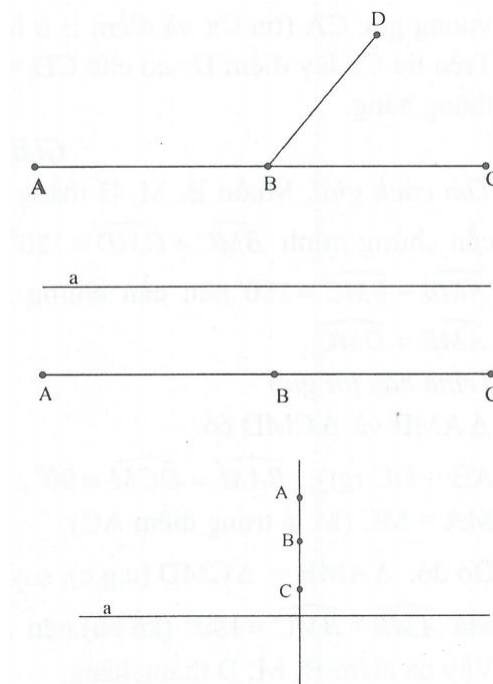
thẳng a' đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước)

Hoặc A; B; C cùng thuộc một đường trung trực của một đoạn thẳng.

4. Phương pháp 4.

Nếu tia OA và tia OB là hai tia phân giác của góc xOy thì ba điểm O; A; B thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là:



Mỗi góc khác góc bẹt có một và chỉ một tia phân giác).

* **Hoặc:** Hai tia OA và OB cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa

tia Ox, $\angle AOX = \angle BOX$ thì ba điểm O, A, B thẳng hàng.

5. Nếu K là trung điểm BD, K' là giao điểm của BD và AC. Nếu K' là trung điểm BD thì $K' \equiv K$ và A, K, C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: Mỗi đoạn thẳng chỉ có một trung điểm).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm AC. Kẻ tia Cx vuông góc CA (tia Cx và điểm B ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Trên tia Cx lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

Giải

* **Tìm cách giải.** Muốn B, M, D thẳng hàng

cần chứng minh $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$. Do

$\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$ nên cần chứng minh

$\angle AMB = \angle DMC$

* **Trình bày lời giải**

$\triangle AMB$ và $\triangle CMD$ có:

$AB = DC$ (gt), $\angle BAM = \angle DCM = 90^\circ$,

$MA = MC$ (M là trung điểm AC)

Do đó: $\triangle AMB = \triangle CMD$ (c.g.c), suy ra: $\angle AMB = \angle DMC$

Mà $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$ (kề bù) nên $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$

Vậy ba điểm B; M; D thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm AM, trên tia AD lấy điểm N sao cho D là trung điểm AN. Chứng minh ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Giải

* **Tìm cách giải.** Chứng minh: $CM \parallel BD$ và $CN \parallel BD$ từ đó suy ra M, C, N thẳng hàng.

* **Trình bày lời giải**

$\triangle AOD$ và $\triangle COB$ có $OA = OC$

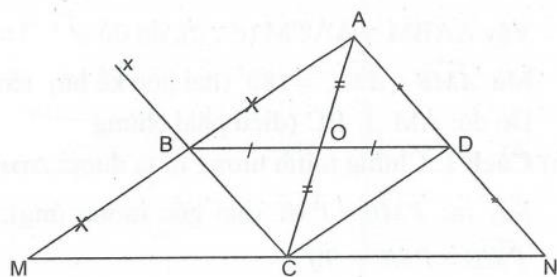
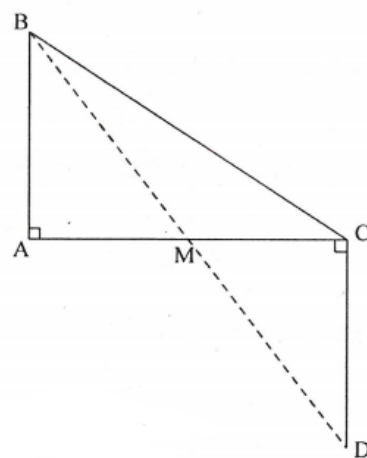
(vì O là trung điểm AC)

$\angle AOD = \angle COB$ (hai góc đối đỉnh)

$OD = OB$

(vì O là trung điểm BD)

Do đó $\triangle AOD = \triangle COB$ (c.g.c)



Suy ra: $DAO = OCB$. Mà hai góc ở vị trí so le trong,

do đó: $AD \parallel BC$, nên $DAB = CBM$ (ở vị trí đồng vị)

$\triangle DAB$ và $\triangle CBM$ có: $AD = BC$ (do $\triangle AOD = \triangle COB$), $DAB = CBM$, $AB = BM$ (B là trung điểm AM). Vậy $\triangle DAB = \triangle CBM$ (c.g.c). Suy ra $ABD = BMC$. Do đó $BD \parallel CM$. (1)

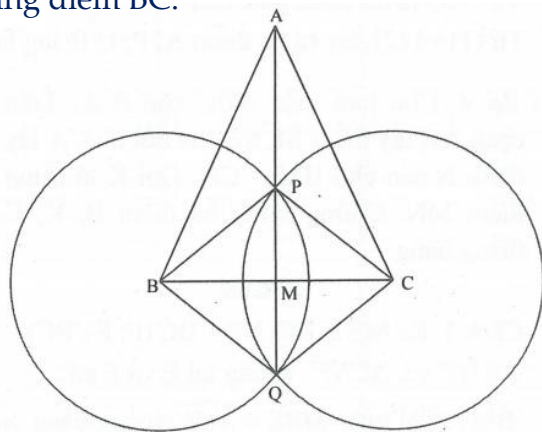
Lập luận tương tự ta được $BD \parallel CN$. (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề O-Clit suy ra ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AM \perp BC$.

b) Vẽ hai đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.



Giải

* *Tìm cách giải.* Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng, chúng ta có thể:

- Chứng minh AM, PM, QM cùng vuông góc BC

- Hoặc AP, AQ là tia phân giác của góc BAC.

* *Trình bày lời giải*

a) $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có: $AB = AC$ (giả thiết), AM chung, $MB = MC$ (M là trung điểm BC)

Vậy $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c), do đó $\angle AMB = \angle AMC$ (hai góc tương ứng).

Mà $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$

Do đó: $AM \perp BC$ (điều phải chứng minh).

b) **Cách 1.** Chứng minh tương tự ta được: $\triangle BPM = \triangle CPM$ (c.c.c).

Suy ra: $\angle PMB = \angle PMC$ (hai góc tương ứng), mà $\angle PMB + \angle PMC = 180^\circ$ nên $\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ$

Do đó: $PM \perp BC$.

Lập luận tương tự $QM \perp BC$.

Từ điểm M trên BC có $AM \perp BC$, $PM \perp BC$, $QM \perp BC$ nên ba điểm A, P, Q thẳng hàng (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.** $\triangle BPA$ và $\triangle CPA$ có $AB = AC$, AP là cạnh chung, $BP = CP$ (cùng bán kính)

$\Rightarrow \triangle BPA = \triangle CPA$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BAP = \angle CAP$. Vậy AP là tia phân giác của $\angle BAC$. (1)

$\triangle ABQ$ và $\triangle ACQ$ có $AB = AC$, AQ là cạnh chung, $BQ = CQ$ (cùng bán kính) $\Rightarrow \triangle ABQ = \triangle ACQ$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BAQ = \angle CAQ$.

Vậy AQ là tia phân giác của BAC . (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A; P; Q thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng.

Giải

- **Cách 1.** Kẻ $ME \perp BC; NF \perp BC$ $E; F \in BC$

$\triangle BME$ và $\triangle CNF$ vuông tại E và F có:

$BM = CN$ (gt), $\angle MBE = \angle NCF$ (cùng bằng $\angle ACB$)

Do đó: $\triangle BME = \triangle CNF$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra: $ME = NF$.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

$\triangle MEK'$ và $\triangle NFK'$ vuông ở E và F có: $ME = NF$ (cmt), $\angle EMK' = \angle FNK'$

(so le trong của $ME \parallel FN$). Vậy $\triangle MEK' = \triangle NFK'$ (g-c-g).

Do đó: $MK' = NK'$.

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K = K'$

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- **Cách 2.** Kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$\Rightarrow \angle ACB = \angle MEB$ (hai góc đồng vị)

Mà $\angle ACB = \angle ABC$ nên $\angle MBE = \angle MEB$

Vậy $\triangle MBE$ cân ở M.

Do đó: $MB = ME$, kết hợp với giả

thiết $MB = NC$ ta được $ME = CN$.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

$\triangle MEK'$ và $\triangle NCK'$ có: $\angle K'ME = \angle K'NC$

(so le trong của $ME \parallel AC$)

$ME = CN$ (chứng minh trên), $\angle MEK' = \angle NCK'$ (so le trong của $ME \parallel AC$).

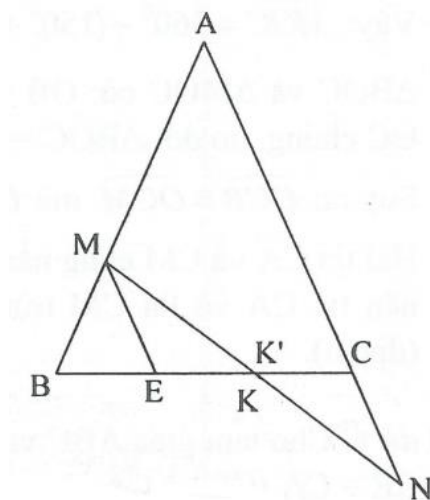
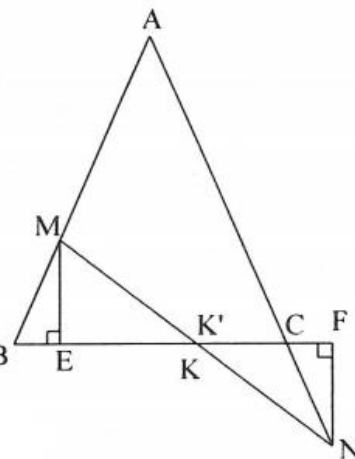
Do đó: $\triangle MEK' = \triangle NCK'$ (g.c.g) $\Rightarrow MK' = NK'$

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K \equiv K'$.

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- **Lưu ý.** Cả hai cách giải trên, có nhiều bạn chứng minh $\triangle MEK = \triangle NCK$ vô tình thừa nhận B, K, C thẳng hàng, việc chứng minh nghe có lý lắm nhưng không biết là chưa chính xác.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân ở A, $\angle BAC = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\angle CBO = 12^\circ$. Vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.



Giải

* *Tìm cách giải.* Chứng minh $OCA = OCM$ từ đó suy ra tia CA và tia CM trùng nhau.

* *Trình bày lời giải*

Tam giác ABC cân ở A nên

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

(tính chất của tam giác cân).

Mà CO là tia phân giác của $\angle ACB$,

nên $\angle ACO = \angle BCO = 18^\circ$. Do đó $\angle BOC = 150^\circ$

$\triangle BOM$ đều nên $\angle BOM = 60^\circ$.

Vậy: $\angle MOC = 360^\circ - 150^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

$\triangle BOC$ và $\triangle MOC$ có: $OB = OM$ (vì $\triangle BOM$ đều);

$\angle BOC = \angle MOC = 150^\circ$;

OC chung, do đó: $\triangle BOC = \triangle MOC$ (c.g.c)

Suy ra: $\angle OCB = \angle OCM$ mà $\angle OCB = \angle OCA$ (gt) nên $\angle OCA = \angle OCM$

Hai tia CA và CM cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ CO và $\angle OCA = \angle OCM$

nên tia CA và tia CM trùng nhau. Vậy ba điểm C, A, M thẳng hàng. (đpcm).

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\angle B = 60^\circ$. Vẽ tia $Cx \perp BC$ và lấy $CE = CA$ (CE và CA cùng phía với BC). Trên tia đối tia BC và lấy F sao cho $BF = BA$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ACE$ đều;

b) E, A, F thẳng hàng.

Giải

* *Tìm cách giải.* Nhận thấy tam giác

ABC vuông tại A và $\angle B = 60^\circ$ nên

$$\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle ACE = 60^\circ$$

$\triangle CAE$ đều.

Do đó muốn chứng tỏ B, A, F

thẳng hàng thì chúng ta chỉ cần

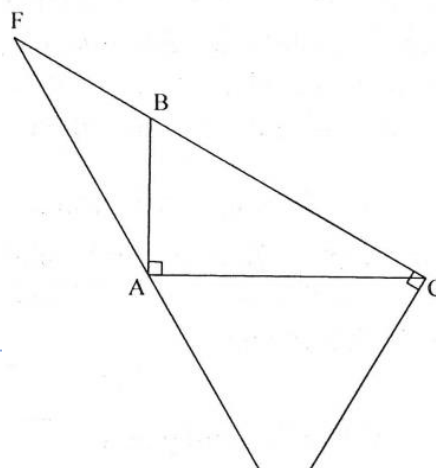
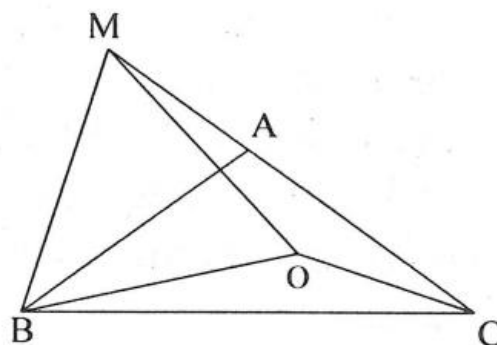
chứng tỏ $\angle BAF = 30^\circ$.

* *Trình bày lời giải.*

a) ABC vuông tại A và $\angle B = 60^\circ$ nên $\angle ACB = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle ACE = 60^\circ$ mà $CA = CE$ nên $\triangle CAE$ đều.

b) Ta có: $BA = BF$ (gt) $\Rightarrow \triangle BFA$ cân $\Rightarrow \angle ABC = 2 \cdot \angle BAF$.



Suy ra: $BAF = 30^\circ$.

Vậy: $FAB + BAC + CAE = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Ta suy ra ba điểm F; A; E thẳng hàng.

C. Bài Tập vận dụng

7.1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$.

Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

7.2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có góc $A < 90^\circ$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a) $\triangle BCE = \triangle CBD$;

b) $\triangle BEK = \triangle CDK$;

c) AK là phân giác góc BAC.

d) Ba điểm A, K, I thẳng hàng (với I là trung điểm BC).

7.3. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của $\angle BAC$ (D thuộc BC). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle BDF = \triangle EDC$;

b) F, D, E thẳng hàng;

c) $AD \perp FC$

7.4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tam giác BCM cân tại M có góc ở đáy là 15° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ tam giác đều ABN. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

7.5. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A là $\triangle ADB$; $\triangle ACE$ có $AB = AD$, $AC = AE$. Kẻ AH vuông góc BC; DM vuông góc AH và EN vuông góc AH. Chứng minh rằng:

a) $DM = AH$.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng.

7.6. Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt hai điểm B và C sao cho $OB = OC$. Vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm A và D nằm trong góc xOy. Chứng minh ba điểm O, A, D thẳng hàng.

7.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh A, D, M thẳng hàng.

7.8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $BC = 2AB$. Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho $\angle ABD = \frac{1}{3} \angle ABC$. Lấy E là một điểm trên cạnh AB sao cho $\angle ACE = \frac{1}{3} \angle ACB$. BD và CE cắt nhau tại F; I và K theo thứ

7.9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H; $\angle ACB = 30^\circ$. Dựng tam giác ACD đều (D và B nằm khác phía đối với AC). Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, K, D thẳng hàng.

7.1.

$$AMC = EMB; MB = MC$$

$$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB \text{ (c.g.c)}$$

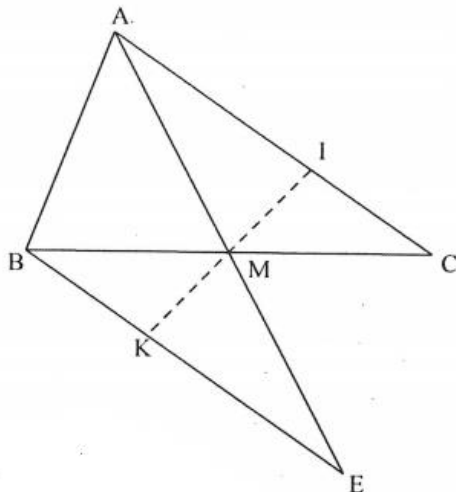
$$\Rightarrow AC = EB; CAM = MEB$$

$$\Rightarrow AC \parallel BD.$$

$$CAM = MEB; AI = EK \Rightarrow \triangle AIM = \triangle EKM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK} \text{ mà } \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ I, M, K thẳng hàng.



7.2.

$$\Rightarrow \triangle BCE = \triangle CBD \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$\triangle BKE$ và $\triangle CDK$ có

$$BEK = CDK = 90^\circ; BE = CD; BKE = CKD$$

$$\Rightarrow \Delta BKE = \Delta CKD \text{ (góc nhọn, cạnh góc vuông)}$$

$\triangle AEK$ và $\triangle ADK$ có $AEK = ADK = 90^\circ$;

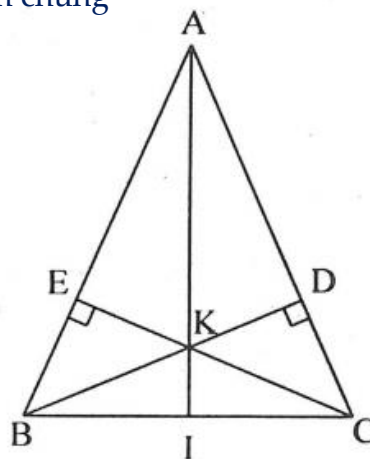
AI chung; $KE = KD \Rightarrow \triangle AEK = \triangle ADK \Rightarrow EAK = DAK$

Hay AK là tia phân giác BAC (1).

$$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI \text{ (c.c.c)}$$

$\Rightarrow BAI = CAI$ hay AI là tia phân giác của BAC (2)

Từ (1) và (2) suy ra A; K; I thẳng hàng.



7.3.

a) $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có $AB = AE$; $\angle BAD = \angle EAD$; AD là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BD = ED; \angle ABD = \angle AED.$$

Mặt khác $\angle ABD + \angle DBF = 180^\circ$; $\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$ nên $\angle DBF = \angle DEC$.

Ta có $AF = AC$; $AB = AE \Rightarrow BF = EC$.

$\triangle BDF$ và $\triangle EDC$ có $BF = EC$;

$$\angle DBF = \angle DEC; DB = DE$$

$$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle EDC \text{ (c.g.c)}$$

b) $\triangle BDF = \triangle EDC$

$$\Rightarrow \angle BDF = \angle EDC \text{ mà}$$

$$\angle BDF + \angle FDC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EDC + \angle FDC = 180^\circ$$

$\Rightarrow F, D, E$ thẳng hàng.

c) Gọi H là giao điểm của AD và CF

$\triangle AHF$ và $\triangle AHC$ có $AF = AC$; $\angle FAH = \angle CAH$; AH chung

$$\triangle AHF = \triangle AHC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle AHF = \angle AHC \text{ mà } \angle AHF + \angle AHC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHF = \angle AHC = 90^\circ$$

Vậy $AH \perp FC$ hay $AD \perp FC$.

7.4.

Gợi ý: Tính góc $\angle ABN = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABM = \angle ABC + \angle CBM = 60^\circ \text{ mà } BN;$$

BM thuộc cùng một nửa mặt phẳng

bên AB nên tia BM trùng với tia BN .

Vậy B, M, N thẳng hàng.

7.5.

a) Ta có $\triangle DMA$ vuông tại M nên $\angle MDA + \angle MAD = 90^\circ$ mà $\angle BAH + \angle MAD = 90^\circ$ (vì $\angle BAD = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \angle MDA = \angle BAH$$

Xét $\triangle DMA$ và $\triangle AHB$ có $\angle DMA = \angle AHB = 90^\circ$;

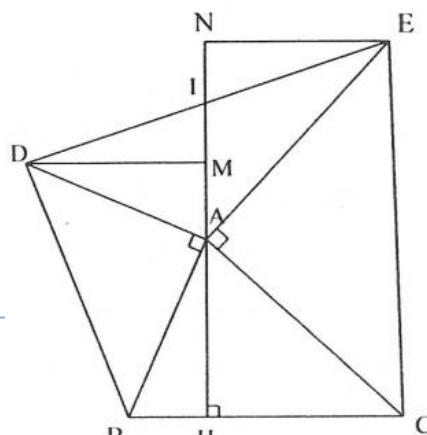
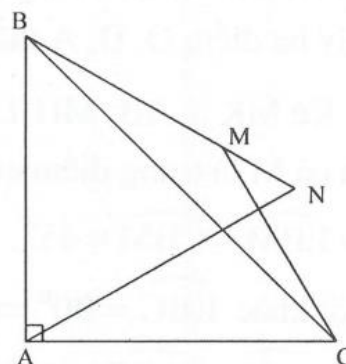
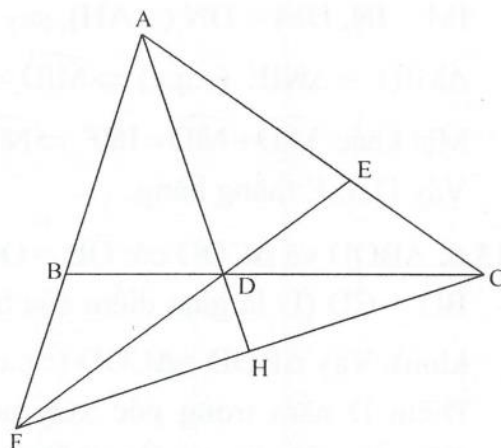
$$\angle MDA = \angle BAH; AD = AB \text{ nên } \triangle DMA = \triangle AHB$$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow DM = AH$.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$$\triangle ANE = \triangle CHA, \text{ suy ra } AH = EN.$$

Xét $\triangle MID$ và $\triangle NIE$ có $\angle IMD = \angle INE = 90^\circ$,



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$IM = IN, DM = DN (= AH)$, suy ra

$$\triangle MID = \triangle NIE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MID = NIE.$$

Mặt khác $MID + NID = 180^\circ \Rightarrow NIE + NID = 180^\circ$

Vậy D, I, E thẳng hàng.

7.6. $\triangle BOD$ và $\triangle COD$ có: $OB = OC$ (gt); OD cạnh chung;

$BD = CD$ (D là giao điểm của hai đường tròn tâm B và tâm C cùng bán kính). Vậy

$$\triangle BOD = \triangle COD \text{ (c.c.c)}, \text{ suy ra: } BOD = COD.$$

Điểm D nằm trong góc xOy nên tia

OD nằm giữa hai tia Ox và Oy .

Do đó OD là tia phân giác của xOy .

Chúng minh tương tự ta được OA là

tia phân giác của xOy .

Góc xOy chỉ có một tia phân giác nên

hai tia OD và OA trùng nhau.

Vậy ba điểm O, D, A thẳng hàng.

7.7. Kẻ $MK \perp AB$; $MH \perp AC$,

Ta có M là trung điểm của CE nên $\triangle BME = \triangle BMC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow EBM = CBM = 45^\circ$$

Mặt khác $EBC = 90^\circ \Rightarrow KBE + ABC = 90^\circ$

Mà $ACB + ABC = 90^\circ$, suy ra: $KBE = ACB \Rightarrow KBM = HCM$.

Lại có $BM = MC \Rightarrow \triangle KBM = \triangle HCM$

(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$

$$\Rightarrow \triangle AKM = \triangle AHM \text{ (cạnh huyền, cạnh}$$

góc vuông) $\Rightarrow KAM = HAM \Rightarrow AM$

là tia phân giác của góc A.

Mặt khác, $\triangle BAD$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow BAD = 45^\circ \Rightarrow AD \text{ là tia phân giác}$$

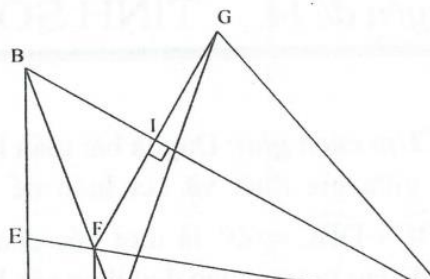
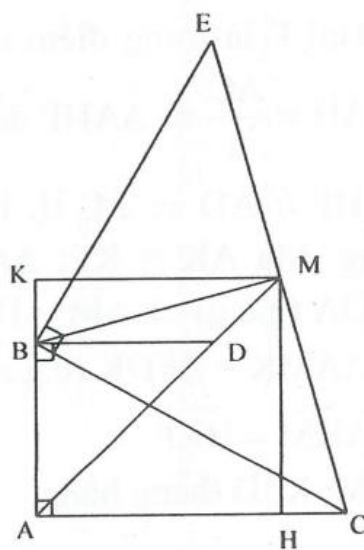
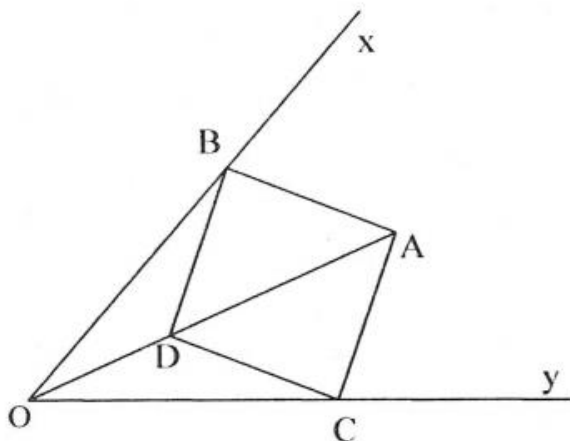
của góc A

$$\Rightarrow A; D; M \text{ thẳng hàng (vì } A; D; M$$

cùng thuộc tia phân giác của góc A).

7.8. Theo đề bài $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$ nên $ABC = 60^\circ; ACB = 30^\circ$.

$$ABD = \frac{1}{3} ABC = 20^\circ \Rightarrow DBC = 40^\circ$$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$ABD = \frac{1}{3} ABC = 10^\circ \Rightarrow BCE = 20^\circ$$

$\triangle CIF$ và $\triangle CIG$ có $IF = IG$ (gt)

$CIF = CIG = 90^\circ$; IC : cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle CIF = \triangle CIG \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow CG = CF \text{ và } ICG = ICF = 20^\circ$$

Tương tự $\triangle CKF = \triangle CKH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow CF = CH \text{ và } KCH = KCF = 10^\circ$$

Từ đó suy ra $CG = CH$ và $GCF + FCH = 2ACB = 60^\circ$, do đó $CHG = 60^\circ$ (1)

$\triangle DKF = \triangle DKH$ vì có $KF = KH$ (giả thiết), $DKF = DKH = 90^\circ$, KD : cạnh chung, do đó $DF = DH$,
vì thế $\triangle CDF = \triangle CDH$ (c.c.c) suy ra $CHD = CFD$.

$$\triangle ABD \text{ vuông tại } A \text{ có } ABD = 20^\circ \Rightarrow ADB = 70^\circ \Rightarrow CDF = 110^\circ$$

$$\Rightarrow CFD = 180^\circ - CDF - FCD = 180^\circ - 110^\circ - 10^\circ = 60^\circ \text{ vì thế } CHD = 60^\circ \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $CHD = 60^\circ = CHG$. Mà hai tia HD , HG cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng HC nên HD trùng với HG , nghĩa là ba điểm H , D , G thẳng hàng.

7.9. Gọi F là trung điểm của AC

$$\Rightarrow AH = \frac{AC}{2} \Rightarrow \triangle AHF \text{ đều}$$

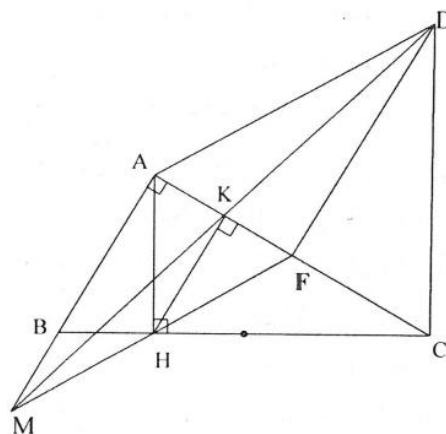
$$\Rightarrow HF \parallel AD \Rightarrow M, H, F \text{ thẳng hàng.}$$

Mà $AK = KF$; $\triangle AMF = \triangle FDA$ g.c.g $\Rightarrow AM = DF$

$$\Rightarrow \triangle AMK = \triangle FDK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AKM = DKF$$

$$\Rightarrow M, K, D \text{ thẳng hàng.}$$



Chủ đề 8. TÍNH SỐ ĐO GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải tốt bài toán tính số đo góc thì chúng ta phải nắm vững kiến thức cơ bản sau:

* **Trong tam giác:**

+ Tổng ba góc trong bằng 180° .

+ Biết hai góc chúng ta xác định được góc còn lại.

* **Trong tam giác cân:** Biết một góc chúng ta xác định được hai góc còn lại.

* **Trong tam giác vuông:**

+ Biết một góc nhọn, chúng ta xác định được góc nhọn còn lại.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

+ Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó có số đo bằng 30° .

* **Trong tam giác vuông cân:** Mỗi góc nhọn có số đo bằng 45° .

* **Trong tam giác đều:** Mỗi góc có số đo bằng 60° .

* Đường phân giác của một góc chia góc đó ra hai góc có số đo bằng nhau.

* Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

* Tính chất về góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía, của một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.

Trong thực tế, để giải bài toán tính số đo góc, ta thường xét các góc đó nằm trong mối liên hệ với các góc ở các hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhau, ... rồi suy ra kết quả.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, $C = 30^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, biết rằng $AH = \frac{1}{2}BC$. Gọi D là trung điểm của AB. Tính số đo góc ACD?

Giải

* **Tìm cách giải.** Xuất phát từ $\triangle AHC$ vuông có $C = 30^\circ$ và $AH = \frac{1}{2}BC$. Với hai yếu tố này giúp chúng ta nghĩ tới tam giác vuông có một góc bằng 30° . Với lập luận đó, chúng ta nghĩ tới việc chứng minh tam giác ABC cân. Chúng ta có thể giải theo hướng suy nghĩ đó.

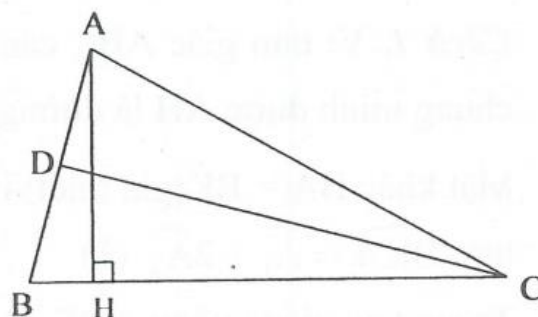
* **Trình bày lời giải.**

Xét $\triangle AHC$ có $C = 30^\circ, AHC = 90^\circ$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$$

$$\text{Mà } AH = \frac{1}{2}BC \text{ gt } \Rightarrow AC = BC$$

$\Rightarrow \triangle ACB$ cân tại C $\Rightarrow CD$ là đường phân giác của góc C $\Rightarrow ACD = 15^\circ$.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Biết rằng $BI = 2.IM$ và $BIM = 90^\circ$. Tính số đo A.

Giải

* **Tìm cách giải.** Dựa vào ví dụ 4, chuyên đề 7, chúng ta biết rằng $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Do vậy chúng ta chỉ cần tính BIC . Mặt khác, theo giả thiết $BIM = 90^\circ$ nên chúng ta chỉ cần tính MIC . Do $MB = MC$ và $BI = 2.IM$ nên dễ dàng suy luận được tạo ra điểm D sao cho M là trung điểm của ID. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

* **Trình bày lời giải.**

Trên tia đối của tia MI lấy $MD = MI$. $BMI = CMD; IM = DM$

Suy ra $\triangle BIM = \triangle CDM$ c.g.c $\Rightarrow BI = CD; BIM = CDM \Rightarrow CDI = 90^\circ$

Từ $BI = 2.IM \Rightarrow BI = ID = 2.IM$

$\Rightarrow CD = ID \Rightarrow \triangle CDI$ vuông cân tại D

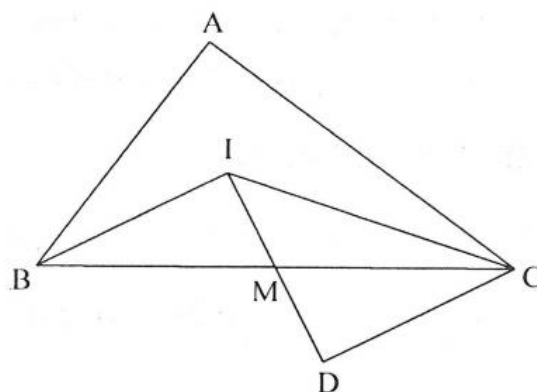
$\Rightarrow CID = 45^\circ \Rightarrow BIC = 135^\circ$

$\triangle BIC$ có $BIC = 135^\circ$ nên

$IBC + ICB = 45^\circ$

BI; CI là tia phân giác B và C nên

$ABC + ACB = 2. IBC + ICB = 90^\circ$, suy ra $A = 90^\circ$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân ở tại A với $BAC < 90^\circ$ và kẻ BD, AH lần lượt vuông góc với AC; BC. Trên tia BD lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Tính số đo của góc HAK.

Giải

- **Cách 1.** Vì tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC, dễ dàng chứng minh được AH là đường phân giác của góc BAC suy ra $A_2 = A_3$.

Mặt khác $BA = BK$ (giả thiết) nên $\triangle ABK$ cân tại B, suy ra $BKA = BAK$

hay $BKA = A_1 + 2A_2$ (1)

Trong tam giác vuông ADK có:

$K + A_1 = 90^\circ$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$2A_1 + 2A_2 = 90^\circ$,

Suy ra $A_1 + A_2 = 45^\circ$

Vậy $HAK = 45^\circ$

- **Cách 2.** Gọi I là giao điểm của AK và BC.

$\triangle BIK$ có $AKB = \hat{I} + CBD$ (góc ngoài tam giác)

Mà $CBD = A_2 = 90^\circ - ACB$ nên $AKB = \hat{I} + A_2$ (1)

Ta có $KAB = IAH + A_3$ (2)

Mặt khác: $AKB = KAB$ (3).

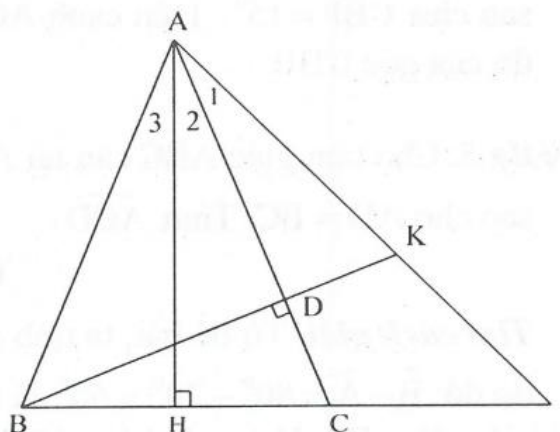
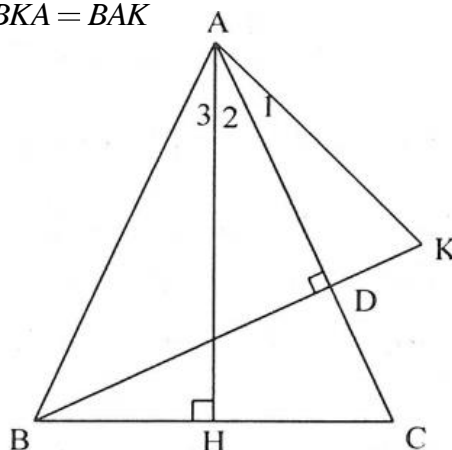
Từ (1), (2), (3) suy ra:

$IAH + A_3 = \hat{I} + A_2$

Lại có $A_2 = A_3 \Rightarrow IAH = \hat{I}$

suy ra $\triangle AHI$ cân tại H

$\Rightarrow HAK = 45^\circ$



*** Nhận xét:**

- Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài hai cách tính trên đây, chúng ta có thể hạ $KJ \perp AH$ $J \in AH$ rồi chứng minh $\triangle AJK$ vuông cân tại J.
- Nếu $BAC > 90^\circ$ ta có kết quả $HAK = 135^\circ$ (bạn đọc tự chứng minh theo ý tưởng trên)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $ABE = 15^\circ$ và $CE = CF$. Tính số đo của góc CBF.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F, dựng tam giác đều BED. Ta có

$$EBC = ABC - ABE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow CBD = 30^\circ$$

Khi đó BC là tia phân giác góc EBD nên

$$\triangle BCD = \triangle BCE \text{ (c.c.c)} \Rightarrow CD = CE = CF,$$

Suy ra tam giác DEF vuông

tại D. Ta có:

$$DEF = 180^\circ - AEB - BED$$

$$= 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

Vậy DEF vuông cân tại D.

Lại có.

$$DFE = 45^\circ; ACB = 45^\circ \Rightarrow DFE = ACB, \text{ do đó } BC \parallel DF.$$

Ta lại có tam giác DBF cân tại D (vì $DB = DF = DE$) và $BDF = BDE + EDF + 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ nên

$$DFB = DBF = 15^\circ, \text{ suy ra } CBF = DFB = 15^\circ. \text{ Vậy } CBF = 15^\circ$$

*** Nhận xét.** Dựa vào kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CBF = 15^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = CF$. Tính số đo của góc CBE.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính ACD .

Giải

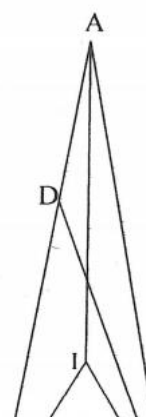
*** Tìm cách giải.** Từ đề bài, ta tính được $B = C = 80^\circ$ do đó $B - A = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam

giác đều. Do đó ta có thể nghĩ đến phương pháp để vẽ đường phụ là tam giác đều.

Khi vẽ đường phụ chúng ta chú ý vẽ xuất phát điểm luôn luôn xuất hiện mối liên hệ giữa $20^\circ; 60^\circ; 80^\circ$. Sau đây là một vài cách:

*** Trình bày lời giải**

- **Cách vẽ 1.** Dựng điểm I nằm trong tam giác sao cho tam giác BIC là tam giác đều.



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Ta có $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$, $IB = IC$, AI là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle CAI = 10^\circ \text{ (1)}$$

Mặt khác $\triangle ADC$ và $\triangle CIA$ có $AD = CI (= BC)$,

$$\angle DAC = \angle ICA = 20^\circ, AC \text{ là cạnh chung } \triangle ADC = \triangle CIA$$

$$\text{(c.g.c)} \Rightarrow \angle ACD = \angle CAI \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \angle ACD = 10^\circ$$

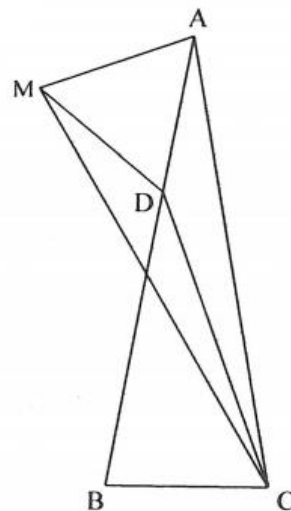
- **Cách vẽ 2.** Dựng tam giác đều ADM (M và C khác phía so với AB). suy ra: $\angle CAM = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$

$\triangle ABC$ và $\triangle CAM$ có $MA = BC$, $\angle ABC = \angle CAM = 80^\circ$,
 AC là cạnh chung. Suy ra:

$$\triangle ABC = \triangle CMA \text{ c.g.c} \Rightarrow \angle ACM = 20^\circ \text{ và } CM = AC.$$

$\triangle ADC$ và $\triangle MDC$ có $AD = MD$, $AC = MC$, CD là cạnh chung. Suy ra:

$$\triangle ADC = \triangle MDC \text{ c.c.c} \Rightarrow \angle ACD = \angle MCD = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$



- **Cách vẽ 3.** Dựng tam giác đều CAN (N khác phía so với AC) suy ra: $\angle DAN = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.

$\triangle ABC$ và $\triangle NAD$ có $AD = BC$,

$$\angle ABC = \angle NAD = 80^\circ, AB = AN = AC$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle NAD$ c.g.c

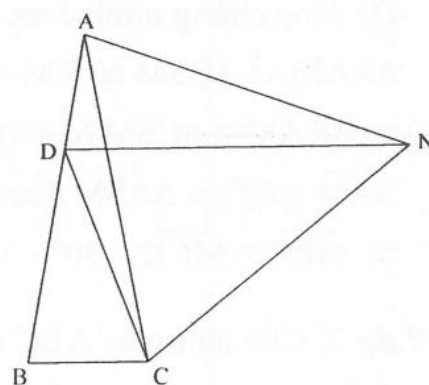
$$\Rightarrow AC = ND \text{ và } \angle AND = 20^\circ$$

Xét $\triangle DNC$ ta có $ND = NC$ (cùng bằng AC)

$$\Rightarrow \triangle CND \text{ cân tại } N \text{ mà}$$

$$\angle CND = 60^\circ - \angle AND = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle NCD = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \angle ACD = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$



- **Cách vẽ 4.** Dựng tam giác đều ABK (K ; C cùng phía so với AB).

Ta có $\triangle ACK$ cân tại A mà

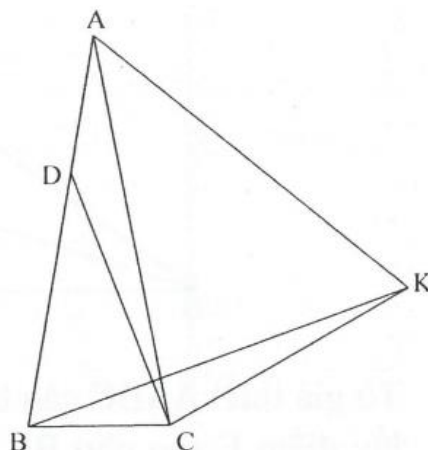
$$\angle CAK = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AKC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Mặt khác: $\triangle ADC$ và $\triangle BCK$ có $AD = BC$,

$$\angle DAC = \angle CBK = 20^\circ, AC = AK = AB.$$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle BCK$ c.g.c



$$\Rightarrow \angle ACD = \angle BKC = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle MAC = 15^\circ$. Tính số đo góc $\angle BCA$?

Giải

* **Tìm cách giải.** Do $\angle BAC = 45^\circ$ nên chúng ta nghĩ tới việc dựng tam giác vuông cân. Do vậy chúng ta có thể giải như sau:

* **Trình bày lời giải**

Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $\triangle AKC$ vuông cân tại K

(vì $\angle BAC = 45^\circ$)

$\Rightarrow KA = KC$. Vẽ $\triangle ASC$ vuông cân tại S (K, S khác phía so với A)

Do $\triangle BKC$ vuông tại K $\Rightarrow KM = \frac{1}{2}BC = MC$

$\Rightarrow \triangle KMC$ cân tại M $\angle MKC = \angle MCK \Rightarrow \angle AKM = \angle SCM$

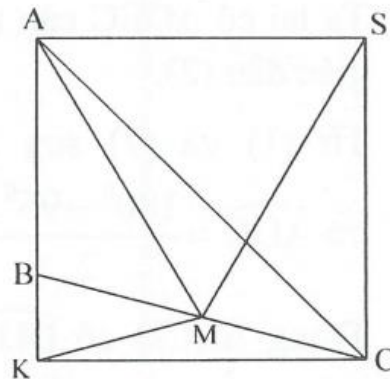
Dễ dàng chứng minh được $\triangle KAC = \triangle SAC \Rightarrow AK = CK = CS = SA$.

$\triangle KAM$ và $\triangle CSM$ có $KM = CM$, $\angle AKM = \angle SCM$, $KA = CS$

$\Rightarrow \triangle KAM = \triangle CSM$ c.g.c $\Rightarrow \angle CSM = 30^\circ \Rightarrow \angle ASM = 60^\circ$ và

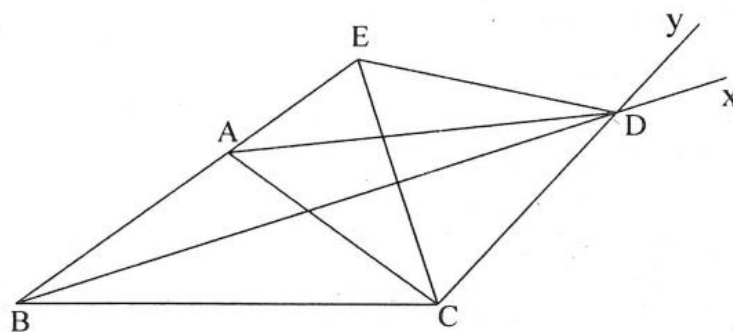
$\angle SAM = 60^\circ \Rightarrow \triangle ASM$ đều $\Rightarrow AS = SM = AK \Rightarrow \triangle AKM$ cân tại A

$\Rightarrow \angle MKC = \angle MCK = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \Rightarrow \angle BCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$



Ví dụ 7. Cho tam giác $\triangle ABC$ cân tại A có $\angle A = 3\angle B$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho $\angle BCy = 132^\circ$. Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc $\angle ADB$.

Giải



Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân tại A và $\angle A = 3\angle B$, suy ra $\angle B = \angle C = 36^\circ$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$ (E nằm ngoài đoạn AB), khi đó Bx là tia phân giác của $\angle ABC$ từ đó dễ dàng chứng minh được $BD \perp CE$.

Tam giác EBC cân tại B có; $\angle EAC = \angle ABC + \angle ACB = 72^\circ$

$\angle AEC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Do đó $\angle AEC = \angle CAE \Rightarrow \triangle ACE$ cân tại C nên $CA = CE$ (1).

Ta lại có $\triangle DEC$ cân tại D, và $ECD = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle DEC$ là tam giác đều (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CAD$ cân tại C, có $ACD = 132^\circ - 36^\circ = 96^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ.$$

Trong $\triangle BCD$ có $BDC = 180^\circ - 132^\circ - 18^\circ = 30^\circ$, suy ra:

$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 42^\circ - 30^\circ = 12^\circ. \text{ Vậy } \angle ADB = 12^\circ$$

C. Bài tập vận dụng

8.1. Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho

$$\angle DBC = 10^\circ; \angle DCB = 30^\circ. \text{ Tính số đo } \angle ADB.$$

8.2. Cho tam giác vuông ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho

$$\angle ADC = 150^\circ \text{ và tam giác DAC cân tại D. Tính số đo } \angle ADB$$

8.3. Cho $\triangle ABC, B = 45^\circ; A = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Vẽ

$$DE \perp AC, E \in AC.$$

a) Chứng minh rằng: $EB = ED$.

b) Tính số đo $\angle ADB$.

8.4. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Qua B dựng tia Bx sao cho $\angle CBx = 30^\circ$. Tia phân giác của góc ACB cắt tia Bx tại D.

a) So sánh CD với CA.

b) Tính số đo của góc BDA.

8.5. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 40^\circ$. Trên tia phân giác AD của góc A lấy điểm E sao cho

$$\angle ABE = 30^\circ; \text{ trên cạnh AC lấy điểm F sao cho } \angle CBF = 30^\circ$$

a) Chứng minh rằng: $AE = AF$.

b) Tính số đo của $\angle BEF$.

8.6. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) với $\angle BAC = 20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho

$$\angle CBD = 50^\circ, \text{ trên cạnh AB lấy điểm E sao cho } \angle BCE = 60^\circ. \text{ Tính số đo góc } \angle CED.$$

8.7. Cho tam giác ABC cân có $\angle BAC = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$\angle MAC = \angle MCA = 20^\circ. \text{ Tính số đo góc } \angle AMB.$$

8.8. Cho tam giác ABC với $\angle BAC = 55^\circ, \angle ABC = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $\angle MAC = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC.

8.9. Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle BAC = 80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$\angle MAC = \angle MCA = 10^\circ. \text{ Tính số đo góc } \angle AMB.$$

8.10. Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle BAC = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho

$$\angle MBC = 10^\circ, \angle MCB = 30^\circ. \text{ Tính số đo các góc } \angle AMB; \angle AMC.$$

8.11. Cho tam giác đều ABC, điểm D nằm giữa A và B. Đường thẳng vẽ từ D vuông góc với AC cắt đường thẳng vẽ từ B vuông góc với BC tại điểm M. Gọi N là trung điểm của AD. Tính số đo góc MCN?

HƯỚNG DẪN GIẢI

8.1. Tìm cách giải. Đây là bài toán khó bởi chúng ta khó nhận ra mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận để tìm cách giải quyết bài toán. Ta có: $\angle ABC + \angle DBC = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Từ đó chúng ta có thể vẽ để tạo ra tam giác đều theo các hướng sau:

- **Cách 1.** Dựng tam giác đều BCM (A; M cùng phía so với BC).

$\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có $AB = AC$, $MB = MC$, MA là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 30^\circ$$

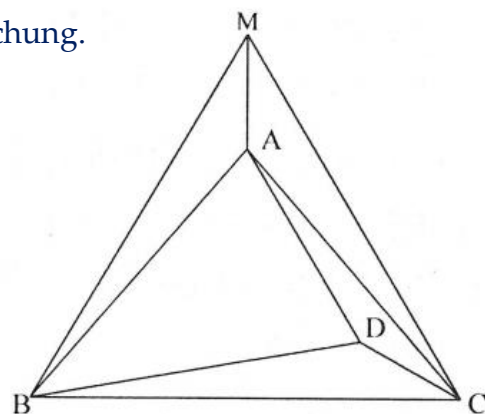
Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBC$ có $BM = BC$,

$$\angle AMB = \angle DCB = 30^\circ; \angle ABM = \angle DBC = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBC \text{ g.c.g} \Rightarrow AB = DB$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



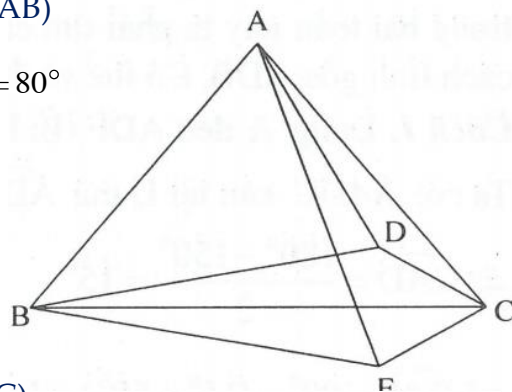
- **Cách 2.** Dựng tam giác đều ABE (C và E cùng phía so với AB)

Ta có: $\triangle ACE$ cân tại A, mà $\angle CAE = 20^\circ \Rightarrow \angle ACE = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

$$\Rightarrow \angle BCE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle BDC = \triangle BEC \text{ g.c.g}$$

$$\Rightarrow BD = BE = BA \Rightarrow \triangle BAD \text{ cân tại B}$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$



- **Cách 3.** Dựng tam giác đều ACK (B; K cùng phía so với AC)

Ta có $\triangle ABK$ cân tại K, mà

$$\angle BAK = 20^\circ \Rightarrow \angle ABK = 80^\circ$$

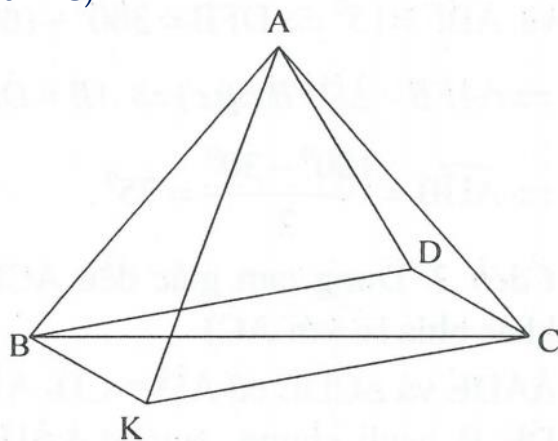
$$\Rightarrow \angle CBK = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle CKB \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BD = CK \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B}$$

Mà $\angle ABD = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



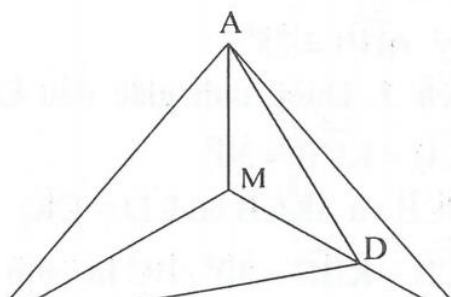
- **Cách 4.**

Kẻ tia phân giác của góc $\angle ABD$ cắt CD kéo dài tại M.

Ta có: $\angle MBC = \angle MCB = 30^\circ \Rightarrow \triangle BMC$ cân tại M $\Rightarrow \angle BMC = 120^\circ$

Mặt khác $\triangle AMB = \triangle AMC$ c.c.c

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AB = DB \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B,}$$

$$\text{Mà } \angle ABD = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

8.2. Nhận xét. Để tính được góc ADB ta cần chứng minh tam giác ABD cân tại B. Ta có $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Do vậy trong bài toán này ta phải tìm cách vẽ kẻ để tạo ra tam giác đều từ đó tìm cách tính góc ADB. Có thể vẽ đường phụ theo các cách sau:

- **Cách 1.** Dựng $\triangle$ đều ADF (B; F cùng phía so với AC).

Ta có: $\triangle ADC$ cân tại D mà $\angle ADC = 150^\circ$

$$\Rightarrow \angle CAD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAF = 90^\circ - 15^\circ + 60^\circ = 15^\circ$$

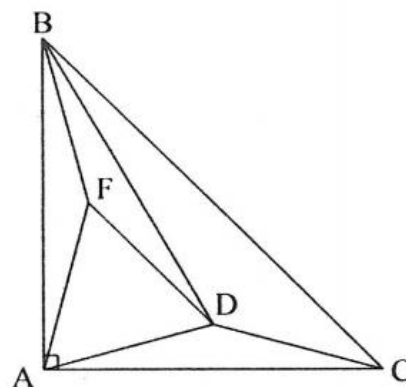
$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle AFB \text{ c.g.c} \Rightarrow \angle AFB = 150^\circ$$

$$\text{Và } \angle ABF = 15^\circ \Rightarrow \angle DFB = 360^\circ - 60^\circ + 150^\circ = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AFB = \triangle DFB \text{ c.g.c} \Rightarrow AB = DB \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B}$$

$$\text{mà } \angle ABD = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$



- **Cách 2.** Dựng tam giác đều ACE (E; B khác phía so với AC)

$\triangle ADE$ và $\triangle CDE$ có $AD = CD$, $AB = CE$,

DE là cạnh chung, suy ra

$$\triangle ADE = \triangle CDE \text{ c.c.c} \Rightarrow \angle ADE = \angle CDE = 75^\circ$$

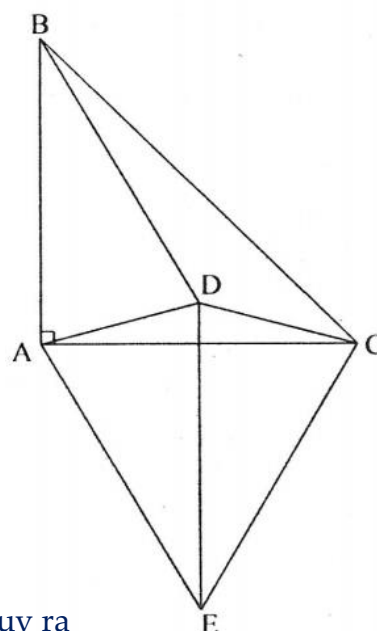
$\triangle ADE$ và $\triangle ADB$ có $AB = AE$,

$\angle BAD = \angle EAD = 75^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\triangle ADE = \triangle ADB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle ADE = \angle ADB = 75^\circ$$

Vậy $\angle ADB = 75^\circ$



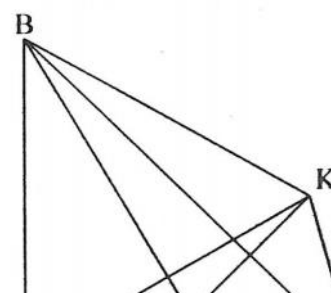
- **Cách 3.** Dựng tam giác đều CDK (K; B cùng phía so với AC) suy ra

$$\angle DCB = \angle KCB = 30^\circ$$

$\triangle DCB$ và $\triangle KCB$ có $CD = CK$,

$\angle DCB = \angle KCB = 30^\circ$, BC là cạnh chung,

suy ra $\triangle DCB = \triangle KCB$ (c.g.c)



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$\Rightarrow DB = KB (*)$$

$\triangle ADK$ và $\triangle ADC$ có $DK = DC$,

$\angle ADK = \angle ADC = 150^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\triangle ADC = \triangle ADK$ c.g.c $\Rightarrow AC = AK$; $AC = AB \Rightarrow AK = AB$ 1

Mặt khác: $\angle CAD = \angle KAD = 15^\circ \Rightarrow \angle KAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 2

Từ (1), (2) $\Rightarrow \triangle ABK$ là tam giác đều $\Rightarrow BK = BA(**)$

Từ (*) (**) $\Rightarrow DB = BA \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle BDA = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

Vậy $\angle ADB = 75^\circ$.

- **Cách 4.** Dựng tia Bx sao cho $\angle ABx = 15^\circ$ (Bx và C cùng phía so với AB).

Tia Bx cắt tia CD tại I.

Ta có $\triangle BIC$ cân tại I ($\angle IBC = \angle ICB = 30^\circ$)

$$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle CAI = 45^\circ \text{ do } \triangle BIC \text{ cân tại I}$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 180^\circ - 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Mặt khác, $\triangle ACI$ có:

$$\angle ACI = 15^\circ; \angle CAI = 45^\circ \Rightarrow \angle AIC = 180^\circ - 15^\circ + 45^\circ = 120^\circ.$$

Từ đó ta có: $\angle AIB = 360^\circ - 120^\circ + 120^\circ = 120^\circ$.

Vậy $\angle AIB = \angle DIB = 120^\circ$ (*).

Xét tam giác: $\triangle AID$ có $\angle ADI = \angle ACD + \angle CAD = 30^\circ$ (Góc ngoài tam giác)

$$\angle DAI = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle AID \text{ cân tại I} \Rightarrow IA = ID (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle AIB = \triangle DIB$ c.g.c $\Rightarrow AB = DB$ và $\angle ABI = \angle DBI = 15^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B.

$$\Rightarrow \angle ABI = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

8.3.

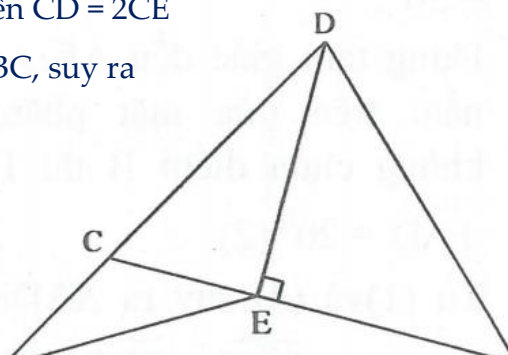
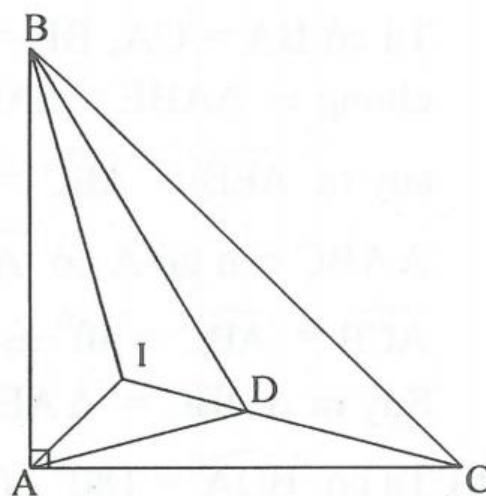
a) Ta có $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

Từ đó trong tam giác $\triangle ECD$ vuông tại E, có $\angle CDE = 30^\circ$ nên $CD = 2CE$

(theo ví dụ 8, chuyên đề 9), ta lại có $CD = 2BC$ nên $CE = BC$, suy ra

$$\angle CBE = 30^\circ = \angle CDE$$

$\triangle EBD$ cân tại E suy ra $EB = ED$.



b) Ta có $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ = \angle EAB \Rightarrow \triangle EAB$ cân tại E,

ta lại có $EA = EB = ED \Rightarrow \triangle EAD$ vuông cân tại E $\Rightarrow \angle EDA = 45^\circ$.

Vậy $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

8.4.

a) Dựng tam giác đều BEC sao cho E và

A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC.

Ta có $BA = CA$, $BE = CE$, AE là một cạnh

chung $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACE$ (c.c.c)

suy ra $\angle AEB = \angle AEC = 30^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A có $\angle A = 100^\circ$ nên suy ra

$\angle ACB = \angle ABC = 40^\circ \Rightarrow \angle ECA = \angle ACD = \angle DCB = 20^\circ$

Suy ra $\triangle DBC = \triangle AEC$ g - c - g $\Rightarrow CD = CA$

b) Ta có $\angle BDA = 180^\circ - \angle ABD + \angle BAD$ (1).

Mà $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 10^\circ$ 2 .

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = \angle BAC - \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2} \right) = 100^\circ - \left(\frac{180^\circ - 20^\circ}{2} \right) = 20^\circ \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\angle BDA = 180^\circ - \angle ABD + \angle BAD = 180^\circ - 10^\circ + 20^\circ = 150^\circ.$$

* **Mở rộng bài toán:** Có thể thay kết luận bằng yêu cầu: Tính số đo các góc ADC; BAD.

8.5.

a) Ta có $\angle FBA = 40^\circ = \angle BAC \Rightarrow \triangle BFA$ cân tại F $\Rightarrow FA = FB$ (1)

AH là phân giác của $\angle BAC$ nên $\angle BAE = 20^\circ$.

Dựng tam giác đều ABD sao cho D

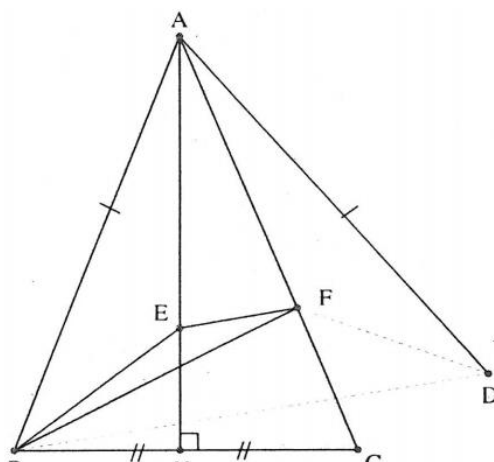
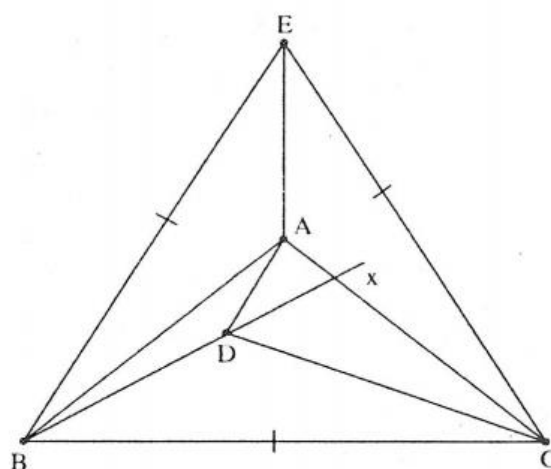
nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC

không chứa điểm B thì $DA = DB$,

$$\angle FAD = 20^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADF = \triangle BDF$

$$(c.c.c) \Rightarrow \angle ADF = \angle BDF = 30^\circ.$$



Từ đó dễ dàng suy ra $\triangle FAD = \triangle EAB$ $g - c - g \Rightarrow AE = AF$.

b) Ta có $DFA = 180^\circ - ADF - DAF = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$

Ta có $DFA = DFB = 130^\circ$; $EFA = 80^\circ$ nên suy ra $EFB = 20^\circ$, $EBF = 10^\circ$

Trong $\triangle BFE$ thì $BEF = 180^\circ - EBF - EFB = 150^\circ$.

8.6.

- **Cách 1.** Vẽ tam giác đều ACF sao cho F nằm trên nửa mặt bờ AB không chứa điểm C

Gọi giao điểm của CF và AB là K

Ta có $BCK = 20^\circ$; $ECK = 40^\circ$;

$$BKC = 180^\circ - (CBK + BCK) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CBK \text{ cân tại } C \Rightarrow CK = BC \quad (1).$$

$$BDC = 180^\circ - (CBD + BCD) = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CBD \text{ cân tại } C \Rightarrow CD = BC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $CD = CK$

$$\Rightarrow \triangle KCD \text{ cân tại } C \text{ và } DCK = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle KCD \text{ là tam giác đều} \Rightarrow CK = DK \quad (3).$$

$$\triangle CKE \text{ có } KCE = KEC = 40^\circ \text{ nên } \triangle CKE \text{ cân tại } K \Rightarrow CK = EK \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $EK = DK \Rightarrow \triangle EKD$ cân tại K và có

$$EKD = 180^\circ - (CKD + BKC) = 40^\circ \text{ nên } KED = 70^\circ \text{ mà } BEC = 40^\circ$$

$$\Rightarrow CED = 30^\circ$$

- **Cách 2.** Vẽ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC). Gọi P là giao

điểm của BF và CE, do $BCE = 60^\circ$ nên $\triangle BPC$ đều $\Rightarrow CP = CB$ (1).

Do $CBD = CDB = 50^\circ$ nên $\triangle BCD$ cân tại C, dẫn đến $CD = CB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DCP$ cân tại C nên

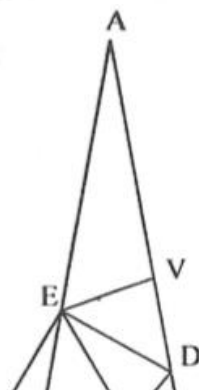
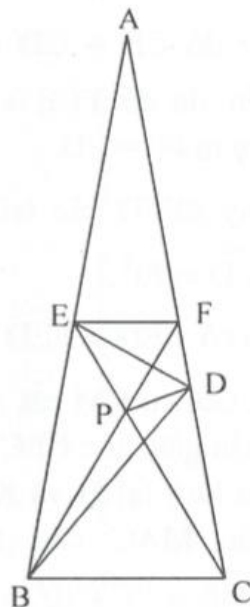
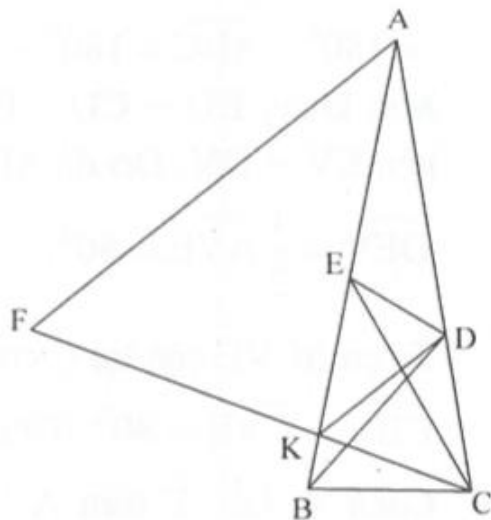
$$CPD = 80^\circ; DPF = 40^\circ. \text{ Mà } DFP = 40^\circ \text{ nên } \triangle DPF \text{ cân } DP = DF.$$

Từ đó $\triangle DPF = \triangle DFE$ (c.c.c)

Suy ra $PED = FED = 30^\circ$. Hay $CED = 30^\circ$

- **Cách 3.** Trên tia CA; CB lấy V và U sao cho $CV = CU = CE$.

Ta có $CE = CU$ và $BCE = 60^\circ$ nên $\triangle CEU$ đều, do đó $EU = EC$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

và $\angle CEU = 60^\circ$. Vì $\angle CEB = 40^\circ$ nên $\angle BEU = 20^\circ$.

Lại có $\triangle ACE$ cân nên $AE = CE$, do đó $AE = EU$.

Có $\triangle AEV = \triangle EUB$ ($AE = EU$), $\angle EAV = \angle UEB$

$= 20^\circ$, $AV = AC - CV = AB - EC = AC - AE = EB$

Nên $EV = BU$ và $\angle AVE = \angle EBU$

$= 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Mặt khác, $BU = CU - BC = CV - CD = DV$

Nên $EV = DV$. Do đó $\triangle EVD$ cân tại V , suy ra

$$\angle DEV = \frac{1}{2} \angle AVE = 50^\circ.$$

Ta có $\triangle CVE$ cân tại C có $\angle ECV = 20^\circ$, suy ra

$\angle CEV = \angle CVE = 80^\circ$. Từ đó $\angle CED = \angle CEV - \angle DEV = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

- **Cách 4.** Lấy F trên AB sao cho $\angle DCF = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle FCB = 20^\circ \Rightarrow \triangle BCF$ cân ($\angle CFB = \angle CBF = 80^\circ$),

Nên $CF = CB$. Ta có $\triangle BCD$ cân ($\angle CBD = \angle CDB = 50^\circ$)

Suy ra $CB = CD$

Từ đó $CF = CD$ mà $\angle DCF = 60^\circ$ nên $\triangle CDF$ đều, do đó

$\angle FCE = 40^\circ = \angle FEC$ nên $FE = FC$, suy ra $FE = FD$.

Vậy $\triangle FED$ cân tại F . Vì $\angle EFD = 40^\circ$, suy ra $\angle FED = 70^\circ$.

Ta có $\angle CED = \angle FED - \angle FEC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

8.7. Giả sử CM cắt AB tại E , tia phân giác góc BEC cắt BM , BC lần lượt tại H và K . Ta có tam giác MAC cân tại M , nên $\angle AME = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

Lại có $\angle CEA = \angle CEK = \angle BEK = 60^\circ$, suy ra $\triangle CEA = \triangle CEK$ (g.c.g)

$\Rightarrow \triangle MEA = \triangle MEK$ (c.g.c)

Suy ra $\angle AME = \angle KME = 40^\circ$. Vì $\angle EBK = 40^\circ$ nên

$\triangle EKB = \triangle EKM$ (g.c.g), suy ra

$\triangle EHB = \triangle EHM$ (c.g.c), do đó $\angle EHM = 90^\circ$.

Xét tam giác HEM có

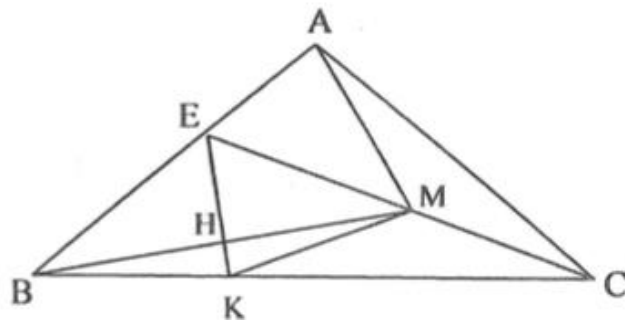
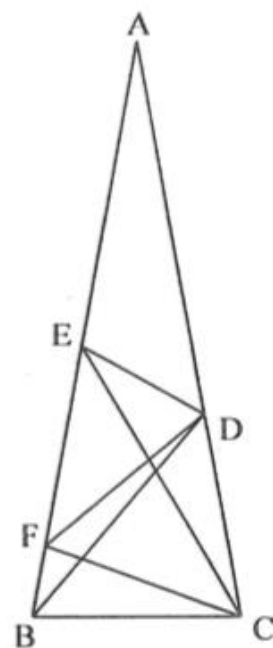
$\angle EHM = 90^\circ$, $\angle HEM = 60^\circ$, nên

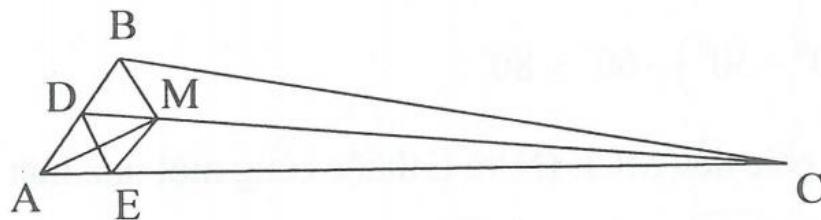
$\angle EMH = 30^\circ$. Do đó

$\angle AMB = \angle BME + \angle EMA = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$.

8.8. Ta có $\angle C = 180^\circ - (55^\circ + 115^\circ) = 10^\circ$

Kẻ $DE \perp AM$ $E \in AC$.





Ta có $DAM = DMA = 30^\circ \Rightarrow \triangle DAM$ cân tại D từ đó suy ra $ADM = 120^\circ$, và DE là đường phân giác của góc ADM nên $EDM = BDM = 60^\circ$. Do đó $\triangle EDC = \triangle BDC$ g.c.g $\Rightarrow BC = EC$.

Xét $\triangle BMC$ và $\triangle EMC$ có $BC = EC$; $MCB = MCE = 5^\circ$, MC chung.

Do đó $\triangle BMC = \triangle EMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BMC = EMC = 180^\circ - DME = 180^\circ - DAE = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

8.9. Vẽ tam giác AEM đều với E và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AM

Ta có $BAE = 80^\circ - 10^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

$\triangle BAE$ và $\triangle CAM$ có $AB = AC$,

$BAE = MAC = 10^\circ$, $AE = AM$

Suy ra $\triangle BAE = \triangle CAM$ (c.g.c)

$ABE = ACM = 10^\circ$. Do đó

$$EAB = EBA = 10^\circ \Rightarrow AEB = 160^\circ$$

$$\Rightarrow BEM = 360^\circ - 60^\circ - 160^\circ = 140^\circ.$$

Xét tam giác BEM có $BE = AE = EM$ nên $EBM = EMB = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$. Do đó

$$AMB = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ.$$

8.10. Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Ta có

$$ABC = ACB = 50^\circ, \text{ suy ra } ABD = 10^\circ.$$

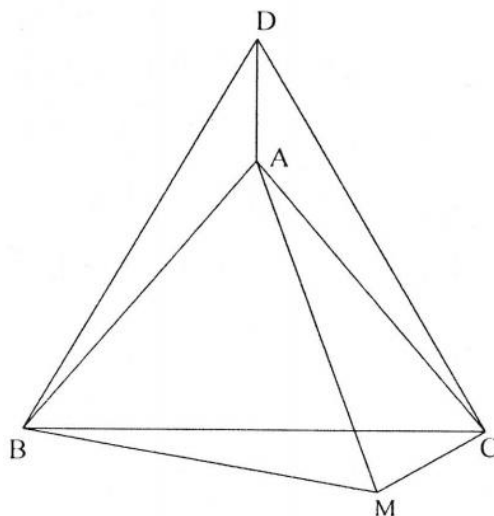
Từ $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow ADB = ADC = 30^\circ$$

Từ đó $\triangle BAD = \triangle BMC$ (g.c.g), suy ra $BA = BM$,
dẫn đến tam giác BAM đều, suy ra

$$AMB = 60^\circ \text{ và}$$

$$AMC = 180^\circ - 10^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 80^\circ.$$



8.11. Vẽ tam giác đều MCE (N và E thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CM).

Ta có $\angle ACE = \angle BCM$ (cùng + $\angle MCA = 60^\circ$)

$\triangle ACE$ và $\triangle BCM$ có $BC = AC$,

$\angle ACE = \angle BCM, MC = EC$

$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle BCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle CAE = \angle CBM = 90^\circ$

$\Rightarrow AE \parallel DM$ (cùng $\perp AC$)

$\Rightarrow \angle EAN = \angle MDN$ (so le trong).

Ta có $\angle MBD = \angle MDB = 30^\circ \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại $M \Rightarrow MB = MD$

Mà $MB = AE$ (vì $\triangle ACE = \triangle BCM$) $\Rightarrow MD = AE$.

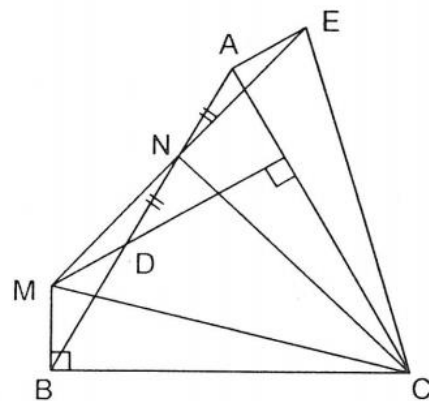
$\triangle AEN$ và $\triangle DMN$ có $MD = AE, \angle MDN = \angle EAN = 150^\circ$

$\Rightarrow \triangle AEN = \triangle DMN$ c.g.c $\Rightarrow MN = NE$

$\triangle MCN$ và $\triangle ECN$ có $MC = EC, MN = EN, CN$ là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle MCN = \triangle ECN$ c.c.c $\Rightarrow \angle MCN = \angle NCE$

Mà $\angle MCN + \angle NCE = \angle MCE = 60^\circ \Rightarrow \angle MCN = \frac{1}{2} \angle MCE = 30^\circ$.



PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG VÀ CHUYÊN TOÁN 7

Dạng 1: Tam giác cân

Bài 1: Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE
- Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$
- Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A ($B = C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$

- Chứng minh $BD + AD = BC$
- Tính $\angle AMC$

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH

- Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$
- Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi
- Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Bài 4: Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$

- Chứng minh rằng: $BM = CN$
- Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN
- Đường trung trực của MN và tia phân giác của $\angle BAC$ cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $KC \perp AC$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- $BH = AI$
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- Đường thẳng DN vuông góc với AC .
- IM là phân giác của $\angle HIC$

Bài 6: Cho tam giác ABC . Kẻ đường cao BD vuông góc với AC ($D \in AC$)

Chứng minh rằng: nếu $3BD^2 + 2AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$ thì $\triangle ABC$ cân

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- a) Tia AD là phân giác của BAC
- b) $AM = BC$

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- a) $BH = AI$
- b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- c) Đường thẳng DN vuông góc với AC
- d) IM là phân giác của HIC

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- a) Tia AD là phân giác của ABC
- b) $AM = BC$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông ở A có góc C bằng 30° . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho góc BCM bằng $\frac{2}{3}$ góc ACB , trên cạnh AC lấy điểm N sao cho góc CBN bằng $\frac{2}{3}$ góc ABC . Gọi giao điểm của CM và BN là K

1/ Tính góc CKN

2/ Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều

3/ Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông ở A , có $C = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh:

- a) Tam giác ABD là tam giác đều
- b) $AH = CE$
- c) EH song song với AC .

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trung tuyến AM . E là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ BH, CH vuông góc với AE (H, K thuộc AE)

- a) Chứng minh $BH = AK$
- b) Cho biết MHK là tam giác gì? Vì sao?

Bài 13: Cho tam giác ABC cân đỉnh A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- Tia AD là phân giác của BAC
- $AM = BC$.

Bài 15: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

- Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$
- Tính độ dài đoạn thẳng AM khi $AB = 5\text{cm}, BC = 6\text{cm}$.
- Chứng minh : $MAN > BAM = CAN$

Bài 16:

- Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ, C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính ADB

- Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của HAB cắt cạnh BC ở điểm E . Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

- Tam giác ANH cân
- $BC + AH > AB + AC$

$$2AC^2 - BC^2 = CH^2 - BH^2$$

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- $BH = AI$
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- Đường thẳng DN vuông góc với AC .
- IM là phân giác của HIC

Bài 19: Cho góc $xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay, CM \perp Ay, BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

a) K là trung điểm của AC

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) ΔKMC đều

Bài 20: Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$

a) Chứng minh ΔADE cân

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE

c) Từ B và C kẻ $BH \perp AD$; $CK \perp AE$. Chứng minh : $BH = CK$

d) Chứng minh AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm

Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$

b) Chứng minh: $MAN > BAM$

Kẻ đường cao BK . Biết $AK = 7cm$, $AB = 9cm$. Tính độ dài BC

Bài 22:

Cho tam giác ABC cân tại A (góc A tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$

a) Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta ICE$ và $AB + AC < AD + AE$

b) Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N . Chứng minh MN đi qua trung điểm DE .

c) Chứng minh chu vi của tam giác ABC nhỏ hơn chu vi của tam giác AMN .

Bài 23:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC

a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$.

b) Chứng minh rằng: góc $DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Bài 24:

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D trên tia đối tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Gọi I là giao điểm của MN và BE .

- Biết $AB < BC$ Chứng minh: $\hat{A} > 60^\circ$.
- Chứng minh $IM = IN$
- Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua 1 điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC

Bài 25:

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Tia phân giác của BAC cắt đường trung trực của CE tại F .

- Chứng minh tam giác cân
- Biết góc $ACB = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều

Bài 26:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $A = 100^\circ$, tia phân giác của góc ABC cắt AC tại D . Chứng minh :
 $AD + BD = BC$

Bài 27:

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE
- Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$
- Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Bài 28:

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N .

- Chứng minh rằng: $DM = EN$.
- MN cắt BC tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .
- Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC

Bài 29:

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE .

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

Bài 30: Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D . Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Bài 31: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

c) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$

d) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM$

e) Kẻ đường cao BK . Biết $AK = 7cm$, $AB = 9cm$. Tính độ dài BC

Bài 32: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của A và C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI

a) Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

b) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng

Bài 33: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

1. Chứng minh $DM = EN$.

2. Chứng minh $IM = IN$, $BC < MN$.

3. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Câu 34. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I

1) Chứng minh: $DM = EN$

2) Chứng minh: $IM = IN$, $BC < MN$

3) Gọi O là giao của đường phân giác A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng $\Delta BMO = \Delta CNO$.

Câu 35. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BE tại E cắt AC tại N

- 1) Chứng minh $\Delta MBD = \Delta NCE$
- 2) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN
- 3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Câu 36. Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

- a) Chứng minh $\Delta DBM = \Delta FMB$
- b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi
- c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK

câu 37. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD

- a) Tam giác BDC là tam giác gì ? Vì sao ? So sánh DM và CN
- b) Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với CN cắt tia BA tại K

Chứng minh : $\Delta BMK = \Delta CMD$

- c) Biết $AB = a$, tính chu vi tam giác DMK

câu 38. Tam giác ABC cân tại C và $C = 100^\circ$; BD là phân giác của B . Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . BK là phân giác CBD , BK cắt Ax tại N

- a) Tính số đo ACM
- b) So sánh MN và CE .

Câu 39. Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- $DM = EN$
- Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN
- Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

câu 40. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- $BH = AI$
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- Đường thẳng DN vuông góc với AC
- IM là phân giác của HIC

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$, $AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d . Kẻ BH và CK vuông góc với d . Chứng minh rằng:

- $AH = CK$
- $HK = BH + CK$

câu 42. Cho tam giác ABC ($AB = AC$; A tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

Câu 1. Chứng minh

- $\triangle ABD = \triangle ICE$
- $AB + AC < AD + AE$

Câu 2. Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $BM = CN$.

Câu 3. Chứng minh rằng chu vi tam giác ABC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN

Câu 43. Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn

- Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$

2) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc

BDA cắt BC tại N . Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$

Bài 44: Cho ΔABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN .

- Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$;
- Chứng minh: $BN \perp CM$;
- Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Bài 45: Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I

- Chứng minh I là trung điểm của AN
- Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc ACB cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$

Bài 46: Cho ΔABC có $B = 2C < 90^\circ$ Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua.

Bài 47. Cho tam giác ABC vuông tại A , K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$

- Chứng minh $CD \parallel AB$
- Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M ; DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng $\Delta ABH = \Delta CDH$

Chứng minh : ΔHMN cân .

Bài 48. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BA và CA lấy hai điểm D và E , sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh $DE \parallel BC$
- Từ D kẻ DM vuông góc với BC , từ E kẻ EN vuông góc với BC . Chứng minh $DM = EN$.
- Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân
- Từ B và C kẻ các đường vuông góc với AM và AN chúng cắt nhau tại I . Chứng minh AI là tia phân giác chung của 2 góc BAC, MAN .

Bài 49. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

Bài 50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC (D khác B và C). Vẽ hai tia Bx, Cy vuông góc với BC và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa BC và điểm A . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AD cắt Bx tại M và cắt Cy tại N . Chứng minh:

- $\triangle AMB = \triangle ANC$.
- A là trung điểm của MN .

Bài 51. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle MBC = 10^\circ; \angle MCB = 20^\circ$. Tính $\angle AMB$.

Bài 52.

- Cho tam giác ABC cân tại $A, B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\angle KBC = 10^\circ, \angle KCB = 30^\circ$.
 - Chứng minh $BA = BK$
 - Tính số đo $\angle BAK$
- Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:
 - K là trung điểm của AC
 - $\triangle KMC$ là tam giác đều
 - Cho $BK = 2\text{cm}$. Tính các cạnh $\triangle AKM$.

Bài 53. Cho tam giác ABC cân tại A , có $A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của C sao cho $\angle CBO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh rằng:

- Ba điểm C, A, M thẳng hàng
- Tam giác AOB cân.

Bài 54. Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$. Chứng minh rằng $\angle BAD < \frac{1}{2} \angle CAD$.

Bài 55: Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc A bằng 60° . Phân giác ABC cắt AC tại D , phân giác ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I .

- Tính số đo góc BIC .
- Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIE$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.

Bài 56: Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN. Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.

Bài 57: Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D.

a. Chứng minh $BEH = ACB$

b. Chứng minh $DH = DC = DA$.

c. Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân.

d. Chứng minh $AE = HC$.

Bài 58: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M. Chứng minh :

a) K là trung điểm của AC.

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2\text{cm}$. Tính các cạnh $\triangle AKM$

Bài 59: Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$.

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$

b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

c) Đường trung trực của MN và tia phân giác của góc BAC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng: $KC \perp AC$

Bài 60: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $BE = CD$

b) $\triangle BDE$ là tam giác cân

c) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$

Bài 61: Cho tam giác ABC vuông ở A, có phân giác BD, CE cắt nhau ở I. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của D, E trên BC

a) Chứng minh tam giác ABM cân.

b) Chứng minh $MN = AB + AC - BC$

c) Tính góc MAN. Gọi G, K lần lượt là giao điểm của BD và AN; CE và AM. Tia AI cắt GK ở H. Tính góc AHG

Bài 62: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N. MN cắt BC tại I.

- 1) Chứng minh rằng: $DM = EN$.
- 2) Chứng minh rằng $IM = IN$; $BC < MN$.
- 3) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I.

Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Bài 63: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho

$$DAE = ABD \text{ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng } DAE = ECB.$$

Bài 64: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $BAM = ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân

Bài 65: Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E.

Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Bài 66: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C. Kẻ $BH \perp Ay$ tại H, $CM \perp Ay$ tại M, $BK \perp AC$ tại K. Chứng minh:

- a) $KC = KA$
- b) $BH = \frac{AC}{2}$
- c) $\triangle KMC$ đều.

Bài 67: Cho tam giác ABC ($AB < AC$, góc $B = 60^\circ$). Hai phân giác AD và CE của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I, từ trung điểm M của BC kẻ đường vuông góc với đường phân giác AI tại H, cắt AB ở P, cắt AC ở K.

Bài 68: Cho tam giác ABC ($AB < AC$, $B = 60^\circ$). Hai tia phân giác AD ($D \in BC$) và CE ($E \in AB$) của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I. Chứng minh $\triangle IDE$ cân.

Bài 69: Cho tam giác ABC có ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N, cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng :

a/ $BE = CF$

b/ $AE = \frac{AB + AC}{2}$

Bài 70: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

- a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC \cong \triangle ABE$.
- b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$.
- c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
- d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE

Bài 72: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC , D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH , CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I . Chứng minh rằng:

a) $BAM = ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

Bài 73: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

1. Chứng minh $DM = EN$.

2. Chứng minh $IM = IN$, $BC < MN$.

3. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I .

Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định

Bài 74: Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

1) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm của BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$.

2) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc BDA cắt BC tại N . Chứng minh rằng: $BD = \frac{1}{2}MN$.

Bài 75: Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH, DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC , ($H, I, K \in BC$).

a) Chứng minh: $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$

b) Tính độ dài AH biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, và 3 điểm D, A, E thẳng hàng.

Bài 76: Cho tam giác ABC vuông tại A ; K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$

a) Chứng minh $CD \parallel AB$

b) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M ; DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng: $\triangle ABH = \triangle CDH$

c) Chứng minh $\triangle HMN$ cân.

Bài 77: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh:

c) Tia AD là phân giác của $\angle BAC$

d) $AM = BC$.

Bài 78: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

- Chứng minh : $AM = AN$ và $AH \perp BC$
- Tính độ dài đoạn thẳng AM khi $AB = 5cm, BC = 6cm$
- Chứng minh $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

Bài 79: Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn

- Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$
- Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc BDA cắt BC tại N . Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$

Bài 81. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BA và CA lấy hai điểm D và E , sao cho $BD = CE$.

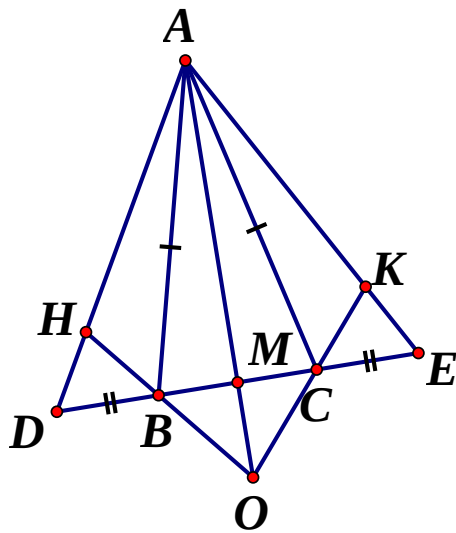
- Chứng minh $DE \parallel BC$
- Từ D kẻ DM vuông góc với BC , từ E kẻ EN vuông góc với BC . Chứng minh $DM = EN$.
- Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân
- Từ B và C kẻ các đường vuông góc với AM và AN chúng cắt nhau tại I . Chứng minh AI là tia phân giác chung của 2 góc BAC, MAN

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE
- Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$
- Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Lời giải:



a) $\triangle ABC$ cân nên $AB = AC \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $AB = AC(gt)$; $\angle ABD = \angle ACE(cmt)$; $DB = CE(gt)$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$MD = ME(DB = CE; MB = MC)$; AM chung; $AD = AE(cmt)$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME(c.c.c) \Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$

Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$

c) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có: $\angle BDH = \angle CEK(do \dots \angle ADE = \angle AED)$; $DB = CE(gt)$
 $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

d) Gọi giao điểm của BH và CK là O

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có: OA cạnh chung;

$AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \triangle BHD = \triangle CKE))$

$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO(ch - cv)$

Do đó $\angle OAH = \angle OAK$ nên AO là tia phân giác của $\angle KAH$ hay AO là tia phân giác của $\angle DAE$,

Mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\angle DAE$

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O.

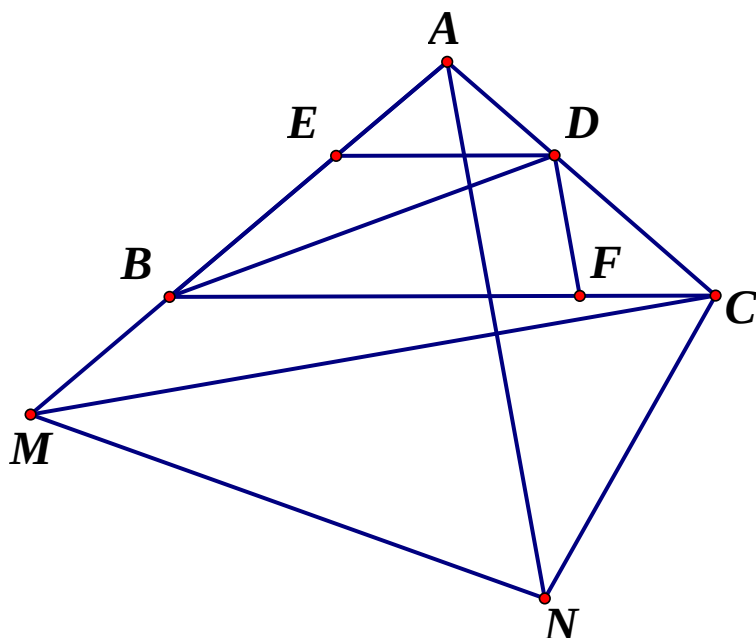
Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A ($B = C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB

lấy điểm M sao cho $AM = BC$

a) Chứng minh $BD + AD = BC$

b) Tính $\angle AMC$

Lời giải:



- a) Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $DBF = 20^\circ$ nên $BFD = 80^\circ \Rightarrow DFC = 100^\circ$

$\Rightarrow DFC = EAD = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $FDC = 40^\circ$

Chứng minh được: $\triangle ADE = \triangle FCD (g.c.g) \Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

- b) Dựng tam giác đều AMN sao cho N và C ở cùng một phía so với AB

Vì AC chung; $BC = AN (= AM)$; $ACB = CAN = 40^\circ$

$\Rightarrow \triangle BAC = \triangle NCA \Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy MC là trung trực của AN nên $AMC = \frac{1}{2} AMN = 30^\circ$

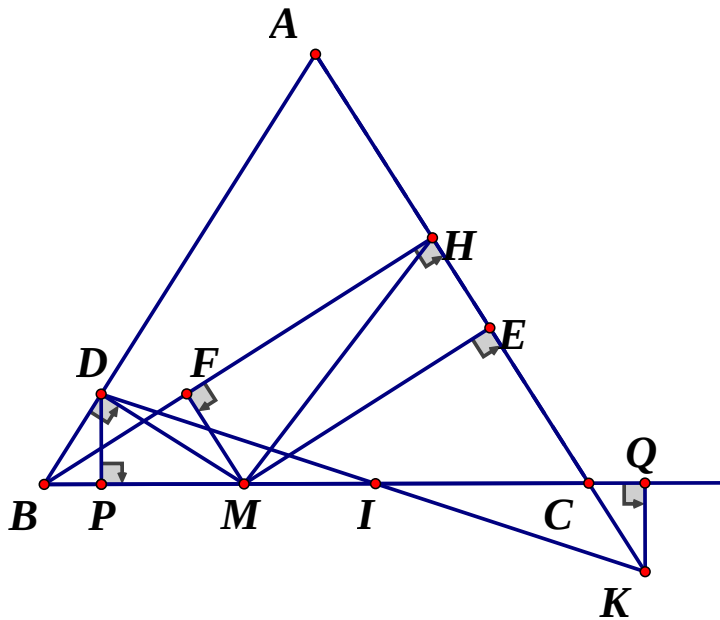
Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH

- a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$

- b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi

- c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải:



- a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB(ch - gn)$
- b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB(ch - gn) \Rightarrow MD = BF(1)$

Chứng minh $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

- c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

+Chứng minh : $BD = FM = EH = CK$

Chứng minh $\triangle BDP = \triangle CKQ(ch - gn) \Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

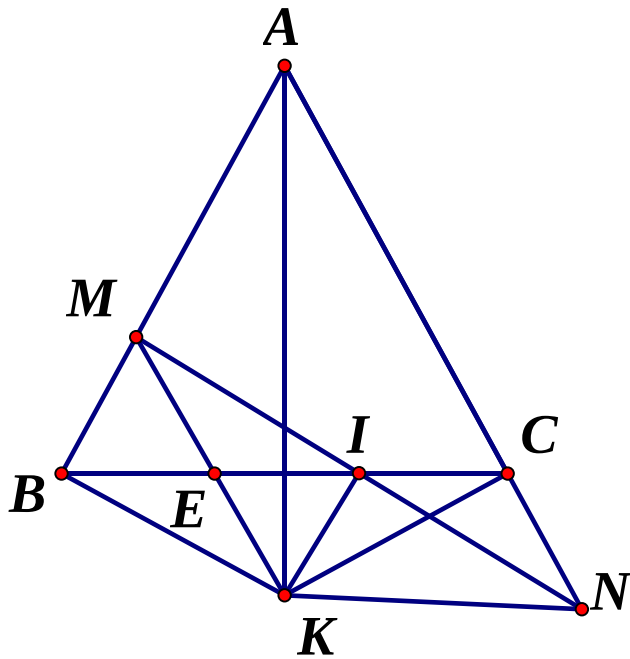
Chứng minh $IDP = IKQ \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI(c.g.c) \Rightarrow ID = IK(dfcm)$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$

- a) Chứng minh rằng: $BM = CN$
- b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN

Đường trung trực của MN và tia phân giác của BAC cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $KC \perp AC$

Lời giải:



a) Theo giả thiết, ta có:

$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

$$AM + AN = AM + AC + CN, \Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow AB = AC$$

$$\text{Do đó, từ } AM + AN = 2AB \Rightarrow BM = CN$$

b) Qua M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$$\Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow \Delta BME \text{ cân ở } M \Rightarrow EM = BM = CN$$

$$\Rightarrow \Delta MEI = \Delta NCI (g.c.g) \Rightarrow IM = IN$$

Vậy BC đi qua trung điểm của MN

c) K thuộc đường trung trực của $MN \Rightarrow KM = KN$ (1)

$$\Delta ABK = \Delta ACK (c.g.c) \Rightarrow KB = KC$$
 (2); $ABK = ACK$ (*)

Kết quả chứng minh câu a: $BM = CN$ (3)

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK (c - c - c) \Rightarrow ABK = NCK$$
 (**)

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow ACK = NCK = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

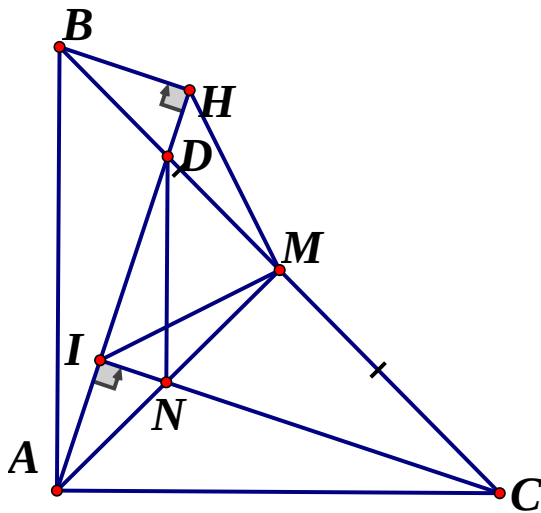
a) $BH = AI$

b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi

c) Đường thẳng DN vuông góc với AC .

d) IM là phân giác của HIC

Lời giải:



- a) $\triangle AIC = \triangle BHA \Rightarrow BH = AI$
 b) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$
 c) AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$
 d) $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = MI$ và $BHM = IMA$

Mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ$

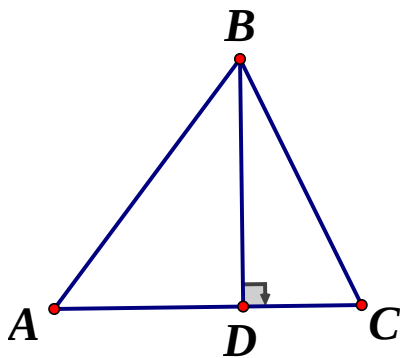
$\Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân $\Rightarrow HIM = 45^\circ$

Mà: $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác HIC

Bài 6: Cho tam giác ABC . Kẻ đường cao BD vuông góc với AC ($D \in AC$)

Chứng minh rằng: nếu $3BD^2 + 2AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$ thì $\triangle ABC$ cân

Lời giải



Giả sử $\triangle ABC$ thỏa mãn: $3BD^2 + 2AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$ (1)

Trong tam giác vuông DAB có $AD^2 + BD^2 = AB^2$

Trong tam giác vuông DBC có $BD^2 + CD^2 = BC^2$

Suy ra $3BD^2 + 2AD^2 + CD^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + BD^2 + CD^2 = 2AB^2 + BC^2$ (2)

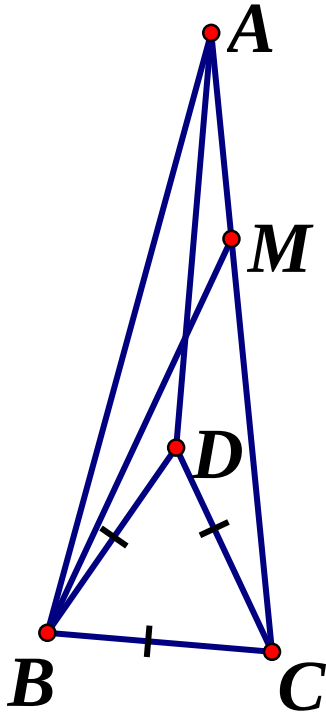
Từ (1) và (2) ta có: $2AB^2 + BC^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 \Rightarrow AB^2 = CA^2 \Rightarrow AB = CA$

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- Tia AD là phân giác của BAC
- $AM = BC$

Lời giải



- Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c) $\Rightarrow DAB = DAC$, do đó $DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$
- $\triangle ABC$ cân tại A , mà $A = 20^\circ$ (gt) nên $ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $DBC = 60^\circ$, tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$. Tia BM là phân giác của ABD nên $ABM = 10^\circ$

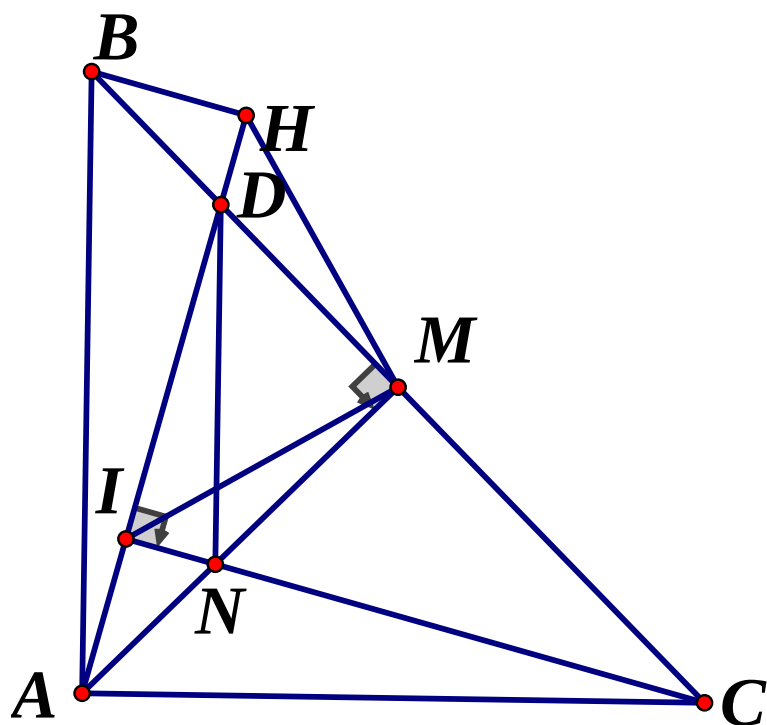
Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có: AB cạnh chung, $BAM = ABD = 20^\circ$; $ABM = DAB = 10^\circ$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = BD$, mà $BD = BC$ (gt) $\Rightarrow AM = BC$

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- $BH = AI$
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- Đường thẳng DN vuông góc với AC
- IM là phân giác của HIC

Lời giải



- a) $\triangle AIC = \triangle BHA \Rightarrow BH = AI$
 b) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$
 c) AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$
 d) $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow \begin{cases} HI = MI \\ BMH = IMA \end{cases}$

Mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ$

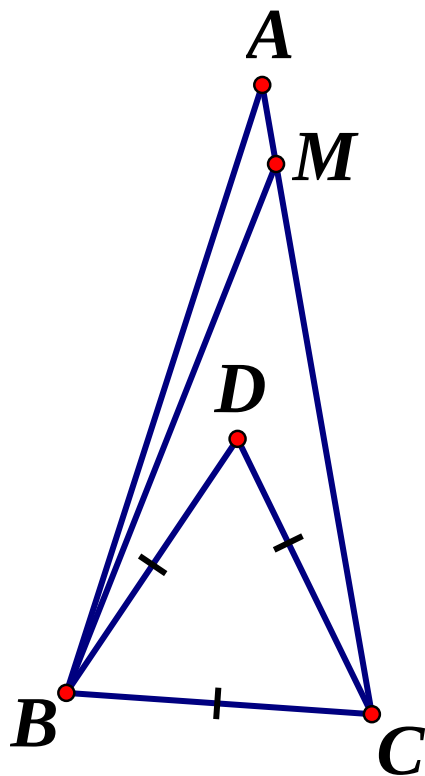
$\Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân $\Rightarrow HIM = 45^\circ$

Mà $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác HIC

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- a) Tia AD là phân giác của ABC
 b) $AM = BC$

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle DAB = \angle DAC$, do đó $\angle DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, mà $A = 20^\circ$ (gt) nên $\angle ABC = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $\angle DBC = 60^\circ$

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\angle ADB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Tia BM là phân giác của $\angle ABD$ nên $\angle ABM = 10^\circ$

Xét tam giác ABM và BAD có:

AB cạnh chung; $\angle BAM = \angle ABD = 20^\circ$; $\angle ABM = \angle DAB = 10^\circ$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = BD$ mà $BD = BC$ (gt) $\Rightarrow AM = BC$

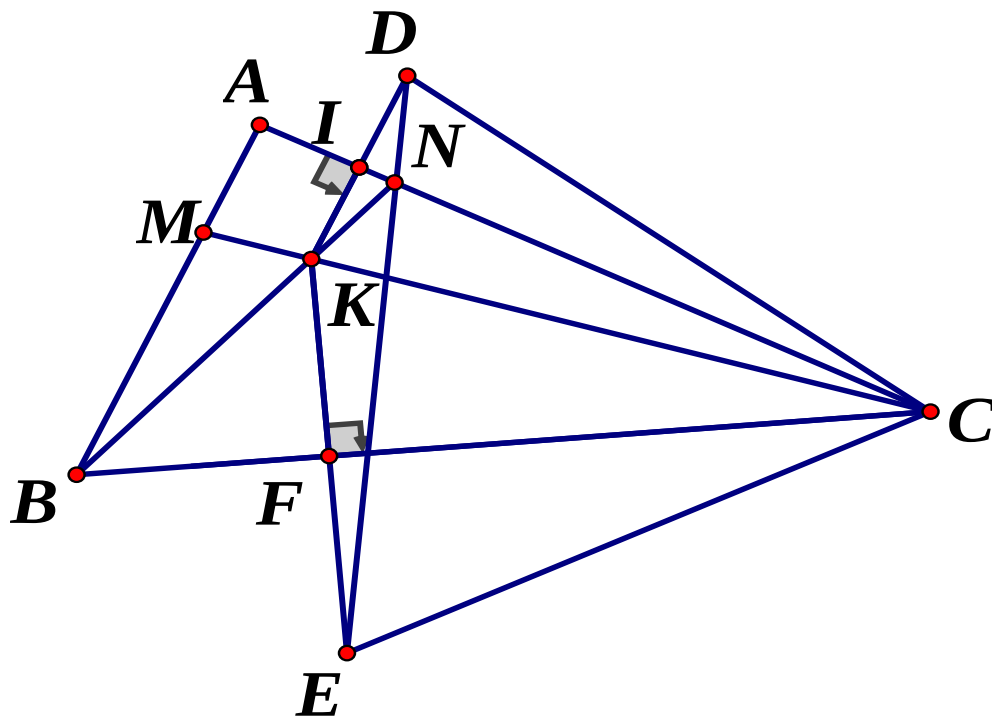
Bài 10: Cho tam giác ABC vuông ở A có góc C bằng 30° . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho góc BCM bằng $\frac{2}{3}$ góc ACB, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho góc CBN bằng $\frac{2}{3}$ góc ABC. Gọi giao điểm của CM và BN là K

1/ Tính góc CKN

2/ Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC. Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều

3/ Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng

Lời giải



1) Có $B = 60^\circ$ (do $A = 90^\circ; C = 30^\circ$)

$$CBN = \frac{2}{3} ABC = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$$

$$BCM = \frac{2}{3} ACB = \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$$

$$BKC = 180^\circ - (CBN + BCM) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow CKN = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

2) $\triangle KIC = \triangle DIC$ (cgc) $\Rightarrow CK = CD$ và $DCI = KCI$ (1)

$$\triangle KFC = \triangle EFC$$
 (cgc) $\Rightarrow CK = CE$ và $KCF = ECF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \triangle DCE$ cân

Có: $DCE = 2 \cdot ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCE$ đều

3) Xét tam giác vuông ANB có $ANB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ \Rightarrow BNC = 110^\circ$

$$\triangle CND = \triangle CNK$$
 (c.c.c) $\Rightarrow DNC = KNC = 110^\circ \Rightarrow CDN = 60^\circ$ ($NCD = 10^\circ; DNC = 110^\circ$)

Có $\triangle CDE$ đều (cmt) $\Rightarrow CDE = 60^\circ$

Do đó $CDN = CDE = 60^\circ$

Suy ra: Tia DN trùng với tia DE hay 3 điểm D, N, E thẳng hàng

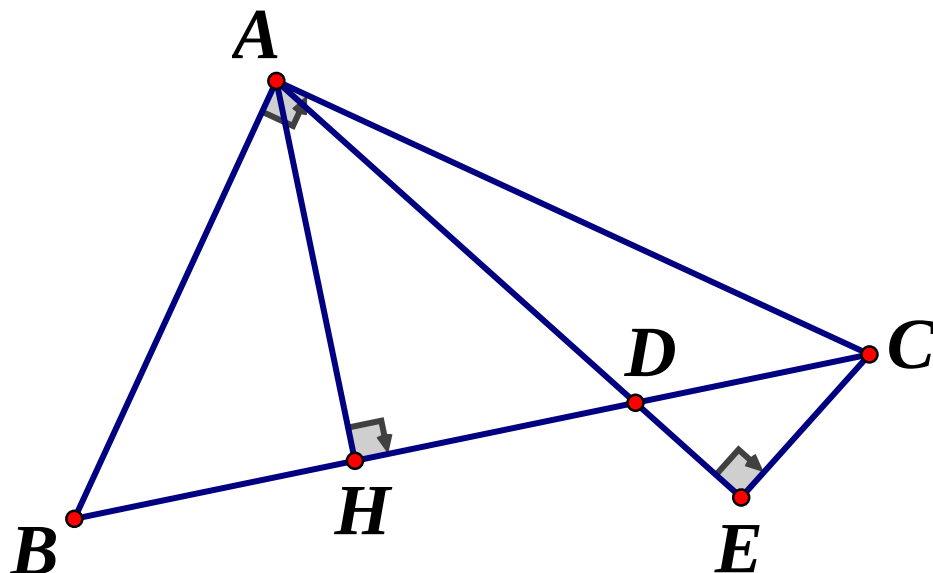
Bài 11: Cho tam giác ABC vuông ở A , có $C = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác đều

b) $AH = CE$

c) EH song song với AC .

Lời giải



- a) Tam giác ABD có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác ABD cân ở A

Lại có: $B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều

- b) $EAC = BAC - BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = ACH$ 1

$$\triangle AHC = \triangle CEA (ch - gn) \Rightarrow AH = CE$$

- c) $\triangle AHC = \triangle CEA (cmt) \Rightarrow HC = EA$

$$\triangle ADC \text{ cân ở } D \text{ vì có } \angle ADC = \angle DCA (= 30^\circ) \Rightarrow DA = DC \Rightarrow DE = DH \Rightarrow \triangle DEH \text{ cân ở } D$$

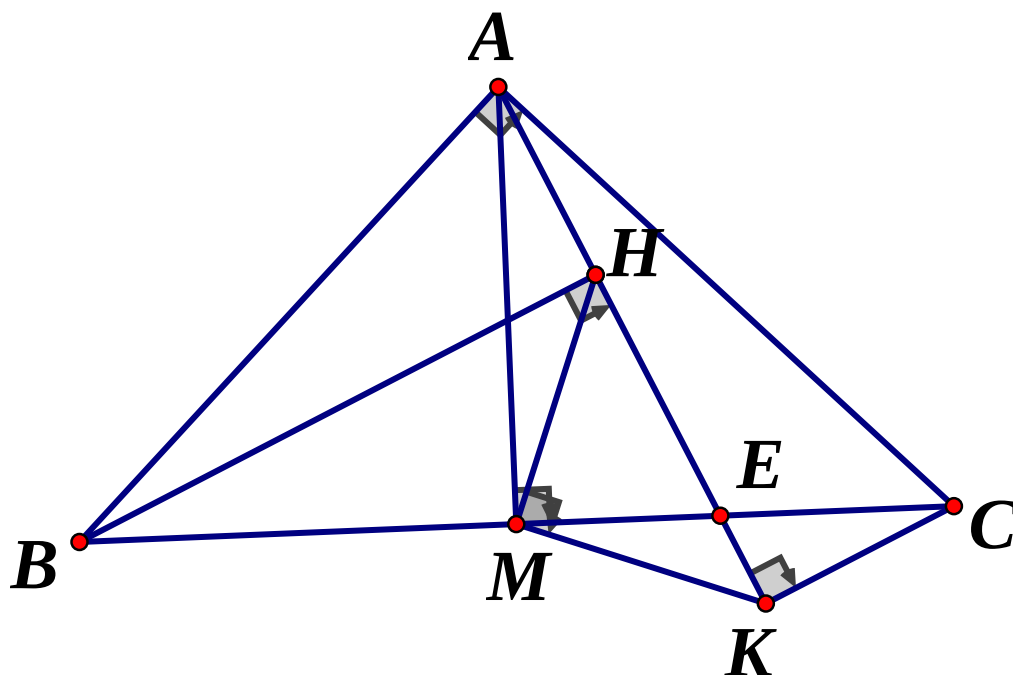
Hai tam giác cân ADC và DEH có:

$$\angle ADC = \angle EDH \text{ (hai góc đối đỉnh), do đó: } \angle ACD = \angle DHE, \text{ mà hai góc ở vị trí so le trong} \\ \Rightarrow EH \parallel AC.$$

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trung tuyến AM . E là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ BH, CH vuông góc với AE (H, K thuộc AE)

- a) Chứng minh $BH = AK$
- b) Cho biết MHK là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ có:

$\angle AHB = \angle CKA = 90^\circ$; $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A), $\angle ABH = \angle CAE$ (cùng phụ với $\angle BAH$)
 $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAK$ (ch - gn) $\Rightarrow BH = AK$

b) Ta có: $MA = MB = MC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AM$ vừa là trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \triangle AMB$ và $\triangle AMC$ vuông cân tại M $\Rightarrow \angle BAM = \angle ACM = 45^\circ$

Ta có: $\triangle ABH = \triangle CAK$ (câu...a) $\Rightarrow \angle BAH = \angle ACK$ (hai góc tương ứng)

Mà:

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAH = \angle BAM + \angle MAH \\ \angle ACK = \angle ACM + \angle MCK \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle BAH = 45^\circ + \angle MAH \\ \angle ACK = 45^\circ + \angle MCK \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MAH = \angle MCK$$

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle CMK$ có: $\angle AMH = \angle CMK$ (cùng phụ với $\angle HMC$)

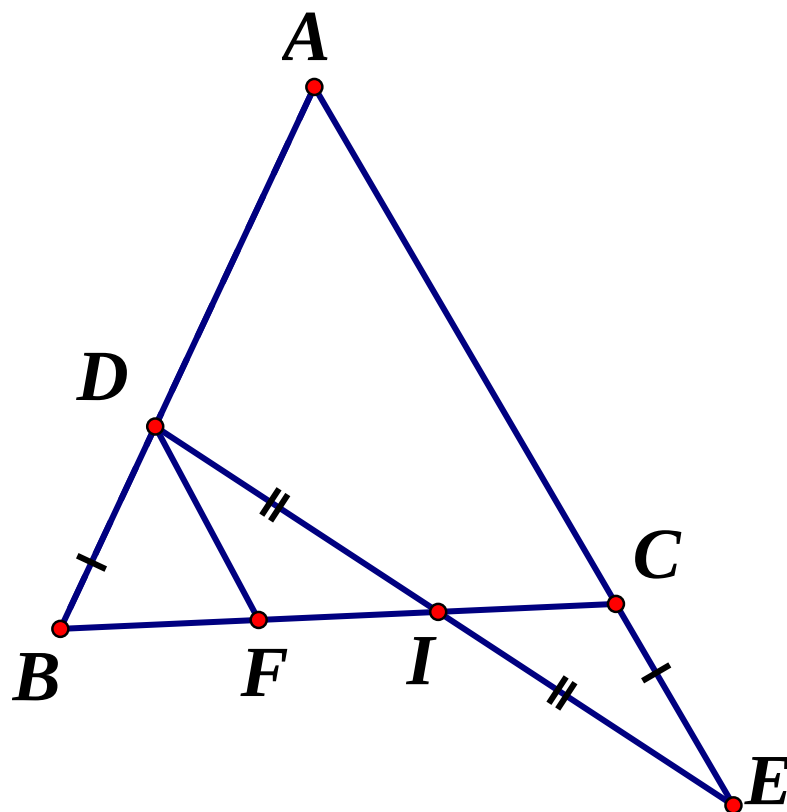
$MA = MC$ (cmt); $\angle MAH = \angle MCK$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M

$$\left. \begin{array}{l} \angle AMH + \angle HMC = 90^\circ \\ \angle AMH = \angle CMK \end{array} \right\} \Rightarrow \angle CMK + \angle HMC = \angle HMK = 90^\circ \Rightarrow \triangle HMK \text{ vuông cân tại } M.$$

Bài 13: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng

Lời giải



Kẻ $DF \parallel AC$ ($F \in AC$)

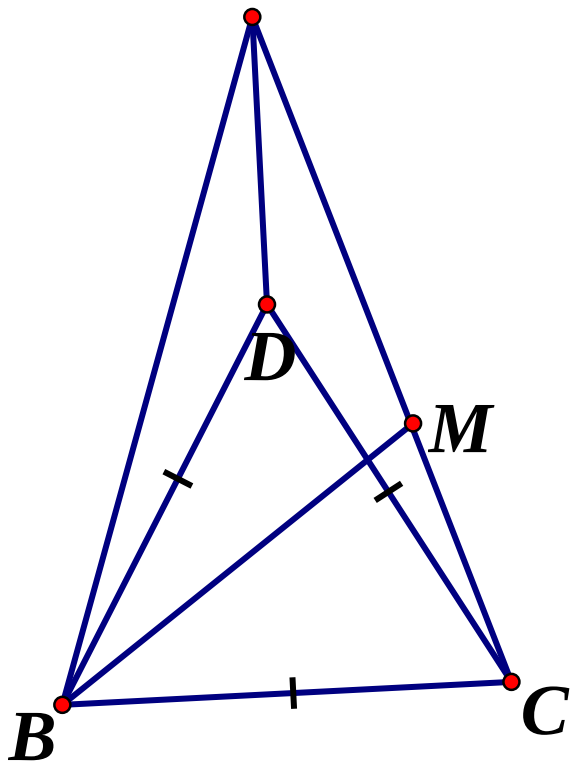
$$\Rightarrow DF = BD = CE \Rightarrow \triangle IDF = \triangle IFC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow DIF = EIC \Rightarrow F, I, C \text{ thẳng hàng} \Rightarrow B, I, C \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

- Tia AD là phân giác của BAC
- $AM = BC$.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC (c.c.c) \Rightarrow DAB = DAC$, do đó $DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, mà $A = 20^\circ (gt) \Rightarrow ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $DBC = 60^\circ$, tia BD nằm giữa hai tia $BA, BC \Rightarrow ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Tia BM là phân giác của $ABD \Rightarrow ABM = 10^\circ$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có AB cạnh chung; $BAM = ABD = 20^\circ$; $ABM = DAB = 10^\circ$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD (g.c.g) \Rightarrow AM = BD$, mà $BD = BC (gt) \Rightarrow AM = BC$.

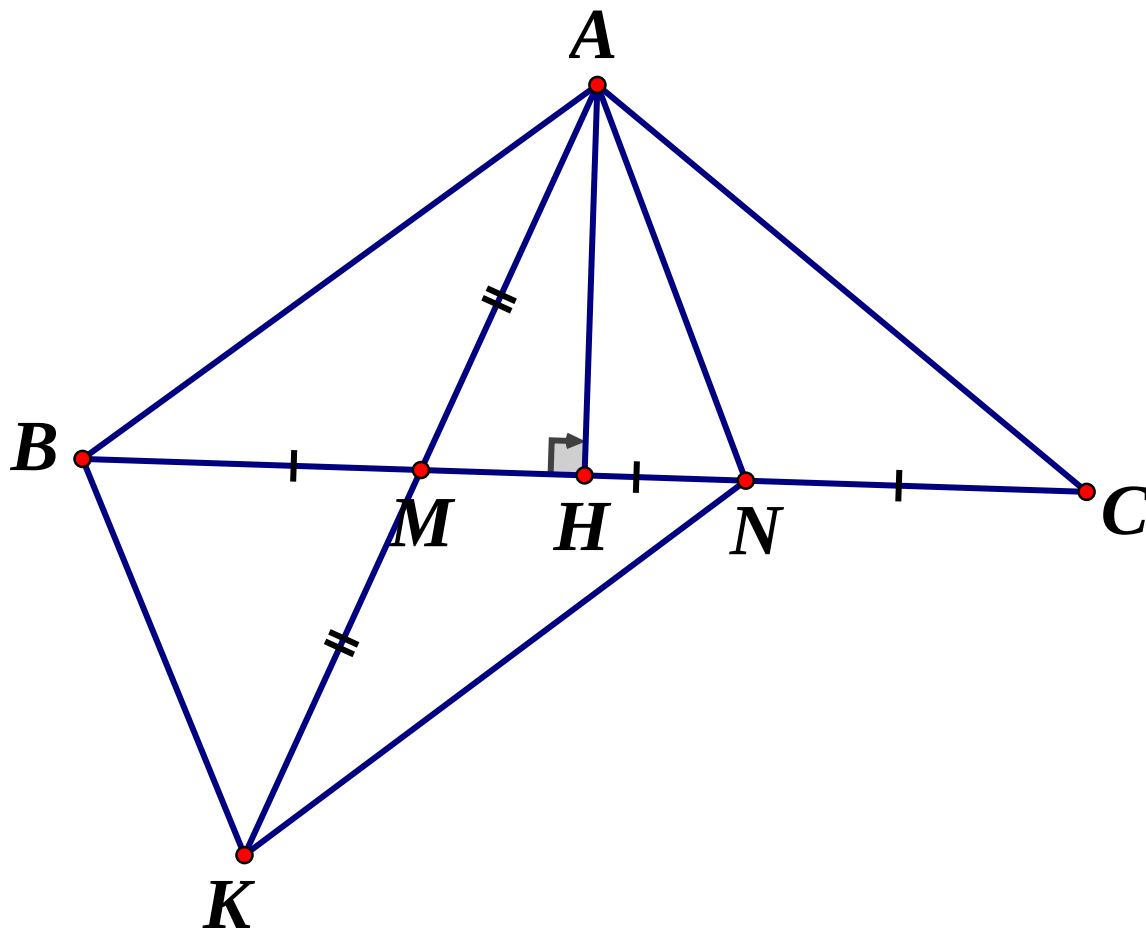
Bài 15: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$

b) Tính độ dài đoạn thẳng AM khi $AB = 5cm, BC = 6cm$.

c) Chứng minh : $MAN > BAM = CAN$

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN (c.g.c) \Rightarrow AM = AN$

Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH (c.g.c) \Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

b) Tính $AH : AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4cm$

Tính $AM : AM^2 = AH^2 + MH^2 = 4^2 + 1 = 17 \Rightarrow AM = \sqrt{17}cm$

c) Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = MK, \Rightarrow \triangle AMN = \triangle KMB (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle MAN = \angle BKM$ và $AN = AM = BK$. Do $BA > AM \Rightarrow BA > AK$

$\Rightarrow \angle BKA > \angle BAK \Rightarrow \angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

Bài 16:

c) Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ, C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho

$CD = 2CB$. Tính $\angle ADB$

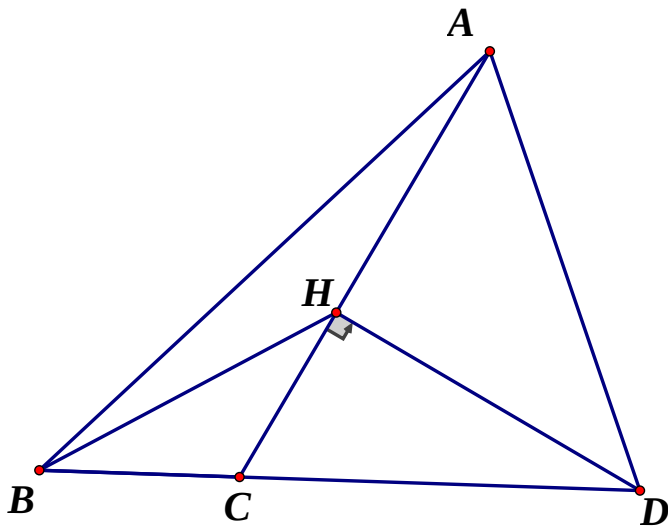
d) Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt

cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở điểm E . Chứng minh rằng

$AB + AC = BC + DE$

Lời giải

a)



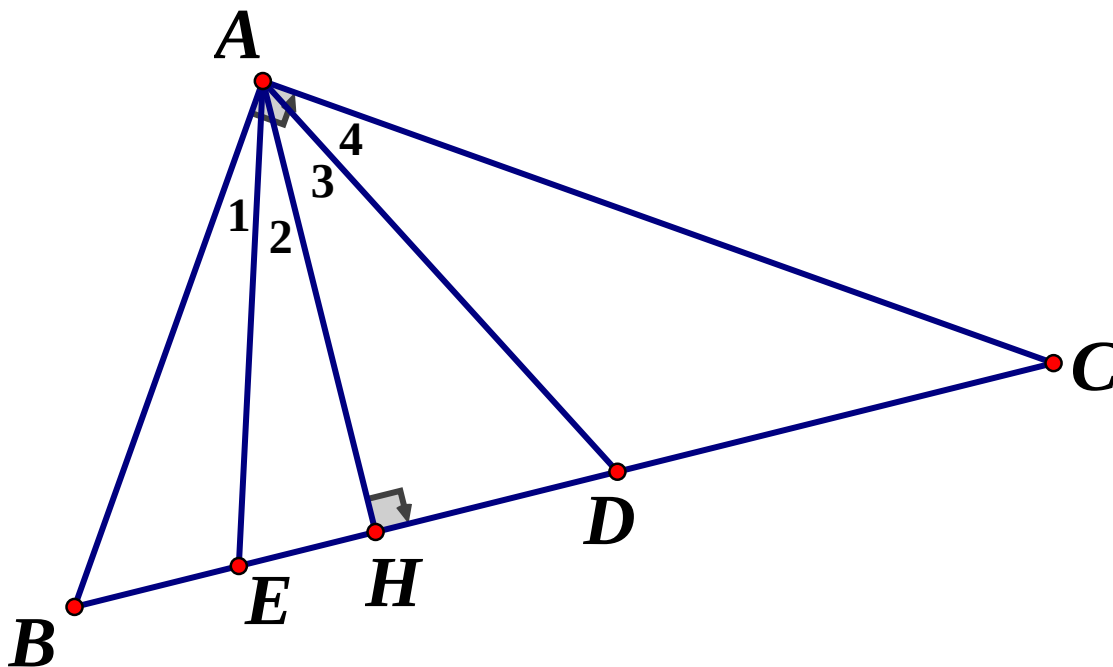
Kẻ $DH \perp AC$ vì $ACD = 60^\circ \Rightarrow CDH = 30^\circ$ nên $CH = \frac{CD}{2} \Rightarrow CH = BC$

Tam giác BCH cân tại $C \Rightarrow CBH = 30^\circ \Rightarrow ABH = 15^\circ$

Mà $BAH = 15^\circ$ nên tam giác AHB cân tại H

Do đó $\triangle AHD$ vuông cân tại H . Vậy $ADB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

b)



$$AEC = ABC + A_1 = A_3 + A_4 + A_1 = A_3 + A_4 + A_2$$

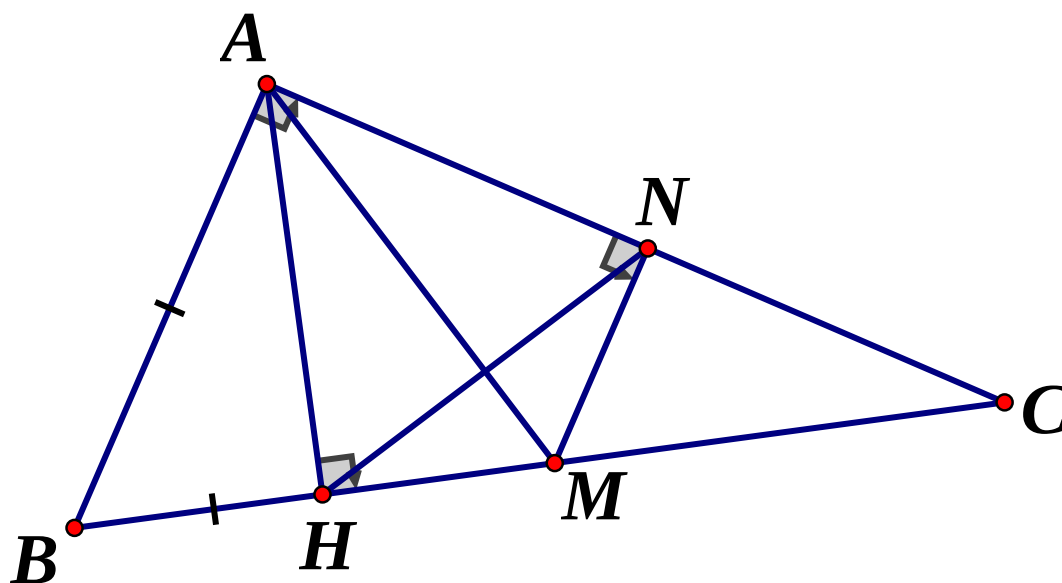
Vì B và AHC cùng phụ BAH suy ra $\triangle AEC$ cân tại C , do đó $AC = CE$

Tương tự $AB = BD \Rightarrow AB + AC = BC + DE$

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

- Tam giác ANH cân
- $BC + AH > AB + AC$
- $2AC^2 - BC^2 = CH^2 - BH^2$

Lời giải



- $\triangle ABM$ cân tại B nên $BAM = BMA$

mà $BAM + MAN = 90^\circ$; $BMA + HAM = 90^\circ \Rightarrow HAM = MAN$
 $\Rightarrow \triangle HAM = \triangle NAM$ (ch - gn) $\Rightarrow AH = AN \Rightarrow \triangle ANH$ cân.

- Ta có: $BC - AB = BC - AM = MC$; $AC - AH = AC - AN = NC$

Tam giác MNC vuông tại N nên $MC > NC$. Suy ra :
 $BC - AB > AC - AH \Rightarrow BC + AH > AB + AC$ (đpcm)

- Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ABH, ACH, ABC ta có:

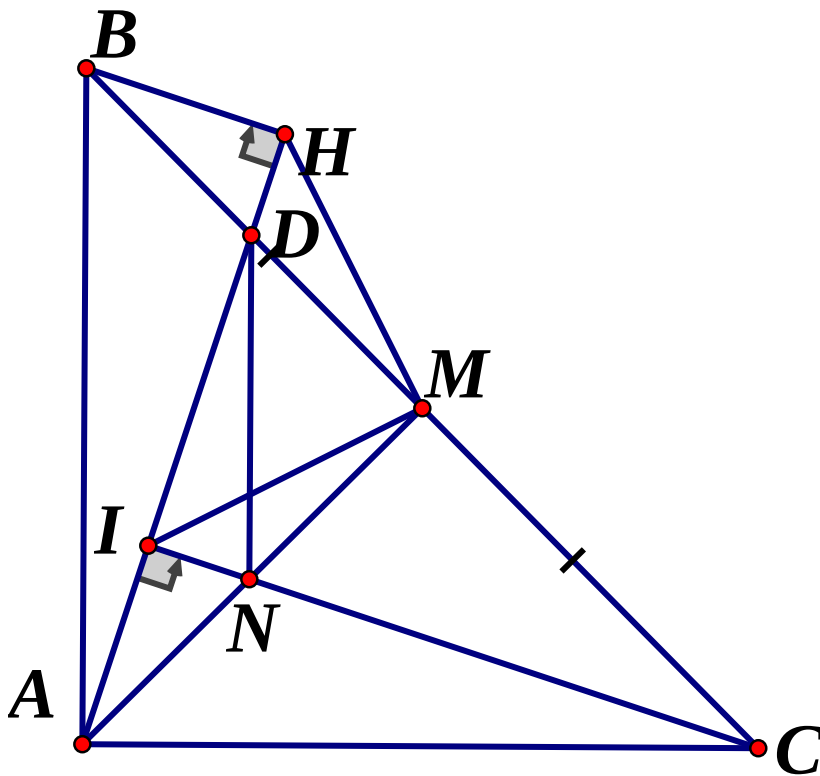
$$\begin{aligned} CH^2 - BH^2 &= (AC^2 - AH^2) - (AB^2 - AH^2) = AC^2 - AB^2 \\ &= AC^2 - (BC^2 - AC^2) = 2AC^2 \end{aligned}$$

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- $BH = AI$
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- Đường thẳng DN vuông góc với AC .

d) IM là phân giác của HIC

Lời giải



e) $\triangle AIC = \triangle BHA \Rightarrow BH = AI$

f) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$

g) AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$

h) $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = MI$ và $BHM = IMA$

Mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân $\Rightarrow HIM = 45^\circ$

Mà : $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác HIC

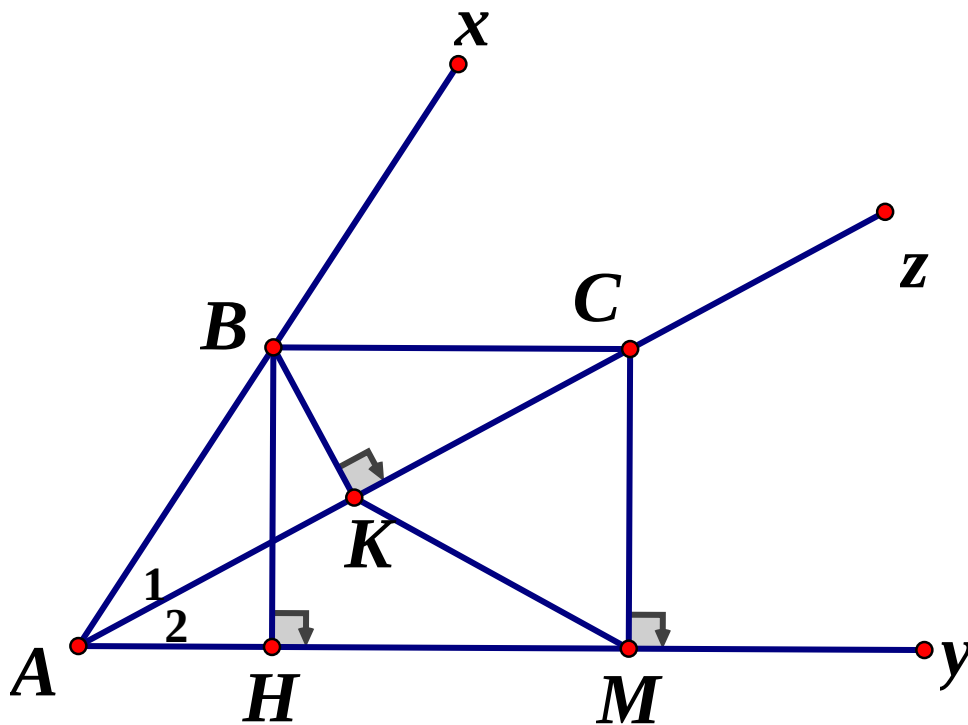
Bài 19: Cho góc $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay, CM \perp Ay, BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

a) K là trung điểm của AC

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều

Lời giải



- $$\Rightarrow A_2 = C_1 \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại B}$$

b) Xét Δ vuông ABH và Δ vuông BAK có: AB là cạnh huyền;

$$A_2 = B_1 (= 30^0) \dots do \dots \begin{cases} A_2 = \frac{A}{2} = 30^0 \\ B_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK \text{ mà } AK = \frac{AC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

- c) ΔAMC vuông tại M có $AK = KC = \frac{AC}{2}$ (1) $\Rightarrow MK$ là trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \Delta KMC$ cân

Mặt khác $\triangle AMC$ có $M = 90^\circ; A = 30^\circ \Rightarrow MKC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ đều.

Bài 20: Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$

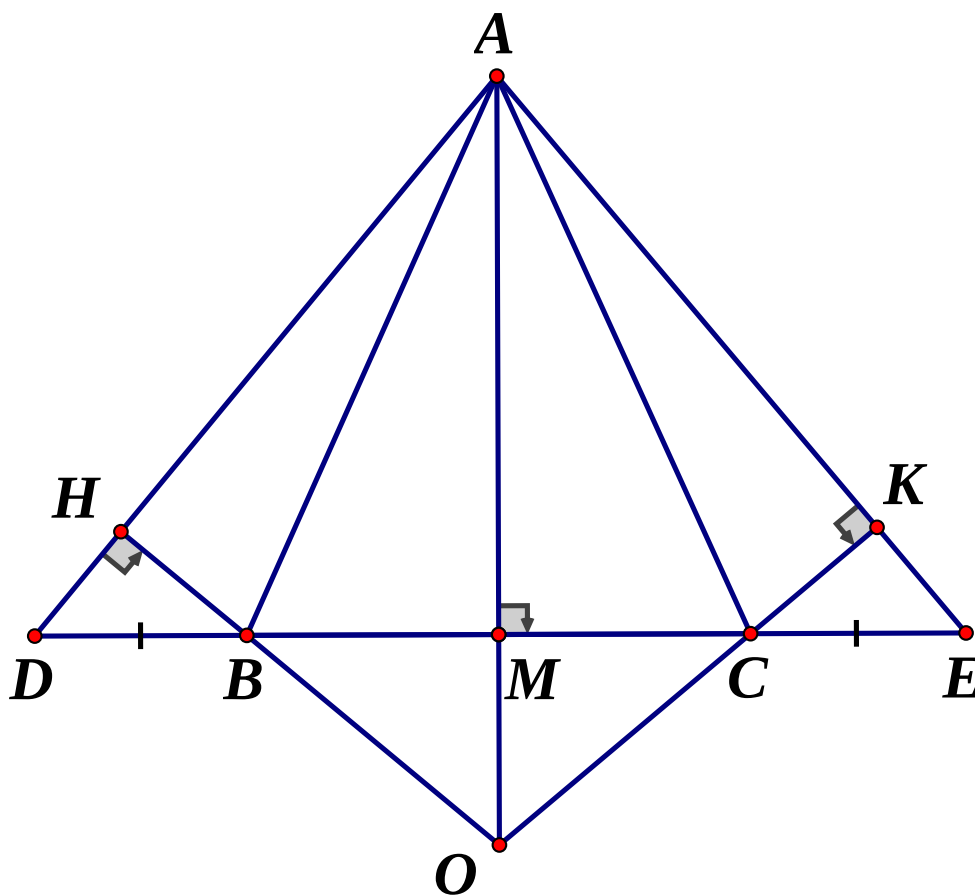
- a) Chứng minh ΔADE cân

- b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE

c) Từ B và C kẻ $BH \perp AD; CK \perp AE$. Chứng minh : $BH = CK$

d) Chứng minh AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ACE (c.g.c) \Rightarrow$ Kết luận

b) Chứng minh $\triangle MAD = \triangle MAE (c.c.c) \Rightarrow$ Kết luận

c) Chứng minh $\triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow$ Kết luận

d) Gọi giao điểm của BH và CK là O. Chứng minh AO là tia phân giác của DAE mà AM là phân giác của $DAE (cmt) \Rightarrow$ Kết luận

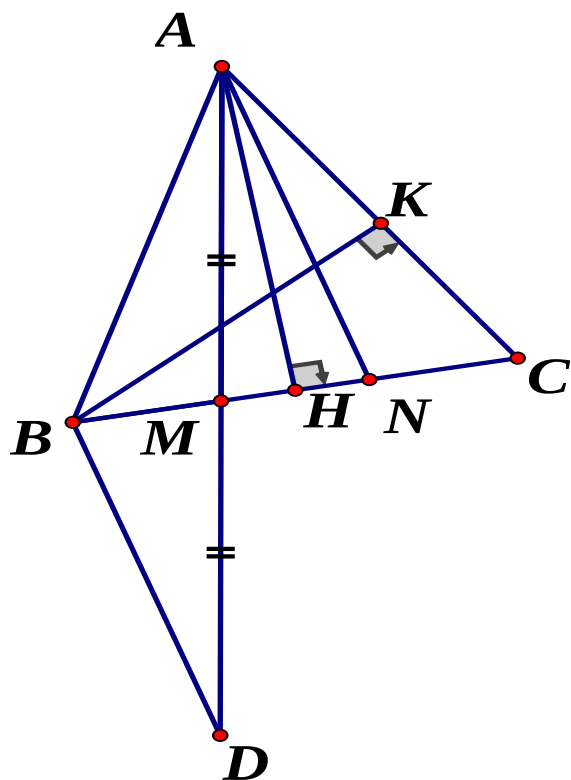
Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$

b) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM$

c) Kẻ đường cao BK . Biết $AK = 7cm, AB = 9cm$. Tính độ dài BC

Lời giải



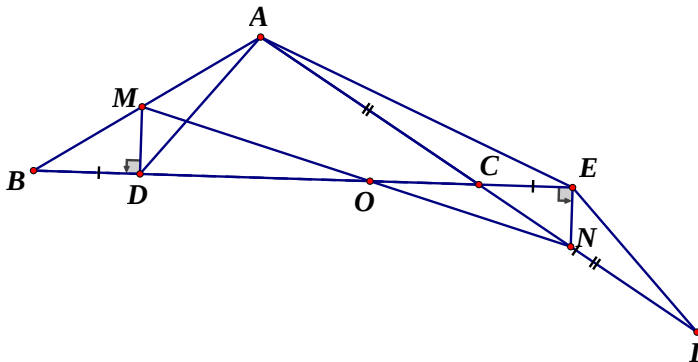
a) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle ICE$ và $AB + AC < AD + AE$

b) Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N .

Chứng minh MN đi qua trung điểm DE .

c) Chứng minh chu vi của tam giác ABC nhỏ hơn chu vi của tam giác AMN .

LỜI GIẢI



a) $\triangle ABC$ cân tại A suy ra $AB = AC, \angle B = \angle C$

Mà $AC = IC$ (gt) $\Rightarrow AB = IC; \angle B = \angle ICE$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ICE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ICE$ có: $AB = IC; \angle B = \angle ICE; \angle ADB = \angle ICE$

Suy ra ..

Ta có: $AB = IC \Rightarrow AB + AC = IC + AC = AI$ (1)

Theo chứng minh trên $\triangle ABD = \triangle ICE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = IE \Rightarrow AD + AE = IE + AE$ (2)

Áp dụng BĐT trong tam giác AEI ta có: $IE + AE > AI$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow AD + AE > AB + AC$

b) Gọi O là giao điểm của MN với DE

Chứng minh được $\triangle BDM = \triangle CEN$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$

Chứng minh được: $\triangle ODM = \triangle OEN$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OE$

Hay MN đi qua trung điểm của DE .

c) Vì $BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + MN$ (4)

Có $BD = CE$ (gt) $\Rightarrow BC = DE$

$\left. \begin{array}{l} MO > OD \\ NO > OE \end{array} \right\} \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC$ (5)

$C_{\triangle ABC} = AB + AC + BC$

$C_{\triangle AMN} = AM + AN + MN$ (6)

Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow$ Chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$

Bài 23:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC

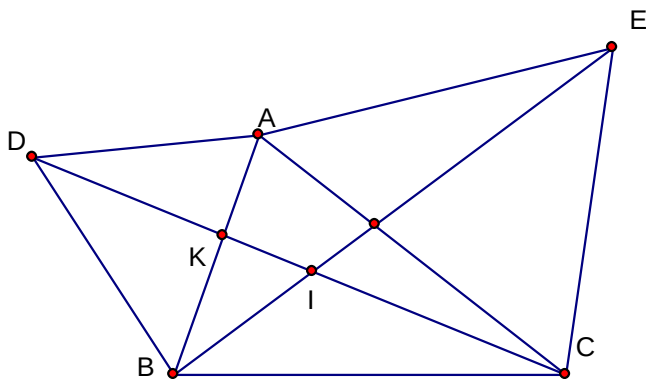
a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Chứng minh rằng: góc $DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

LỜI GIẢI



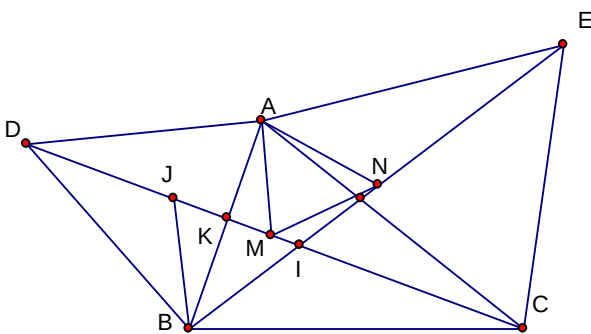
a) Ta có: $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (cgc)

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (Bài a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$,

mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh).

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)



c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (Bài a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (cgc) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra

$\angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (cgc) $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Bài 24:

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

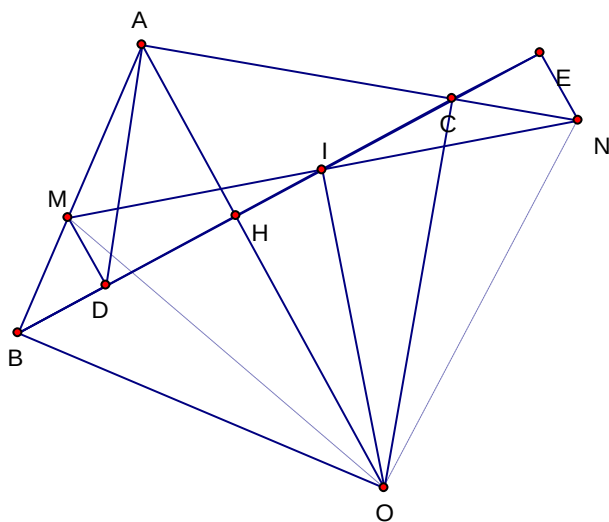
Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Trên cạnh BC lấy điểm D trên tia đối tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Gọi I là giao điểm của MN và BE .

A Biết $AB < BC$ Chứng minh: $\hat{A} > 60^\circ$.

B Chứng minh $IM = IN$

c . Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua 1 điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC

LỜI GIẢI



a) Do $AB < BC$ nên $A > B$. mà $B = C$ vì tam giác ABC cân Mà $A + B + C = 180^\circ$ nên ta có

$A > 60^\circ$ (HS có thể c/m bằng phản chứng)

b) HS chứng minh được $\triangle BDM = \triangle CEN$ suy ra $EN = DM$

HS chứng minh được $\triangle IDM = \triangle IEN$ suy ra $IN = IM$

c) Kẻ AH vuông góc với BC . Gọi O là giao điểm của AH và đường thẳng vuông góc với MN ở I . HS chứng minh được O là điểm cố định.

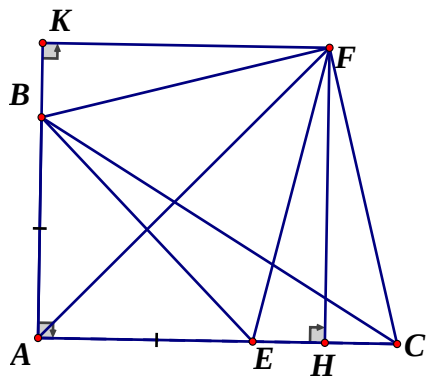
Bài 25:

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Tia phân giác của BAC cắt đường trung trực của CE tại F .

a) Chứng minh tam giác BFC cân

b) Biết góc $ACB = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều

LỜI GIẢI



a) Chỉ ra được F là giao điểm 2 đường trung trực của $\triangle BEC$

$\Rightarrow F \in$ trung trực $BC \Rightarrow \triangle BFC$ cân

b) Tính được: $\angle EBC = 15^\circ$

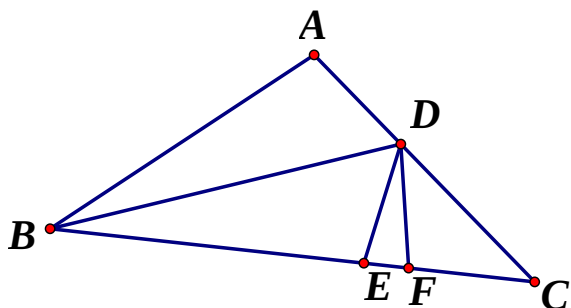
Hạ $FK \perp AB \Rightarrow \triangle FKB = \triangle FHC$ (ch – gn) $\Rightarrow \triangle BFC$ vuông cân

$\Rightarrow \angle FBC = 45^\circ \Rightarrow \triangle BFE$ đều

Bài 26:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\angle A = 100^\circ$, tia phân giác của góc $\angle ABC$ cắt AC tại D . Chứng minh:
 $AD + BD = BC$

LỜI GIẢI



Trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho: $BE = BA, BF = BD$. Học sinh chứng minh được
 $AD = DE$

Học sinh chứng minh được $\triangle DFE$ cân tại $D \Rightarrow DE = DF$

Chứng minh được $\triangle DFC$ cân tại $F \Rightarrow DF = FC \Rightarrow DE = FC$

Suy ra $AD + BD = BC$

Bài 27:

Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

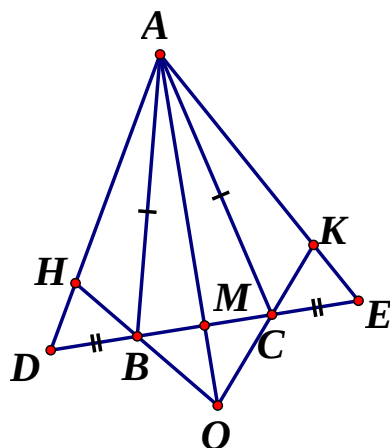
a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của DAE

c) Từ B và C vẽ theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$

d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

LỜI GIẢI



a) $\triangle ABC$ cân nên $AB = AC \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $AB = AC(gt)$; $\angle ABD = \angle ACE(cmt)$; $DB = CE(gt)$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$MD = ME(DB = CE; MB = MC)$; AM chung; $AD = AE(cmt)$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME(c.c.c) \Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$

Vậy AM là tia phân giác của DAE

c) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm Bài a) nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có: $\angle BDH = \angle CEK(do \dots \angle ADE = \angle AED)$; $DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

d) Gọi giao điểm của BH và CK là O

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có: OA cạnh chung;

$AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \triangle BHD = \triangle CKE))$

$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO(ch - cv)$

Do đó $\angle OAH = \angle OAK$ nên AO là tia phân giác của KAH hay AO là tia phân giác của DAE ,

mặt khác theo Bài b) AM là tia phân giác của DAE

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O .

Bài 28:

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD=CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N.

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$.

b) MN cắt BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của MN.

c) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC

LỜI GIẢI

a) Xét $\triangle BDM = \triangle CEN$ có: $BD = CE$ (gt) ,

$$D = E = 90^\circ \quad (MD, NE \perp BC)$$

$$\angle B = \angle C \quad (= \angle A)$$

$$\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CEN \quad (\text{g-c-g})$$

$$\Rightarrow DM = EN$$

b) Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có: $D = E = 90^\circ$

$$DM = EN \quad (\text{Theo Bài a})$$

$$\angle DMI = \angle ENI \quad (\text{So le trong và } MD \parallel NE)$$

$$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI \quad (\text{g-c-g})$$

$$\Rightarrow IM = IN$$

Vậy I là trung điểm của MN.

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC, O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I $\Rightarrow$ Cần chứng minh O là điểm cố định.

Nối O với B, C. Vì đường thẳng OA cố định nên cần chứng minh OC cố định hay $OC \perp AC$

$$\text{Chứng minh } \triangle OAB = \triangle OAC \quad (\text{ccc}) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh } \triangle OBM = \triangle OCN \quad (\text{ccc}) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCN \quad (2)$$

$$\text{Từ } 1, 2 \Rightarrow \angle OCA = \angle OCN \text{ mà } \angle OCA + \angle OCN = 180^\circ \Rightarrow \angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OC \perp AC$$

$$\Rightarrow O \text{ là điểm cố định.}$$

Vậy khi D di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 29:

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE.

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $DC = BE$

Ta có $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$

tương tự $\angle BAE = 90^\circ + \angle BAC$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có $AD = AB$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A)

$$\angle DAC = \angle BAE \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE \text{ (định nghĩa tam giác bằng nhau)}$$

Chứng minh $DC \perp BE$

Gọi K, N lần lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$\triangle AND$ và $\triangle KNB$ có $\angle AND = \angle KNB$ (đối đỉnh);

$$\angle ADN = \angle KBN \text{ (} \triangle DAC = \triangle BAE \text{)}$$

$$\Rightarrow \angle DAN = \angle BKN \text{ định lí tổng 3 góc trong tam giác)}$$

Mà $\angle DAN = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$$\Rightarrow \angle BKN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE \text{ tại K}$$

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$

Chứng minh $\triangle AMB = \triangle IMC$ (c-g-c)

$$\Rightarrow CI = AB \text{ và } CI \parallel AB$$

Chứng minh $\angle ACI = \angle DAE$ (cùng bù $\angle BAC$)

Chứng minh $\triangle ACI = \triangle EAD$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \angle CAI = \angle AED \text{ mà } \angle AED + \angle EAH = 90^\circ \text{ (} \triangle AHE \text{ vuông tại H)}$$

$$\Rightarrow \angle CAI + \angle EAH = 90^\circ \Rightarrow \angle MAH = 180^\circ \Rightarrow M, A, H \text{ thẳng hàng}$$

Bài 30:

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

$$\text{a) } DM = EN$$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

LỜI GIẢI

$$\text{a) } \triangle MDB = \triangle NEC \Rightarrow DM = EN$$

$$\text{b) } \triangle MDI = \triangle NEI \Rightarrow IM = IN \Rightarrow BC \text{ cắt } MN \text{ tại điểm I là trung điểm của } MN.$$

c) Gọi H là chân đường cao vuông góc kẻ từ A xuống BC, ta có:

$$\Delta AHB = \Delta AHC \Rightarrow HAB = HAC$$

Gọi O là giao AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I thì

$$\Delta OAB = \Delta OAC(c.g.c) \Rightarrow OBA = OCA \quad (1)$$

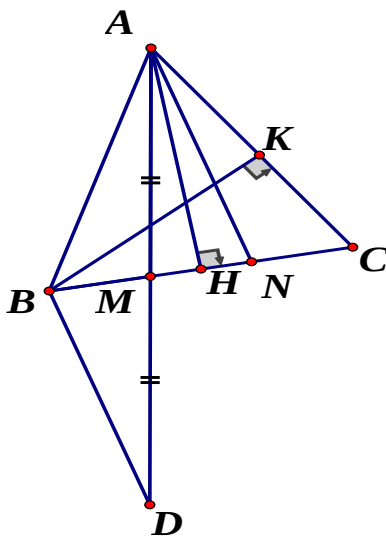
$$\Delta OIM = \Delta OIN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OBN = \Delta OCN(c.c.c) \Rightarrow OBM = OCM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OCA = OCN = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

Bài 31: Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

- Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$
- Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM$
- Kẻ đường cao BK . Biết $AK = 7cm, AB = 9cm$. Tính độ dài BC



d)

Xét ΔABM và ΔACN có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

$$BM = CN \text{ (gt)}$$

$$\Delta ABM = \Delta ACN(cgc) \Rightarrow AM = AN$$

Xét ΔABH và ΔACH có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

$$BH = CH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH(cgc)$$

$$\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$$

e) Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Chúng minh được $\triangle AMN = \triangle DMB(cgc) \Rightarrow MAN = BDM$ và $AM = AN = BD$

Chúng minh được: $BA > AM \Rightarrow BA > BD$

Xét $\triangle BAD$ có $BA > BD \Rightarrow BDA > BAD$ hay $MAN < BAM$

f) Vì $AK \neq 0 \Rightarrow A \neq 90^\circ$ nên chỉ có hai trường hợp xảy ra :

TH1: BAC nhọn $\Rightarrow K$ nằm giữa hai điểm A, C mà $AC = AB$

$\Rightarrow AC = 9cm \Rightarrow KC = AC - AK = 2$

$\triangle AKB$ vuông tại $K \Rightarrow BK^2 = AB^2 - AK^2 = 32$

$\triangle AKC$ vuông tại K nên ta có: $BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = 6cm$

Th2: BAC tù $\Rightarrow A$ nằm giữa hai điểm $K, C \Rightarrow KC = AK + AC = 16cm$

$\triangle ABK$ vuông tại $K \Rightarrow BK^2 = AB^2 - AK^2 = 32$

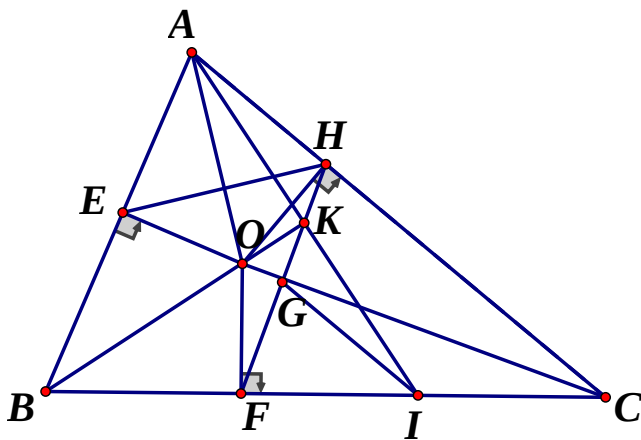
$\triangle BKC$ vuông tại $K \Rightarrow BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{288}$

Vậy $BC = 6cm$ hoặc $BC = \sqrt{288}cm$

Bài 32: Cho tam giác có ba góc nhọn, Các tia phân giác của và cắt nhau tại O . Gọi là hình chiếu của trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm trên đoạn sao cho Gọi K là giao điểm của và

a) Chứng minh tam giác cân và

b) Chứng minh ba điểm thẳng hàng



a) Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO(ch - gn) \Rightarrow CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C

Vẽ $IG \parallel AC (G \in FH)$. Chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

Suy ra $AH = IG, IGK = AHK \Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK(g - c - g) \Rightarrow AK = KI$

b) Vẽ $OE \perp AB$ tại E . Tương tự câu a, ta có: $\triangle AEH, \triangle BEF$ thứ tự cân tại A, B , suy ra $BE = BF$ và $AE = AH$.

$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại B .

Mà BO là phân giác của B, BK là đường trung tuyến của $\triangle ABI$ nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

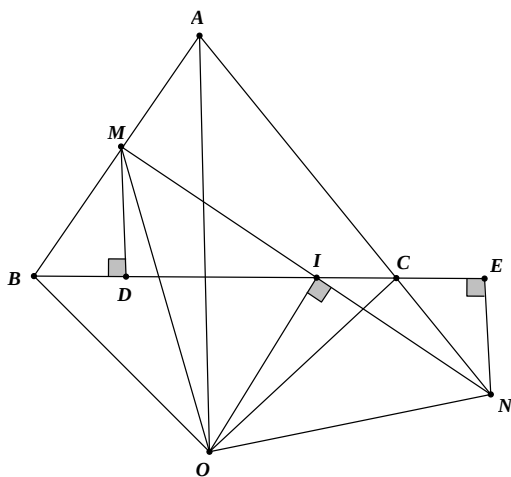
Bài 33.: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

a. Chứng minh $DM = EN$.

b. Chứng minh $IM = IN$, $BC < MN$.

c. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I .

Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$; $\angle NCE = \angle ACB$; (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC(g.c.g) \Rightarrow DM = EN$.

b) Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI(g.c.g) \Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$.

Lại có $DI < MI$, $IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + IN = MN$

Suy ra $BC < MN$.

c) Ta chứng minh được:

$$\triangle ABO = \triangle ACO(c.g.c) \Rightarrow OC = OB, \angle ABO = \angle ACO.$$

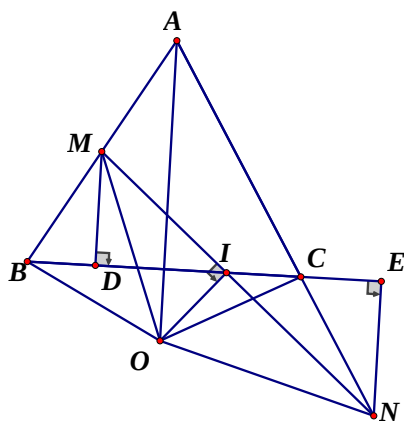
$$\triangle MIO = \triangle NIO(c.g.c) \Rightarrow OM = ON.$$

Ta lại có: $BM = CN$. Do đó $\triangle BMO = \triangle CNO(c.c.c)$

$\Rightarrow \angle MBO = \angle NCO$, Mà: $\angle MBO = \angle ACO$ suy ra $\angle NCO = \angle ACO$, mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$.

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 34. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I



- 4) Chứng minh : $DM = EN$
- 5) Chứng minh: $IM = IN, BC < MN$
- 6) Gọi O là giao của đường phân giác A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$.

Lời giải

- 1) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$; $\angle NCE = \angle ACB$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$

- 2) Ta có: $\triangle MDI = \triangle NEI$ (c.g.c) $\Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$

Lại có : $DI < MN, IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + NI = MN$

Suy ra $BC < MN$

- 3) Ta chứng minh được:

$$\triangle ABO = \triangle ACO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OC = OB, \angle ABO = \angle ACO$$

$$\triangle MIO = \triangle NIO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OM = ON$$

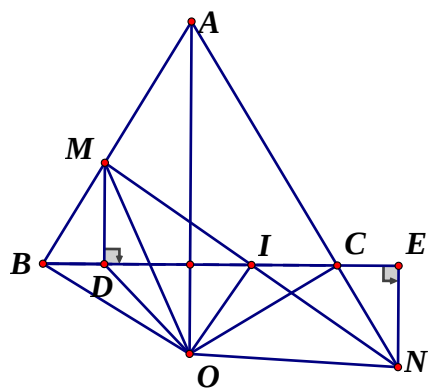
$$\text{Ta lại có: } BM = CN \Rightarrow \triangle BMO = \triangle CNO \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle MBO = \angle NCO, \text{ mà } \angle MBO = \angle ACO \text{ suy ra } \angle NCO = \angle ACO, \text{ mà đây là hai góc kề bù nên}$$

$$CO \perp AN$$

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc AC tại C nên O cố định.

Câu 35. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy



điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BE tại E cắt AC tại N

- 4) Chứng minh $\triangle MBD = \triangle NCE$
- 5) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN
- 6) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Lời giải

a) Ta có: $\angle ABC = \angle NCE (= \angle ACB) \Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE (cgv - gn)$

b) Theo câu a) $\Rightarrow MD = EN \Rightarrow \triangle IMD = \triangle INE (cgv - gn)$

$\Rightarrow IM = IN \Rightarrow I$ là trung điểm MN .

c) Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH (ch - gn) \Rightarrow \angle BAH = \angle CAH$ (1)

Đường vuông góc với MN tại I cắt AH tại O

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAC (c.g.c) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA$ (2)

Mặt khác :

$\triangle OBH = \triangle OCH (2cgv) \Rightarrow OB = OC$ (*)

$\triangle OMI = \triangle ONI (2cgv) \Rightarrow OM = ON$ (**)

$BM = CN (cau...b)$ (***)

Từ (*), (**), (***) suy ra : $\triangle OBM = \triangle OCN (c.c.c) \Rightarrow \angle OBM = \angle OCN$ (3)

Từ (2) (3) $\Rightarrow \angle OCA = \angle OCN (= \angle OBA) = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

Vì AC cố định mà $OC \perp AC \Rightarrow O$ cố định

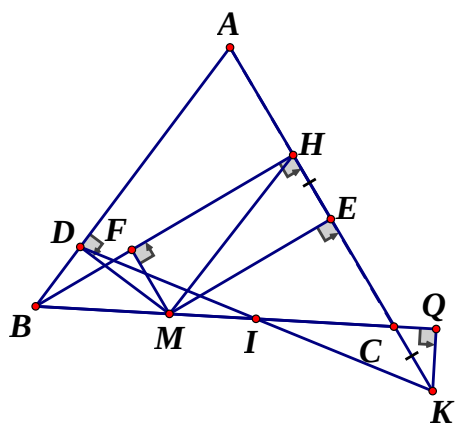
Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định

Câu 36. Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

d) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$

e) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi

f) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK



Lời giải

a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB(ch - gn)$

b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB(ch - gn) \Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Chứng minh: $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2 cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

+) Chứng minh: $BD = FM = EH = CK$

+) Chứng minh $\triangle BDP = \triangle CKQ(ch - gn) \Rightarrow DP = KQ$ (cạnh tương ứng)

+) Chứng minh $IDP = IKQ \Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI(g.c.g) \Rightarrow ID = IK(đpcm)$

câu 37. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD

d) Tam giác BDC là tam giác gì? Vì sao? So sánh DM và CN

e) Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với CN cắt tia BA tại K

Chứng minh : $\triangle BMK = \triangle CMD$

f) Biết $AB = a$, tính chu vi tam giác DMK

Lời giải

a) Chứng minh được $\triangle BAD = \triangle BAC (c.g.c) \Rightarrow BD = BC$ và

$$\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle BDC \text{ vuông cân tại B}$$

Chứng minh được $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow DM = CN$

b) Vì $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow \angle BNC = \angle BMD$

$\triangle BNC$ vuông tại B nên $\angle BNC + \angle BCN = 90^\circ$

$\triangle CME$ vuông tại E nên $\angle MCE + \angle CME = 90^\circ$

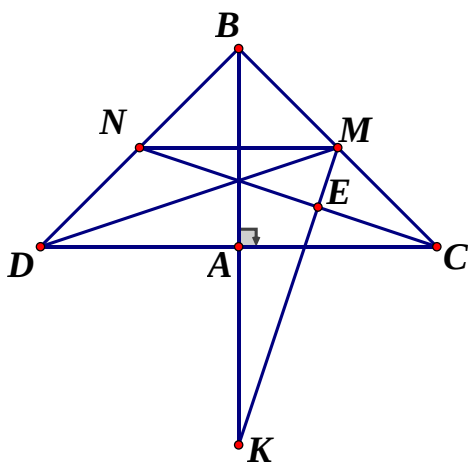
Từ đó suy ra $\angle CME = \angle BMD \Rightarrow \angle BMK = \angle CMD$

Chứng minh $\triangle BMK = \triangle CMD (g.c.g)$

c) $AB = a$, tính được $BC = a\sqrt{2}$ do áp dụng định lý Pytago với tam giác ABC

$$\text{Và cũng tính được } BD = BC = a\sqrt{2}; BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vì } \triangle BMK = \triangle CMD \Rightarrow MD = MK \Rightarrow \text{Chu vi } \triangle DMK = 2MD + DK$$



Tính được $DM = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ do áp dụng định lý Pytago vào $\triangle BDM$

Chứng minh được $\triangle BDK = \triangle BCK \Rightarrow DK = BC = a\sqrt{2}$

Chu vi tam giác DMK bằng:

$$2DM + DK = 2a \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} = a\sqrt{10} + a\sqrt{2} = a(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

câu 38. Tam giác ABC cân tại C và $C = 100^\circ$; BD là phân giác của B . Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . BK là phân giác CBD , BK cắt Ax tại N

- c) Tính số đo ACM
- d) So sánh MN và CE .

Lời giải

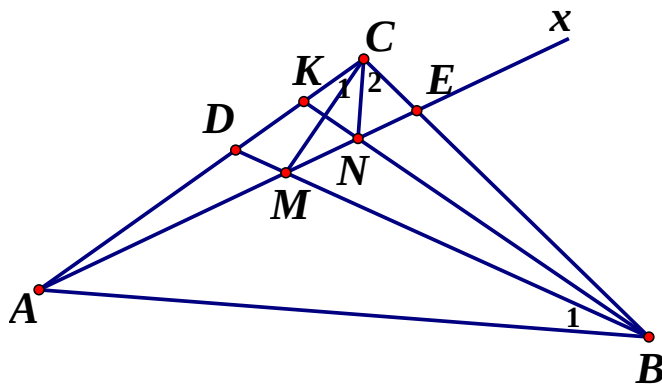
- a) Học sinh chứng minh được: $\triangle ANB$ cân tại N (có hai góc bằng nhau $= 30^\circ$) $\Rightarrow NA = NB$

Nối CN , chứng minh được $\triangle CAN = \triangle CBN$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle NCA = \angle NCB = 50^\circ$; $\angle NMB$ là góc ngoài của $\triangle ABM \Rightarrow \angle NMB = \angle A + \angle B_1 = 50^\circ$

Từ đó, học sinh chứng minh được: $\triangle BNM = \triangle BNC$ (g.c.g) $\Rightarrow BC = BM \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại B ,
mà lại có góc ở đỉnh $\angle CBM = 20^\circ$ nên tính được $\angle ACM = 20^\circ$

- b) Từ chứng minh trên, ta chứng minh được $\triangle MNC$ cân tại $N \Rightarrow MN = NC$, so sánh CN với CE



Xét trong tam giác CNE tính được $\angle CEN = 180^\circ - (100^\circ + 10^\circ) = 70^\circ$

Và tính được $\angle CNE = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$ (góc ngoài của $\triangle CAN$)

$\Rightarrow \angle CEN > \angle CNE \Rightarrow CN > CE$ hay $MN > CE$

Câu 39. Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- d) $DM = EN$

e) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

f) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải

a) $\triangle MDB = \triangle NEC (g.c.g) \Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)

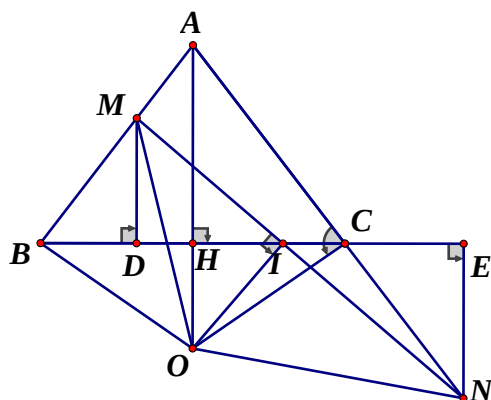
$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

$\triangle MDI$ vuông tại D : $DMI + MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E : $ENI + NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $MID = NIE$ (đối đỉnh) nên $DMI = ENI$



$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI (g.c.g) \Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC$ (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

$\triangle OAB = \triangle OAC (c.g.c) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN (c.g.c) \Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN (c.c.c) \Rightarrow \angle OBM = \angle OCN$ (cặp góc tương ứng) (2)

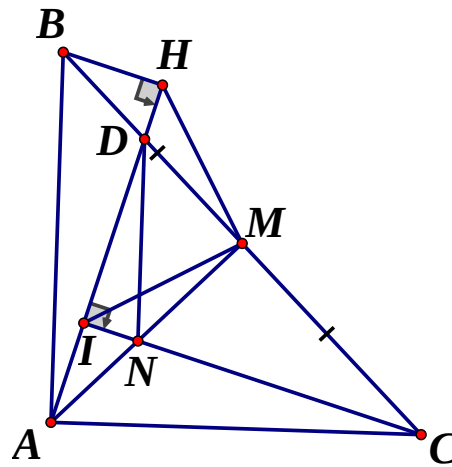
Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

câu 40. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- e) $BH = AI$
- f) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi
- g) Đường thẳng DN vuông góc với AC
- h) IM là phân giác của HIC

Lời giải



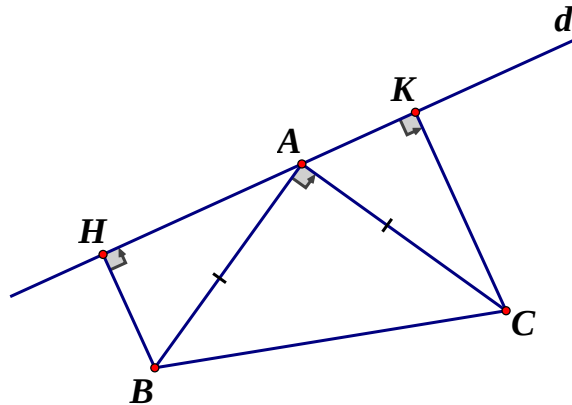
- a) $\triangle AIC = \triangle BHA \Rightarrow BH = AI$
- b) $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$
- c) AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$
- d) $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = MI$ và $BHM = IMA$

Mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ \Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân
 $\Rightarrow HIM = 45^\circ$ mà $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác của HIC

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ, AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d . Kẻ BH và CK vuông góc với d . Chứng minh rằng:

- a) $AH = CK$
- b) $HK = BH + CK$

Lời giải



- a) Xét $\triangle AHK$ và $\triangle CKH$ có: $H = K = 90^\circ$; $AB = AC$ (gt); $HAB = KCA$ (cùng phụ với KAC) $\Rightarrow \triangle AHK = \triangle CKA$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = CK$ (cặp cạnh tương ứng)
- b) Từ câu a) $\triangle AHK = \triangle CKA \Rightarrow BH = AK$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy $KH = AH + AK = BH + CK$

câu 42. Cho tam giác ABC ($AB = AC$; A tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

Câu 1. Chứng minh

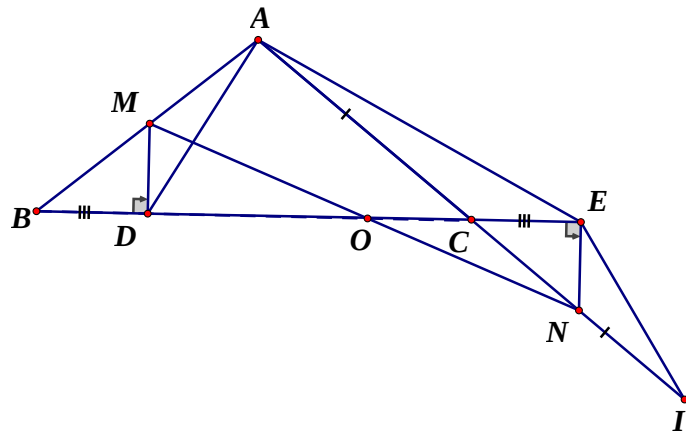
a) $\triangle ABD = \triangle ICE$

b) $AB + AC < AD + AE$

Câu 2. Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $BM = CN$.

Câu 3. Chứng minh rằng chu vi tam giác ABC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN

Lời giải



Câu 1.

a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ICE$ (cgc)

b) Có $AB + AC = AI$, vì $\triangle ABD = \triangle ICE \Rightarrow AD = EI$ (2 cạnh tương ứng)

Áp dụng bất đẳng thức trong $\triangle AEI$ có: $AE + EI > AI$ hay $AE + AD > AB + AC$

Câu 2. Chứng minh $\triangle BDM = \triangle CEN$ (gcg) $\Rightarrow BM = CN$

Câu 3.

Vì $BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN$ (1)

Có $BM = CE$ (gt) $\Rightarrow BC = DE$

Gọi giao điểm của MN với BC là O ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MO > OD \\ NO > OE \end{array} \right\} \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$

Câu 43. Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn

5) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$

6) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc

BDA cắt BC tại N . Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$

Lời giải



Ta có: $EBC = EBA + ABC = ABC + 90^0 \Rightarrow IAB = EBC$

Do đó: $\triangle ABI = \triangle BEC$ (c.g.c)

D₀ $\triangle ABI = \triangle BEC \Rightarrow AIB = BCE$

Trong tam giác vuông IHB vuông tại H có: $\angle AIB + \angle IBH = 90^\circ$

Do đó: $BCE + IBH = 90^\circ$

Vậy CE vuông góc với BI

2) Do tính chất của đường phân giác, ta có: $DM \perp DN$

Gọi F là trung điểm của MN . Ta có: $FM = FD = FN$

Tam giác FDM cân tại F nên $FMD = MDF$

$$\begin{aligned} FMD &= MBD + BDM \text{ (góc ngoài của tam giác)} \\ &= MBD + CDM \Rightarrow MBD = CDF \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có: $MCD = CDF + CFD$ (2)

Do tam giác ABC cân tại A nên $MCD = 2MBD$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow MBD = DFC$ hay tam giác DBF cân tại D.

Do đó: $BD = DF = \frac{1}{2}MN$

Bài 44:

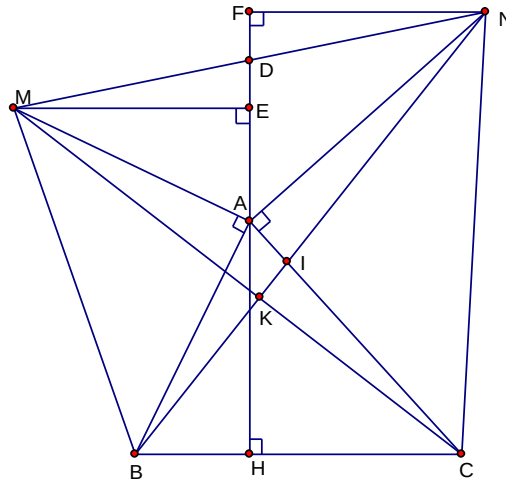
Cho ΔABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN .

a) Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$;

b) Chứng minh: $BN \perp CM$;

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔABN , có:

$$AM = AB \text{ (}\Delta AMB \text{ vuông cân)}$$

$$AC = AN \text{ (}\Delta ACN \text{ vuông cân)}$$

$$\angle MAC = \angle NAC \text{ (} = 90^\circ + \angle BAC \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \Delta AMC = \Delta ABN \text{ (c - g - c)}$$

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

Xét ΔKIC và ΔAIN , có:

$$\angle ANI = \angle KCI \text{ (}\Delta AMC = \Delta ABN\text{)}$$

$$\angle AIN = \angle KIC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle IKC = \angle NAI = 90^\circ, \text{ do đó: } MC \perp BN$$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

$$\text{- Ta có: } \angle BAH + \angle MAE = 90^\circ \text{ (vì } \angle MAB = 90^\circ \text{)}$$

$$\text{Lại có } \angle MAE + \angle AME = 90^\circ, \text{ nên } \angle AME = \angle BAH$$

Xét ΔMAE và ΔABH , vuông tại E và H , có:

$$\angle AME = \angle BAH \text{ (chứng minh trên)}$$

$$MA = AB$$

$$\text{Suy ra } \Delta MAE = \Delta ABH \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow ME = AH$$

- Chứng minh tương tự ta có $\Delta AFN = \Delta CHA$

$$\Rightarrow FN = AH$$

Xét ΔMED và ΔNFD , vuông tại E và F, có:

$$ME = NF (= AH)$$

$$\angle EMD = \angle FND (\text{phụ với } \angle MDE \text{ và } \angle FDN, \text{ mà } \angle MDE = \angle FDN)$$

$$\Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD \Rightarrow BD = ND.$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN.

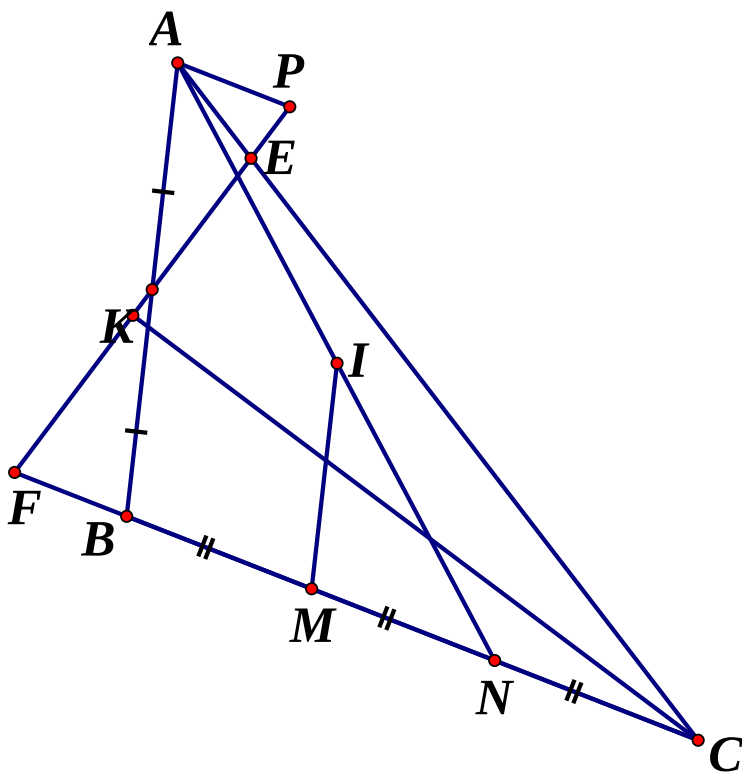
Bài 45: Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$.

Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I

a) Chứng minh I là trung điểm của AN

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc ACB cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng BC tại F. Chứng minh $AE = BF$

Lời giải:



a) Từ I kẻ đường thẳng $\parallel BC$ cắt AB tại H. Nối MH

Ta có: $\Delta BHM = \Delta IMH$ vì: $BHM = IMH$; $BMH = IHM$ (slt); HM ... chung

$$\Rightarrow BM = IH = MN$$

$\Delta AHI = \Delta IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $AHI = IMN (= \angle ABC)$; $AIH = INM$ (đồng vị)

$$\Rightarrow AI = IN \text{ (đpcm)}$$

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P. $\Delta PKA = \Delta FKB$ vì:

$\angle PKA = \angle FKB$ (đối đỉnh); $\angle APK = \angle BFK$ (so le trong); $AK = KB \Rightarrow AP = BF$ (1)

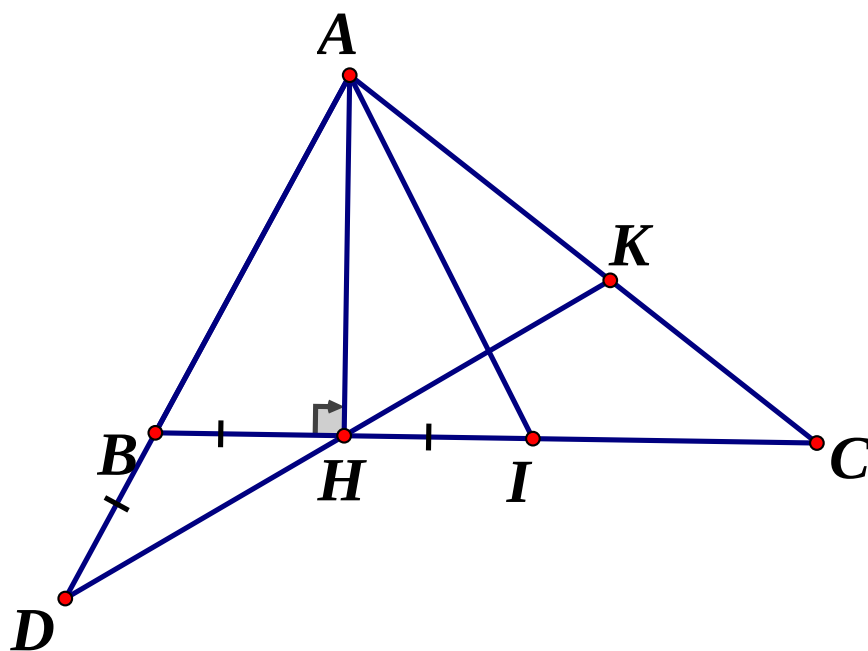
$\angle EPA = \angle KFC$ (đồng vị); $\angle CEF = \angle KFC$ (ΔCFE cân)

$\Rightarrow \angle EPA = \angle CEF \Rightarrow \Delta APE$ cân $\Rightarrow AP = AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = BF$ (đpcm)

Bài 46: Cho ΔABC có $B = 2C < 90^\circ$ Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải:



Ta có: $B = 2C \Rightarrow B > C$ nên $AC > AB \Rightarrow HC > HB$

Trên đoạn thẳng HC lấy điểm I sao cho $IH = IB \Rightarrow \Delta AHI = \Delta AHB$

$\Rightarrow AI = AB$ và $\angle AIB = \angle ABC = 2\angle ACB$

Mặt khác: $\angle AIB = \angle ACB + \angle IAC \Rightarrow \angle IAC = \angle ACB$

Do đó: $IA = IC < HC$ hay $AB < HC = AD$

Gọi K là giao điểm của DH với AC .

Vì $AD = HC, AB = IC$ nên $BD = HI = HB \Rightarrow \Delta DBH$ cân tại B

Do đó: $\angle BDH = \angle BHD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle ACB$

$$\Rightarrow KHC = ACB (= BHD) \Rightarrow KAH = KHA \text{ (phụ hai góc bằng nhau)}$$

Suy ra $KA = KH = KC$ hay K là trung điểm của đoạn thẳng AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC

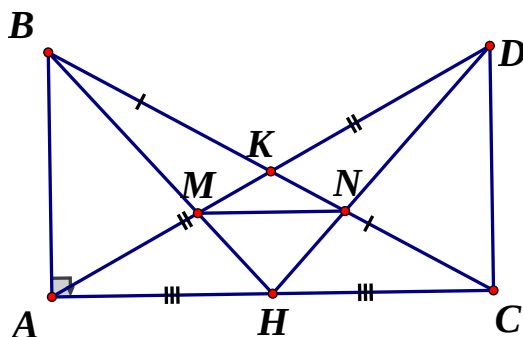
Bài 47. Cho tam giác ABC vuông tại A , K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$

c) Chứng minh $CD \parallel AB$

d) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M ; DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng $\triangle ABH = \triangle CDH$

e) Chứng minh: $\triangle HMN$ cân

Lời giải



a) Xét 2 tam giác $\triangle ABK$ và $\triangle DCK$ có: $BK = CK$; $BKA = CKD$ (đối đỉnh);

$$AK = DK (gt) \Rightarrow \triangle ABK = \triangle DCK (c.g.c) \Rightarrow \angle DCK = \angle DBK$$

$$\text{Mà } \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ = \angle BAC \Rightarrow AB \parallel CD (AB \perp AC \text{ và } CD \perp AC).$$

b) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABH$ và $\triangle CDH$ có:

$$BA = CD (\triangle ABK = \triangle DCK); AH = CH \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDH (c.g.c)$$

c) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$$AB = CD; \angle ACD = \angle BAC = 90^\circ; AC \text{ cạnh chung} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle CAD \text{ mà } AH = CH (gt) \text{ và } \angle MHA = \angle NHC (\triangle ABH = \triangle CDH)$$

$$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle CNH (g.c.g) \Rightarrow MH = NH \Rightarrow \triangle HMN \text{ cân tại } H$$

Bài 48. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BA và CA lấy hai điểm D và E , sao cho $BD = CE$.

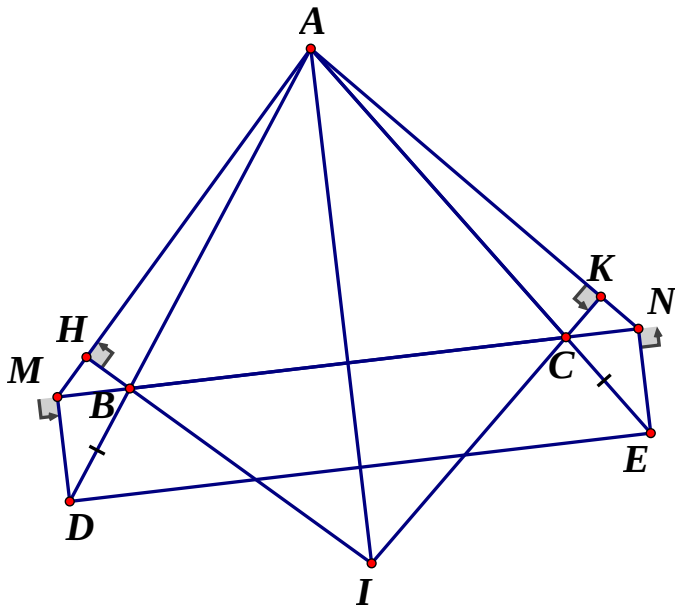
e) Chứng minh $DE \parallel BC$

f) Từ D kẻ DM vuông góc với BC , từ E kẻ EN vuông góc với BC . Chứng minh $DM = EN$.

g) Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân

h) Từ B và C kẻ các đường vuông góc với AM và AN chúng cắt nhau tại I . Chứng minh AI là tia phân giác chung của 2 góc BAC, MAN

Lời giải



a) Ta có: $AB = AC(gt)$ và

$$BD = CE(gt) \Rightarrow AD = AE$$

$\triangle ADE$ có $AD = AE$ nên là tam giác cân

Hai tam giác cân ABC và ADE có chung góc ở đỉnh A nên các góc ở đáy bằng nhau:

$$\angle ABC = \angle ADE \text{ mà } \angle ABC, \angle ADE \text{ là hai góc đồng vị} \Rightarrow DE \parallel BC$$

b) $\triangle ABC$ cân tại A : $\angle ABC = \angle ACB$

$$\text{Mà } \angle MBD = \angle ABC \text{ (đối đỉnh); } \angle NCE = \angle ACB \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \angle MBD = \angle NCE$$

Xét 2 tam giác vuông $\triangle DMB$ và $\triangle ENC$ có:

$$\angle MBD = \angle NCE(cmt); BD = CE(gt) \Rightarrow \triangle DMB = \triangle ENC(ch - gn) \Rightarrow DM = EN$$

c) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle ANE$ có: $AD = AE(cmt); \angle ADM = \angle AEN(\angle DMB = \angle ENC)$

$$DM = EN(cmt) \Rightarrow \triangle AMD = \triangle ANE(c.g.c) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN \text{ cân tại } A$$

d) $\triangle AMD = \triangle ANE(cmt) \Rightarrow \angle HAB = \angle KAC$

Xét 2 tam giác vuông: $\triangle HAB$ và $\triangle KAC$ có:

$$\angle HAB = \angle KAC; AB = AC(gt) \Rightarrow \triangle HAB = \triangle KAC(ch - gn) \Rightarrow AH = AK$$

Mặt khác: Xét 2 tam giác vuông $\triangle AHI$ và $\triangle AKI$ có:

$$AI \text{ cạnh chung; } AH = AK(cmt) \Rightarrow \triangle AHI = \triangle AKI(ch - cv)$$

Do đó $\angle IAH = \angle IAK$

Lại có: $\angle HAB = \angle KAC$ nên $\angle IAB = \angle IAC$

Vậy AI là tia phân giác chung của $\angle BAC, \angle MAN$

Bài 49. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

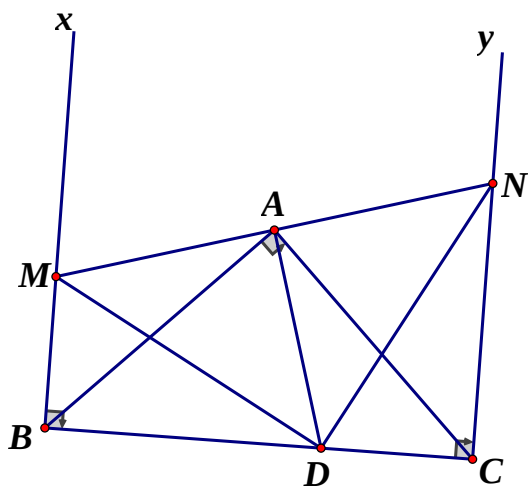
- A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

Đáp án C.

Bài 50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC (D khác B và C). Vẽ hai tia Bx, Cy vuông góc với BC và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa BC và điểm A . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AD cắt Bx tại M và cắt Cy tại N . Chứng minh:

- c) $\triangle AMB = \triangle ADC$.
d) A là trung điểm của MN .

Lời giải



- a) Theo giả thiết $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, mà $Bx \perp BC$ nên $\angle ABM = 45^\circ$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ADC$ có: $\angle ABM = \angle ACD (= 45^\circ)$

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân); $\angle MAB = \angle DAC$ (cùng phụ với $\angle BAD$) $\Rightarrow \triangle AMB = \triangle ADC$ (g.c.g)

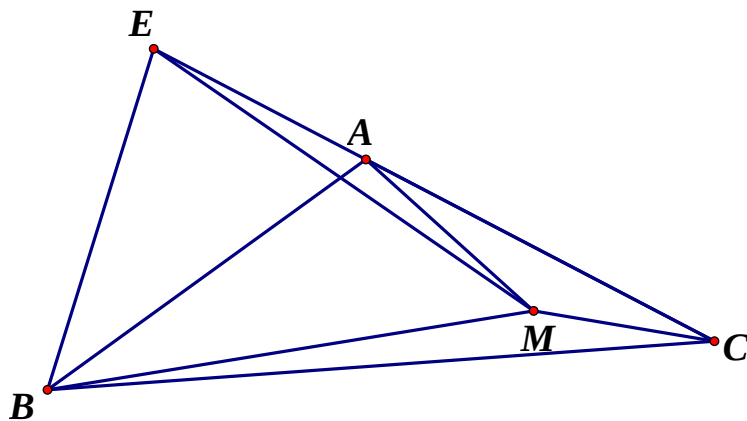
- b) Theo câu a, $\triangle AMB = \triangle ADC \Rightarrow AM = AD$, chứng minh tương tự câu a

Ta có: $\triangle ANC = \triangle ADB \Rightarrow AN = AD \Rightarrow AM = AN$

Vậy A là trung điểm của MN

Bài 51. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 100^\circ$. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle MBC = 10^\circ$; $\angle MCB = 20^\circ$. Tính $\angle AMB$.

Lời giải



Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $CE = CB$, suy ra $\triangle CBE$ cân đỉnh C , mà $\triangle ABC$ cân đỉnh A , có $A = 100^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = 40^\circ \Rightarrow \angle CBE = \angle CEB = 70^\circ$

Mà $\angle MBC = 10^\circ (gt) \Rightarrow \angle EBM = 60^\circ$

Lại có: $\angle MCB = 20^\circ \Rightarrow \angle MCE = 20^\circ$ (vì $\angle ACB = 40^\circ$)

$\Rightarrow \triangle CMB = \triangle CME (c.g.c) \Rightarrow ME = MB$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $\angle EBM = 60^\circ \Rightarrow \triangle EMB$ đều $\Rightarrow BE = BM$ (1)

Mặt khác: Do $\angle EBM = 60^\circ$ mà $\angle ABM = \angle ABC - \angle MBC = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle ABE = \angle ABM = 30^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EBA = \triangle MBA (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle AMB = \angle AEB$. Mà $\angle AEB = 70^\circ \Rightarrow \angle AMB = 70^\circ$. Vậy $\angle AMB = 70^\circ$

Bài 52.

3. Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho

$\angle KBC = 10^\circ, \angle KCB = 30^\circ$.

c) Chứng minh $BA = BK$

d) Tính số đo $\angle BAK$

4. Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

d) K là trung điểm của AC

e) $\triangle KMC$ là tam giác đều

f) Cho $BK = 2cm$. Tính các cạnh $\triangle AKM$.

Lời giải

1.

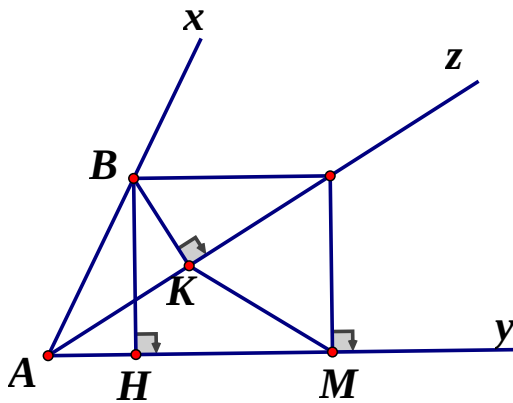
Vẽ tia phân giác ABK cắt CK ở I , ta có: $\triangle IBC$ cân nên $IB = IC$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \triangle BIA = \triangle CIA (c.c.c) \Rightarrow \angle BIA = \angle CIA = 120^\circ,$$

$$\text{do đó } \triangle BIA = \triangle BIK (g.c.g) \Rightarrow BA = BK$$

a) Từ phần a ta tính được $\angle BAK = 70^\circ$.

2)



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $CAB = ACB (= MAC)$ và BK là đường cao nên BK là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC.

b) $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $MCB = 90^\circ$ và $ACB = 30^\circ \Rightarrow MCK = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4cm$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

Theo phần b) $AB = BC = 4; AH = BK = 2; HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)
 $\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

Bài 53. Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC và CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$

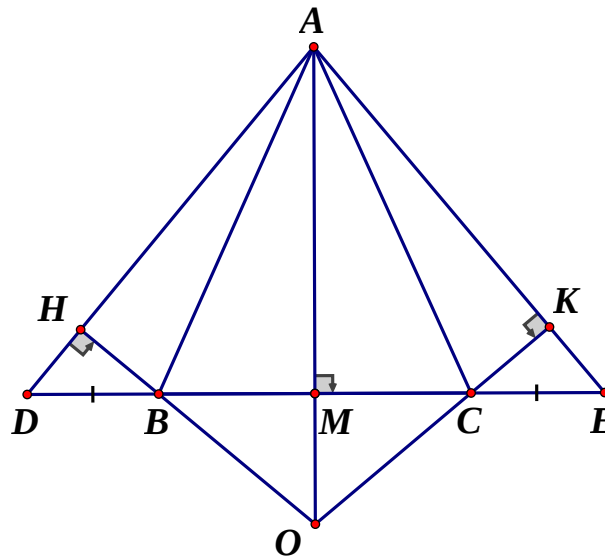
e) Chứng minh $\triangle ADE$ cân

f) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM là tia phân giác của DAE

g) Từ B và C kẻ $BH \perp AD; CK \perp AE$. Chứng minh: $BH = CK$

h) Chứng minh AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm

Lời giải

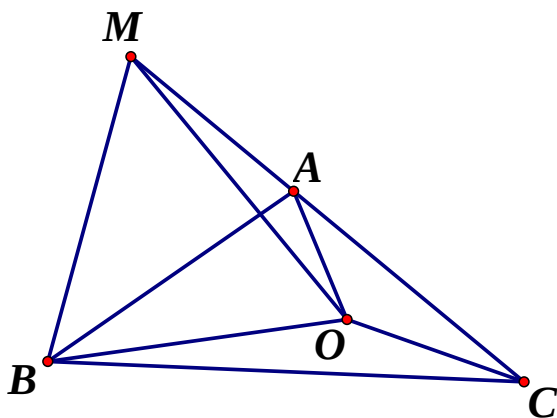


- d) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ACE (c.g.c) \Rightarrow$ Kết luận
- e) Chứng minh $\triangle MAD = \triangle MAE (c.c.c) \Rightarrow$ Kết luận
- f) Chứng minh $\triangle BHD = \triangle CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow$ Kết luận
- g) Gọi giao điểm của BH và CK là O . Chứng minh AO là tia phân giác của DAE mà AM là phân giác của $DAE (cmt) \Rightarrow$ Kết luận

Bài 54. Cho tam giác ABC cân tại A , có $A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của C sao cho $CBO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh rằng:

- c) Ba điểm C, A, M thẳng hàng
- d) Tam giác AOB cân.

Lời giải



- a) $\triangle ABC$ cân tại $A, A = 108^\circ \Rightarrow B = C = 36^\circ, OCA = OCB = 18^\circ$

Xét $\triangle BOC$ có $BOC = 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ$

$$BOM = 60^\circ \Rightarrow MOC = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle MOC (c.g.c) \Rightarrow OCM = OCB = 18^\circ$$

Mà $OCA = 18^\circ$ nên hai tia CM, CA trùng nhau, do đó 3 điểm C, O, M thẳng hàng.

b) $\triangle CBM$ có $CM = CB \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại C ; $C = 36^\circ$

$$\Rightarrow CBM = CMB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

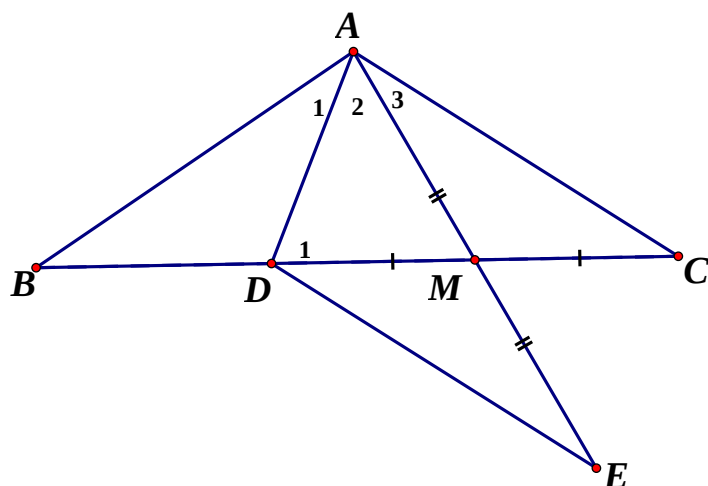
$$BAM = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

Vậy $\triangle BAM$ cân tại $B \Rightarrow BA = BM = BO \Rightarrow \triangle AOB$ cân tại B

Bài 55. Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$. Chứng

minh rằng $BAD < \frac{1}{2}CAD$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

Ta có hai tam giác AMC và EMD bằng nhau

Vì $MD = MC, MA = ME, \angle AMC = \angle EMD$ nên

Mặt khác: $\angle D_1 = \angle B$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà $\angle B = \angle C$ (vì $\triangle ABC$ cân, đáy BC) nên $\angle D_1 > \angle C \Rightarrow AC > AD$

Từ đó $DE > DA \Rightarrow \angle A_2 > \angle DEM$ hay $\angle A_2 > \angle A_3$

Vì $\angle A_3 = \angle A_1$ (do $\triangle ABD = \triangle ACM$)

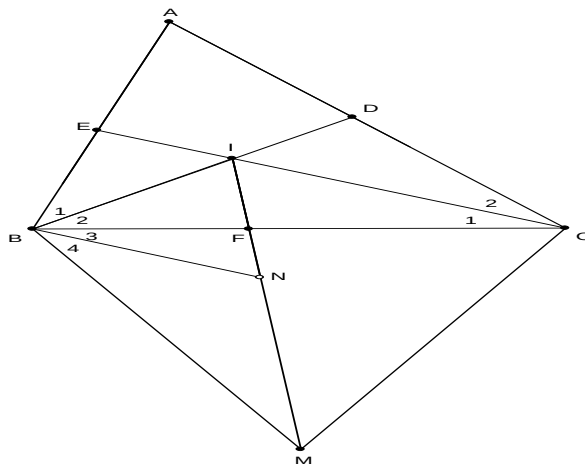
Nên $\angle A_2 + \angle A_3 > \angle A_1 + \angle A_3$ hay $2\angle A_1 < \angle A_2 + \angle A_3 \Rightarrow \angle BAD < \frac{1}{2}\angle CAD$

Bài 56: Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc A bằng 60° . Phân giác ABC cắt AC tại D , phân giác ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I .

a) Tính số đo góc BIC .

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIE$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.



Lời giải

a) BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{1}{2} \angle ABC$

CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \angle ACB$

Mà tam giác ABC có $A + B + C = 180^\circ$ suy ra $60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow B_2 + C_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$$

b) $\triangle BIE = \triangle BIF$ (c.g.c) $\Rightarrow BIE = BIF$

$$\angle BIC = 120^\circ \Rightarrow BIE = 60^\circ \Rightarrow BIE = BIF = 60^\circ$$

$$\text{Mà } BIE + BIF + CIF = 180^\circ \Rightarrow CIF = 60^\circ$$

$$\angle CID = BIE = 60^\circ \text{ (đ.đ)} \Rightarrow CIF = CID = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF \text{ (g.c.g)}$$

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IB = IN \Rightarrow NM = IC$

$$\Rightarrow \triangle BIN \text{ đều} \Rightarrow BN = BI \text{ và } \angle BNM = 120^\circ$$

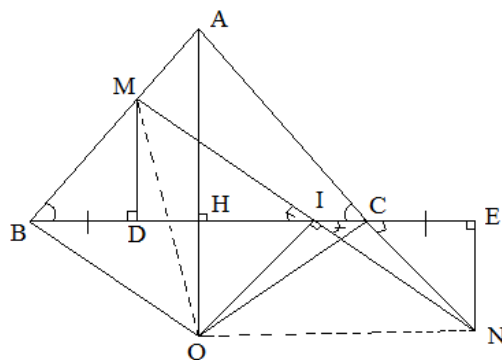
$$\Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BM = BC \text{ và } B_2 = B_4 \Rightarrow \triangle BCM \text{ đều}$$

Bài 57: Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN. Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC.



Lời giải

a) $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g)

$\Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

$\triangle MDI$ vuông tại D: $DMI + MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E: $ENI + NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $MID = NIE$ (đối đỉnh) nên $DMI = ENI$

$\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g)

$\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c)

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền.cạnh góc vuông)

$\Rightarrow HAB = HAC$ (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I.

$\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow OBA = OCA$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c)

$\Rightarrow OBM = OCN$ (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OCA = OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$.

Vậy điểm O cố định.

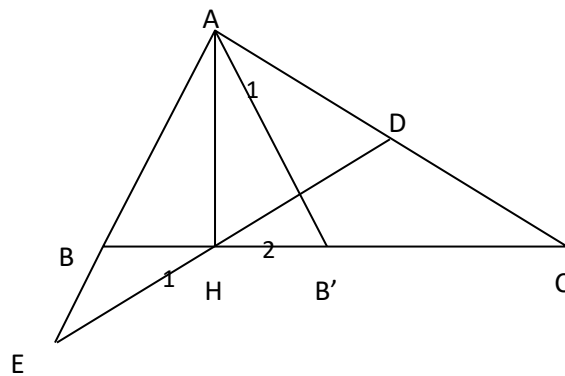
Bài 58: Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D.

a. Chứng minh $BEH = ACB$

b. Chứng minh $DH = DC = DA$.

c. Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân.

d. Chứng minh $AE = HC$.



a) BEH cân tại B nên góc E = góc H₁

$$\text{góc } ABC = \text{góc } E + \text{góc } H_1 = 2 \text{ góc } E$$

$$\text{góc } ABC = 2 \text{ góc } C \Rightarrow \text{góc } BEH = \text{góc } ACB$$

b) Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$.

$\triangle DAH$ có:

$$\text{góc } DAH = 90^\circ - \text{góc } C$$

$$\text{góc } DHA = 90^\circ - \text{góc } H_2 = 90^\circ - \text{góc } C$$

$\Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$.

c) $\triangle ABB'$ cân tại A nên góc B' = góc B = 2 góc C

$$\text{góc } B' = \text{góc } A_1 + \text{góc } C \text{ nên } 2 \text{ góc } C = \text{góc } A_1 + \text{góc } C$$

$$\Rightarrow \text{góc } C = \text{góc } A_1 \Rightarrow \triangle AB'C \text{ cân tại } B'$$

d) Ta có: $AB = AB' = CB'$

$$BE = BH = B'H$$

$$\text{Có: } AE = AB + BE$$

$$HC = CB' + B'H$$

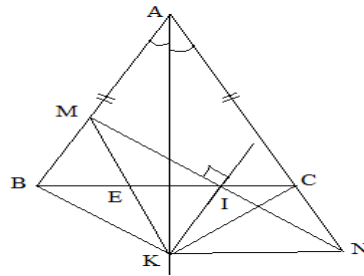
$$\Rightarrow AE = HC$$

Bài 59: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M. Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC.

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2\text{cm}$. Tính các cạnh $\triangle AKM$



Lời giải

a) Theo giả thiết, ta có:

$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

$$AM + AN = AM + AC + CN$$

$$\Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow AB = AC$$

$$\text{Do đó, từ } AM + AN = 2AB$$

$$\Rightarrow BM = CN$$

b) Qua M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$$\Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow \Delta BME \text{ cân ở } M \Rightarrow EM = BM = CN$$

$$\Rightarrow \Delta MEI = \Delta NCI \text{ (g-c-g)} \Rightarrow IM = IN$$

Vậy: BC đi qua trung điểm của MN.

c) + K thuộc đường trung trực của MN $\Rightarrow KM = KN$ (1)

$$+ \Delta ABK = \Delta ACK \text{ (c-g-c)} \Rightarrow KB = KC \text{ (2); } \hat{ABK} = \hat{ACK} \text{ (*)}$$

$$+ \text{Kết quả câu c/m câu a) } BM = CN \text{ (3)}$$

$$+ \text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \hat{ABK} = \hat{NCK} \text{ (**)}$$

$$+ \text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \hat{ACK} = \hat{NCK} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$$

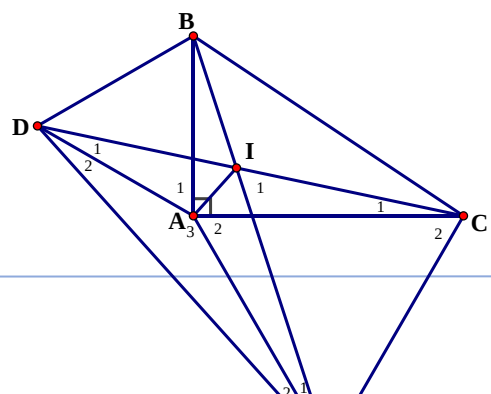
Bài 61: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $BE = CD$

b) ΔBDE là tam giác cân

c) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$

GT	$\Delta ABC, A = 90^\circ, \Delta ABD$ và ΔACE đều $I = BE \cap CD$
KL	a) $BE = CD$ b) ΔBDE là tam giác cân c) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$



$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A_1} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (GT)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (CM trên)}$$

$$AC = AE \text{ (GT)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow BE = CD \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{b) Ta có: } \widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{DAC} = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (GT)}$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{DAC} \text{ (CM trên)}$$

AE: Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow DE = BE \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle BDE \text{ là tam giác cân tại E}$$

$$\text{c) Ta có: } \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (CM câu a)} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Lại có: } \widehat{I_1} + \widehat{E_2} + \widehat{ICE} = 180^\circ \text{ (Tổng 3 góc trong } \triangle ICE)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + (\widehat{AEC} - \widehat{E_1}) + (\widehat{C_1} + \widehat{C_2}) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 60^\circ - \widehat{E_1} + \widehat{C_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I_1} + 120^\circ = 180^\circ \text{ (Vì } \widehat{E_1} = \widehat{C_1})}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I_1} = 60^\circ$$

$$\text{Vì } \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (Cm câu b)} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2} \text{ (Hai góc tương ứng)} \Rightarrow EA \text{ là tia phân giác của } \widehat{DEI} \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} \text{ (Hai góc tương ứng)} \Rightarrow DA \text{ là tia phân giác của } \widehat{EDC} \text{ (2)}$$

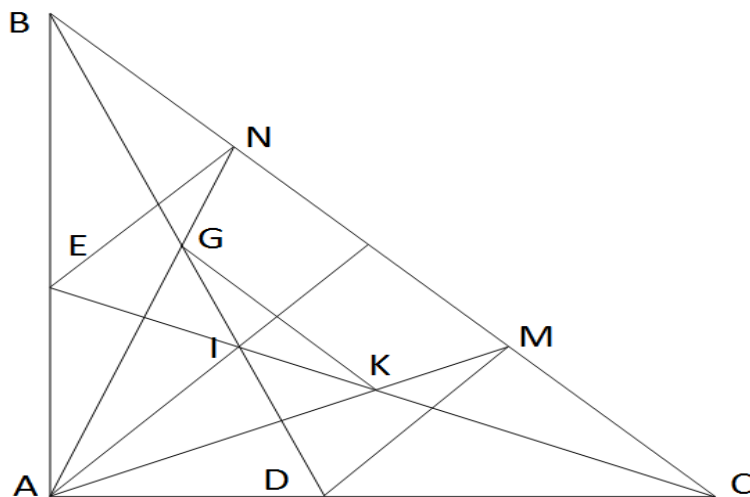
Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle DIE \Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

Bài 62: Cho tam giác ABC vuông ở A, có phân giác BD, CE cắt nhau ở I. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của D, E trên BC

c) Chứng minh tam giác ABM cân.

d) Chứng minh $MN = AB + AC - BC$

e) Tính góc MAN. Gọi G, K lần lượt là giao điểm của BD và AN; CE và AM. Tia AI cắt GK ở H. Tính góc AHG.



a) $\triangle ABD = \triangle MBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AB = AM \Rightarrow \triangle AMB$ cân ở B.

b) Ta có $\triangle AEC = \triangle NEC \Rightarrow CN = CA$

Khi đó $AB + AC = BM + CN = BM + MC + MN = BC + MN$

$\Rightarrow MN = AB + AC - BC$

c) Từ $\triangle AMB$ cân ở M $\Rightarrow \angle AMB = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}$

Từ $\triangle ANC$ cân ở N $\Rightarrow \angle ANC = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$

Trong $\triangle AMN$ có $\angle MAN = 180^\circ - \angle AMB - \angle ANC$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}) - (90^\circ - \frac{\angle ACB}{2})$$

$$= \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

(Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$)

Vậy $\angle MAN = 45^\circ$

d) Vì $\triangle AMB$ cân ở B nên đường phân giác BD đồng thời là đường cao $\Rightarrow BD \perp AM$ hay $GI \perp AK$

$\triangle ANC$ cân ở C $\Rightarrow$ đường phân giác CE đồng thời là đường cao $\Rightarrow CE \perp AN$ hay $KI \perp AG$

Trong $\triangle AKG$ có 2 đường cao xuất phát từ G, K cắt nhau ở I $\Rightarrow I$ là trực tâm của $\triangle AKG$.

$AI \perp GK$ ở H $\Rightarrow \angle AHG = 90^\circ$

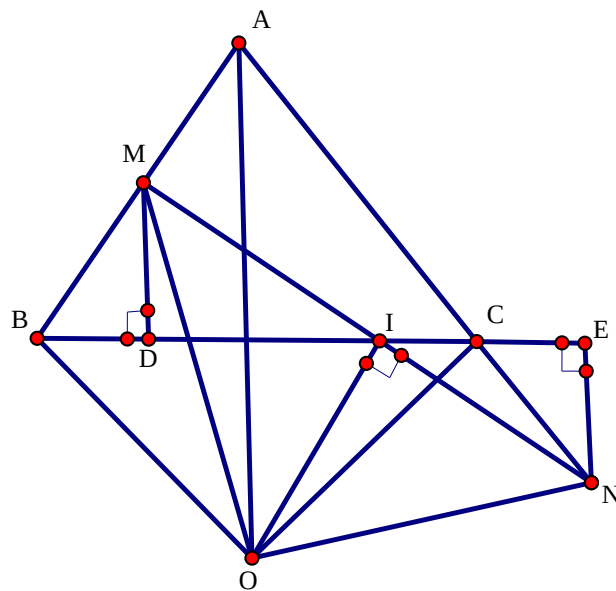
Bài 63: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB, lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M. Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N. MN cắt BC tại I.

4) Chứng minh rằng: $DM = EN$.

5) Chứng minh rằng $IM = IN$; $BC < MN$.

6) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I.

Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.



Lời giải

1) (1,5đ) Tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$; $\angle NCE = \angle ACB$; (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC (g.c.g) \Rightarrow DM = EN$

2) (1,5đ) Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI (g.c.g) \Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$.

Lại có $DI < MI$, $IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + IN = MN$

Suy ra $BC < MN$.

3) (1,5đ) Ta chứng minh được:

$\triangle ABO = \triangle ACO (c.g.c) \Rightarrow OC = OB, \angle ABO = \angle ACO$.

$\triangle MIO = \triangle NIO (c.g.c) \Rightarrow OM = ON$.

Lại có: $BM = CN$, do đó $\triangle BMO = \triangle CNO (c.c.c)$

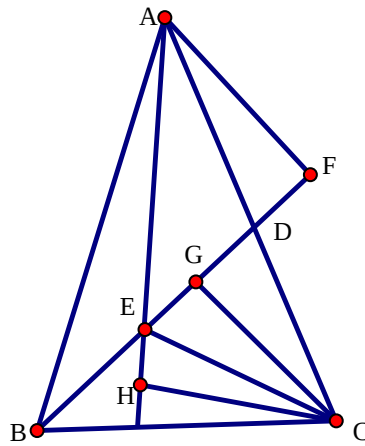
$\Rightarrow \angle MBO = \angle NCO$, Mà: $\angle MBO = \angle ACO$ suy ra $\angle NCO = \angle ACO$,

mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$.

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Bài 64: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho

$\angle DAE = \angle ABD$ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng $\angle DAE = \angle ECB$.



Lời giải

Vẽ AF vuông góc BD, CG vuông góc BD, CH vuông góc với AE. Ta có

$\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra: $AF = CH$.

$\triangle ADF = \triangle CDG$ (ch – gn) suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$.

$\triangle CEH = \triangle CEG$ (ch – cv) $\Rightarrow CEH = CEG$;

Mà $CEG = EBC + ECB$; $CEH = EAC + ECA$;

Do đó: $EBC + ECB = EAC + ECA$; (1)

Mặt khác: $EBA + EBC = ECB + ECA$; (2)

lấy (1) trừ (2) theo vế ta có:

$$ECB - EBA = EAC - ECB = EBA - ECB$$

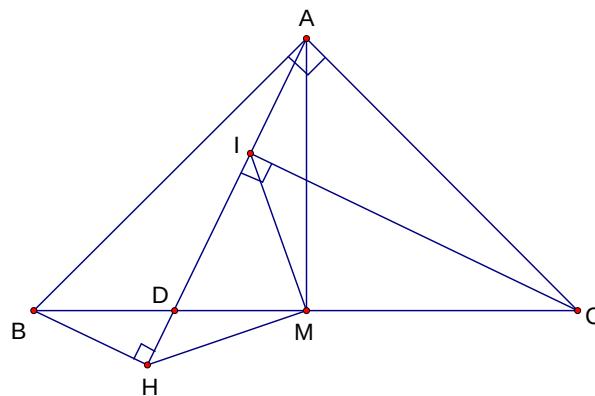
$$\Rightarrow EBA = ECB$$

Mà $DAE = ABD$ nên $DAE = ECB$.

Bài 65: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $BAM = ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân



a) * Chứng minh: $BAM = ACM$

+ Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

+ Lập luận được: $BAM = CAM = 45^\circ$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

+ Tính ra được $\angle ACM = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle BAM = \angle ACM$

* Chứng minh: $BH = AI$.

+ Chỉ ra: $\angle BAH = \angle ACI$ (cùng phụ $\angle DAC$)

+ Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Tam giác MHI vuông cân.

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

+ Chứng minh được $AM = MC$

+ Chứng minh được $\angle HAM = \angle ICM$

+ Chứng minh được $\triangle HAM = \triangle ICM$ (c-g-c)

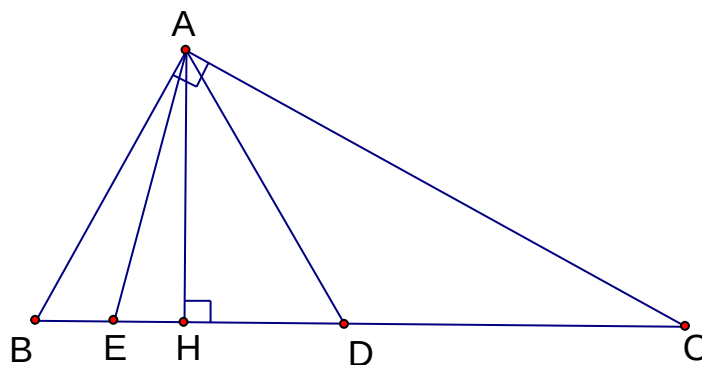
$\Rightarrow HM = MI$ (*)

+ Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow \angle HMA = \angle ICM \Rightarrow \angle HMB = \angle IMA$ (do $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$)

+ Lập luận được: $\angle HMI = 90^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle MHI$ vuông cân

Bài 66: Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E . Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.



Lời giải

+ Chứng minh được :

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE = \angle HAD + \angle DAC + \angle BAE = \angle EAH + \angle HAD + \angle DAC = \angle EAC$$

(Vì $\angle B$ và $\angle HAC$ cùng phụ với $\angle BAH$)

Suy ra tam giác AEC cân tại $C \Rightarrow AC = CE$ (*)

+ Tương tự chứng minh được $AB = BD$ (**)

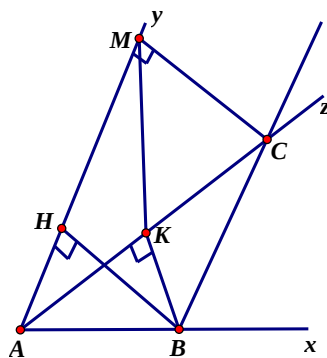
+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$

Bài 67: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Kẻ $BH \perp Ay$ tại H , $CM \perp Ay$ tại M , $BK \perp AC$ tại K . Chứng minh:

a) $KC = KA$

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều.



Lời giải

a) Chứng minh: $KC = KA$

Ta có $yAz = zAx = 30^\circ$ (Az là tia phân giác của xAy)

Mà: $yAz = ACB$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)

$\Rightarrow zAx = ACB \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy

$\Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow KC = KA$

b) Chứng minh: $BH = \frac{AC}{2}$

Ta có: $ABH = 90^\circ - xAy = 30^\circ$ ($\triangle ABH$ vuông tại H).

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$, có:

AB : Cạnh chung; $zAx = ABH (= 30^\circ)$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK$

Mà: $AK = \frac{AC}{2}$ (cmt) $\Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$

c) Chứng minh: $\triangle KMC$ đều

Ta có: $\triangle AMC$ vuông tại M có MK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow KM = AC/2$ (1)

Mà: $AK = KC = AC/2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K (3)

Mặt khác: $\triangle AMC$ có $AMC = 90^\circ$; $yAz = 30^\circ \Rightarrow MCK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (4)

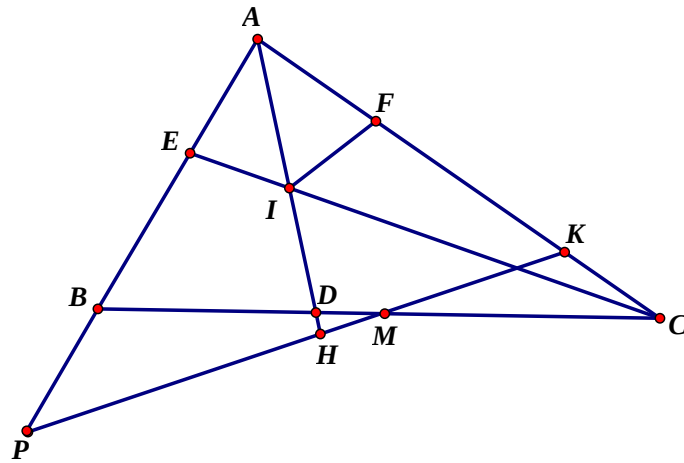
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle AMC$ đều

Bài 68: Cho tam giác ABC ($AB < AC$, góc $B = 60^\circ$). Hai phân giác AD và CE của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I, từ trung điểm M của BC kẻ đường vuông góc với đường phân giác AI tại H, cắt AB ở P, cắt AC ở K.

a) Tính AIC

b) Tính độ dài cạnh AK biết $PK = 6cm$, $AH = 4cm$.

c) Chứng minh $\triangle IDE$ cân

**Lời giải**

a/ Ta có $\angle ABC = 60^\circ$ suy ra $\angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

AD là phân giác của $\angle BAC$ suy ra $\angle IAC = \frac{1}{2} \angle BAC$

CE là phân giác của $\angle ACB$ suy ra $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

Suy ra $\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

Vậy $\angle AIC = 120^\circ$

b/ Xét $\triangle AHP$ và $\triangle AHK$ có

$\angle PAH = \angle KAH$ (AH là phân giác của $\angle BAC$)

AH chung

$\angle PHA = \angle KHA = 90^\circ$

Suy ra $\triangle AHP = \triangle AHK$ (g-c-g) suy ra $PH = KH$ (2 cạnh tương ứng). Vậy $HK = 3\text{cm}$

Vì $\triangle AHK$ vuông ở H theo định lý Pitago ta có

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

Suy ra $AK = 5\text{ cm}$

Vì $\angle AIC = 120^\circ$

Do đó $\angle AIE = \angle DIC = 60^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$

Xét $\triangle EAI$ và $\triangle FAI$ có

$AE = AF$

$\angle EAI = \angle FAI$

AI chung

Vậy $\triangle EAI = \triangle FAI$ (c-g-c)

suy ra $IE = IF$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$\angle AIE = \angle AIF = 60^\circ$ suy ra $\angle FIC = \angle AIC - \angle AIF = 60^\circ$

Xét $\triangle DIC$ và $\triangle FIC$ có

$\angle DIC = \angle FIC = 60^\circ$

Cạnh IC chung

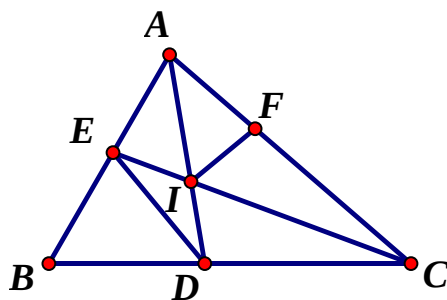
$\angle DIC = \angle FCI$

Suy ra $\triangle DIC = \triangle FIC$ (g-c-g)

Suy ra $ID = IF$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IDE$ cân tại I

Bài 69: Cho tam giác ABC ($AB < AC$, $B = 60^\circ$). Hai tia phân giác AD ($D \in BC$) và CE ($E \in AB$) của $\triangle ABC$ cắt nhau ở I. Chứng minh $\triangle IDE$ cân.



Lời giải

Ta có $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

AD là phân giác của $\angle BAC$ suy ra $\angle IAC = \frac{1}{2} \angle BAC$

CE là phân giác của $\angle ACB$ suy ra $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

Suy ra $\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle AIC = 120^\circ$

Do đó $\angle AIE = \angle DIC = 60^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$

Xét $\triangle EAI$ và $\triangle FAI$ có:

$AE = AF$

$\angle EAI = \angle FAI$

AI chung

Vậy $\triangle EAI = \triangle FAI$ (c-g-c)

suy ra $IE = IF$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$\angle AIE = \angle AIF = 60^\circ \Rightarrow \angle FIC = \angle AIC - \angle AIF = 60^\circ$

Chứng minh $\triangle DIC = \triangle FIC$ (g-c-g)

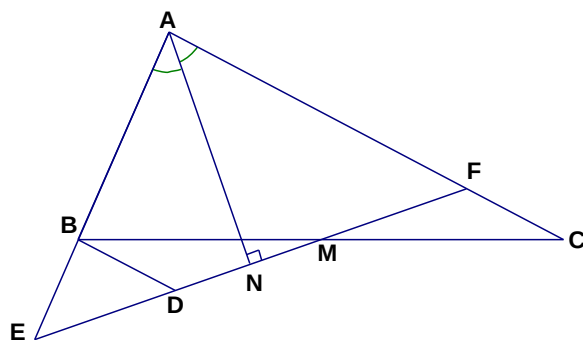
Suy ra $ID = IF$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle IDE$ cân tại I

Bài 70: Cho tam giác ABC có ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N, cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng :

a/ $BE = CF$

b/ $AE = \frac{AB + AC}{2}$



Lời giải

a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt EF tại D.

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCF$ có : $DBM = FCM$ (so le trong)

$MB = MC$ (giả thiết) ; $BMD = CMF$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MBD = \triangle MCF$ (c.g.c) suy ra $BD = CF$ (1)

Mặt khác : $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại A, suy ra

$E = MFA$. Mà $BDE = MFA$ (đồng vị) nên $BDE = E$

Do đó: $\triangle BDE$ cân tại B, suy ra $BD = BE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $BE = CF$ (đpcm)

b) Tam giác AEF cân tại A suy ra $AE = AF$

Ta có: $2AE = AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF)$

$= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC$ (do $BE = CF$)

Vậy $AE = \frac{AB + AC}{2}$ (đpcm)

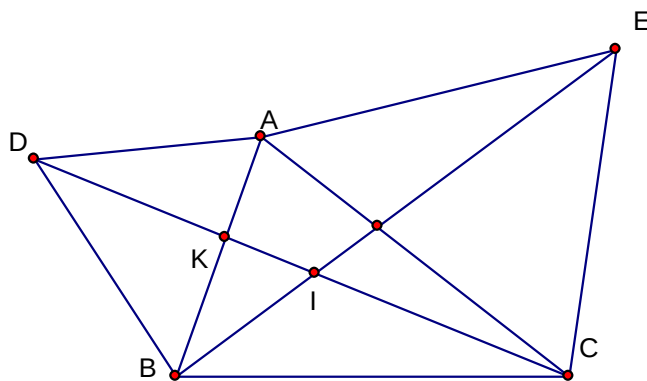
Bài 71: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC \cong \triangle ABE$.

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.



Lời giải

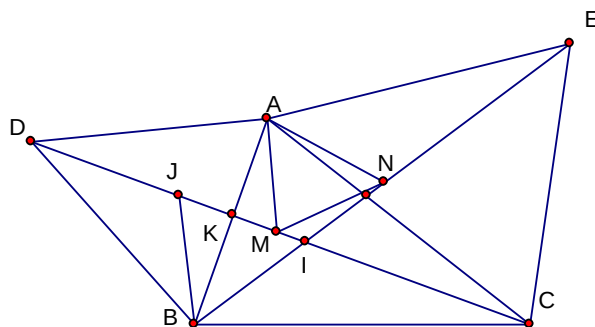
a) Ta có: $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$,

mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh).

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)



c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều.

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra

$\angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

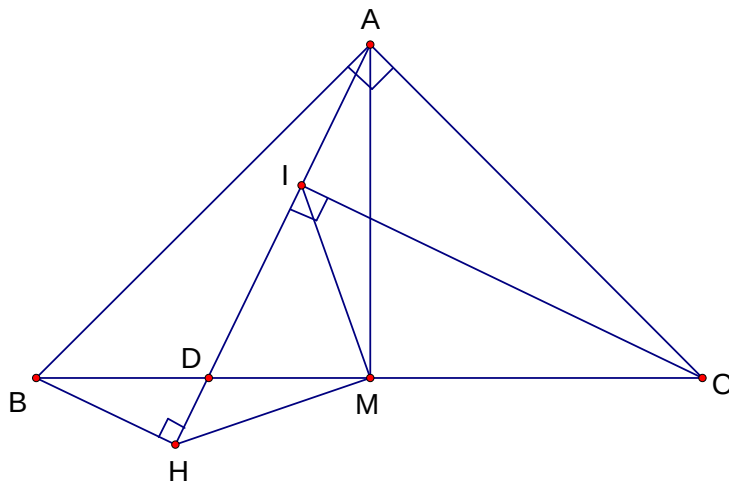
$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Bài 72: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I. Chứng minh rằng:

a) $\angle BAM = \angle ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

Lời giải



1)

a) * Chứng minh: $\angle BAM = \angle ACM$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

+ Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

+ Lập luận được: $\angle BAM = \angle CAM = 45^\circ$

+ Tính ra được $\angle ACM = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle BAM = \angle ACM$

* Chứng minh: $BH = AI$.

+ Chỉ ra: $\angle BAH = \angle ACI$ (cùng phụ $\angle DAC$)

+ Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHA$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Tam giác MHI vuông cân.

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

+ Chứng minh được $AM = MC$

+ Chứng minh được $\angle HAM = \angle ICM$

+ Chứng minh được $\triangle HAM = \triangle ICM$ (c-g-c)

$\Rightarrow HM = MI$

(*)

+ Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow \angle HMA = \angle ICM \Rightarrow \angle HMB = \angle IMA$ (do $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$)

+ Lập luận được: $\angle HMI = 90^\circ$

(**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle MHI$ vuông cân

Bài 73: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

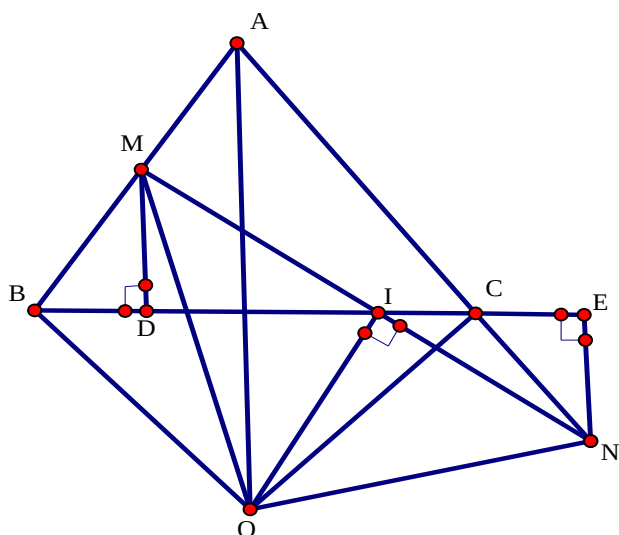
1. Chứng minh $DM = EN$.

2. Chứng minh $IM = IN$, $BC < MN$.

3. Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I .

Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định

Giải



1. Tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB$; $NCE = ACB$; (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC(g.c.g) \Rightarrow DM = EN$.

2. Ta có $\triangle MDI = \triangle NEI(g.c.g) \Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$.

Lại có $DI < MI$, $IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + IN = MN$

Suy ra $BC < MN$.

3) Ta chứng minh được:

$\triangle ABO = \triangle ACO(c.g.c) \Rightarrow OC = OB, ABO = ACO$.

$\triangle MIO = \triangle NIO(c.g.c) \Rightarrow OM = ON$.

Ta lại có: $BM = CN$. Do đó $\triangle BMO = \triangle CNO(c.c.c)$

$\Rightarrow MBO = NCO$, Mà: $MBO = ACO$ suy ra $NCO = ACO$, mà đây là hai góc kề bù nên $CO \perp AN$.

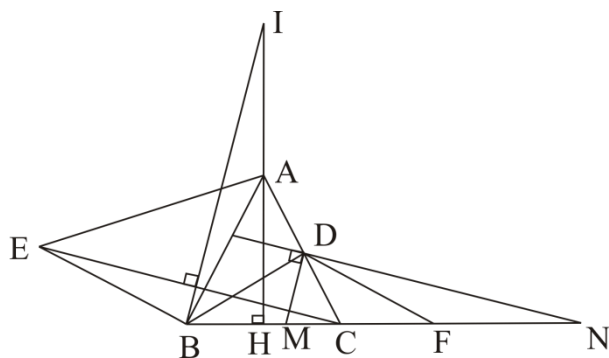
Vì tam giác ABC cho trước, O là giao của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Bài 74: Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

1, Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B. Gọi H là trung điểm của BC, trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$.

2, Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M. Phân giác của góc BDA cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $BD = \frac{1}{2}MN$.

Giải:



1) + Xét hai tam giác AIB và BCE

Có $AI=BC$ (gt)

$$BE=BA \text{ (gt)}$$

+ Góc IAB là góc ngoài của tam giác ABH nên $IAB = ABH + AHB = ABH + 90^\circ$

+ Ta có $EBC = EBA + ABC = ABC + 90^\circ$. Do đó $IAB = EBC$.

+ Do đó $\triangle ABI = \triangle BEC$ (c - g - c)

+ Do $\triangle ABI = \triangle BEC$ (c - g - c) nên $AIB = BCE$.

+ Trong tam giác vuông IHB vuông tại H có $AIB + IBH = 90^\circ$.

Do đó $BCE + IBH = 90^\circ$.

KL: CE vuông góc với BI .

2) + Do tính chất của đường phân giác, ta có $DM \perp DN$.

+ Gọi F là trung điểm của MN . Ta có $FM = FD = FN$.

+ Tam giác FDM cân tại F nên $FMD = MDF$.

$$FMD = MBD + BDM \text{ (góc ngoài tam giác)}$$

$$= MBD + CDM$$

$$\text{Suy ra } MBD = CDF \text{ (1)}$$

$$\text{Ta có } MCD = CDF + CFD \text{ (2)}$$

$$\text{Do tam giác } ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } MCD = 2MBD \text{ (3)}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MBD = DFC$ hay tam giác DBF cân tại D . Do đó $BD = DF = \frac{1}{2}MN$

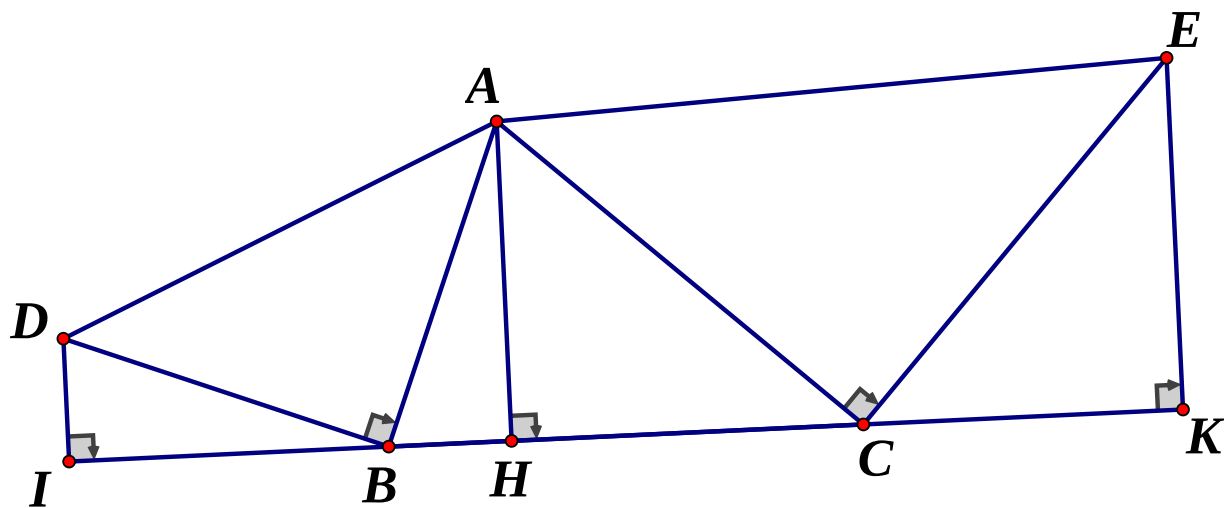
Bài 75:

Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH, DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng $BC, (H, I, K \in BC)$.

a) Chứng minh : $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$

b) Tính độ dài AH biết $AB = 3cm, BC = 5cm$. và 3 điểm D, A, E thẳng hàng.

Giải



- a) Chứng minh $\triangle BDI = \triangle ABH$; $\triangle CKE = \triangle AHC$ (ch – gn), từ đó suy ra:

$$DI + EK = BH + HC = BC$$

- b) $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 45^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông tại A dùng pytago tính được: $AC = 4\text{cm}$

Ta có $2S_{ABC} = AB.AC = BC.AH \Rightarrow AH = 2,4\text{cm}$

Bài 76: Cho tam giác ABC vuông tại A ; K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$

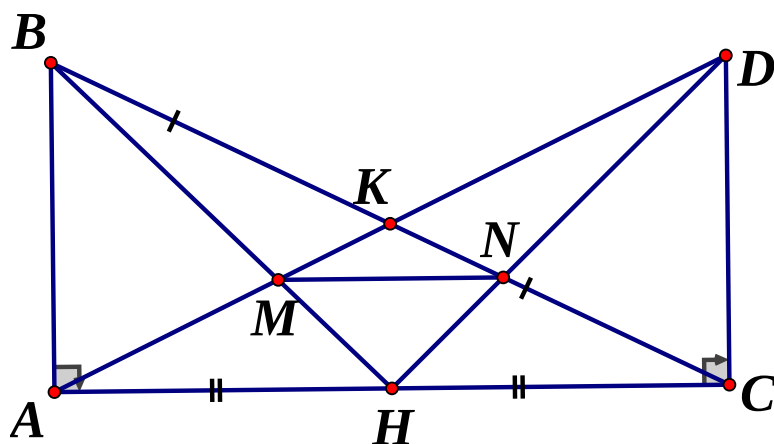
- a) Chứng minh $CD \parallel AB$

- b) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M ; DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng:

$$\triangle ABH = \triangle CDH$$

- c) Chứng minh $\triangle HMN$ cân

Lời giải:



- a) Xét 2 tam giác $\triangle ABK$ và $\triangle DCK$ có:

$$BK = CK (gt); \angle BKA = \angle CKD (\text{đối đỉnh}); AK = CK (gt) \Rightarrow \triangle ABK = \triangle DCK (c.g.c)$$

$$\Rightarrow DCK = DBK; \text{ mà } ABC + ACB = 90^\circ \Rightarrow ACD = ACB + BCD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow ACD = 90^\circ = BAC \Rightarrow AB \parallel CD (AB \perp AC, CD \perp AC)$$

b) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABH$ và $\triangle CDH$ có:

$$BA = CD (\text{do } \triangle ABK = \triangle DCK); AH = CH (gt) \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDH (c.g.c)$$

c) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$$AB = CD; ACD = 90^\circ = BAC, AC \text{ cạnh chung} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA (c.g.c) \Rightarrow ACB = CAD$$

$$\text{Mà } AH = CH (gt) \text{ và } MHA = NHC (\triangle ABH = \triangle CDH)$$

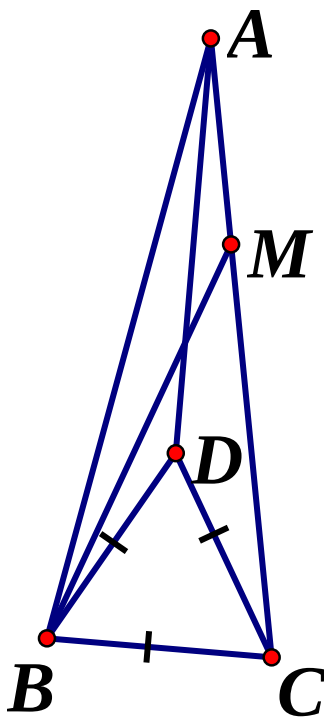
$$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle CNH (g.c.g) \Rightarrow MH = NH. \text{ Vậy } \triangle HMN \text{ cân tại H.}$$

Bài 77: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của ABD cắt AC tại M . Chứng minh:

a) Tia AD là phân giác của BAC

b) $AM = BC$.

Lời giải



c) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC (c.c.c) \Rightarrow DAB = DAC$, do đó $DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$

d) $\triangle ABC$ cân tại A , mà $A = 20^\circ (gt)$ nên $ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $DBC = 60^\circ$, tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$. Tia BM là phân giác của ABD nên $ABM = 10^\circ$

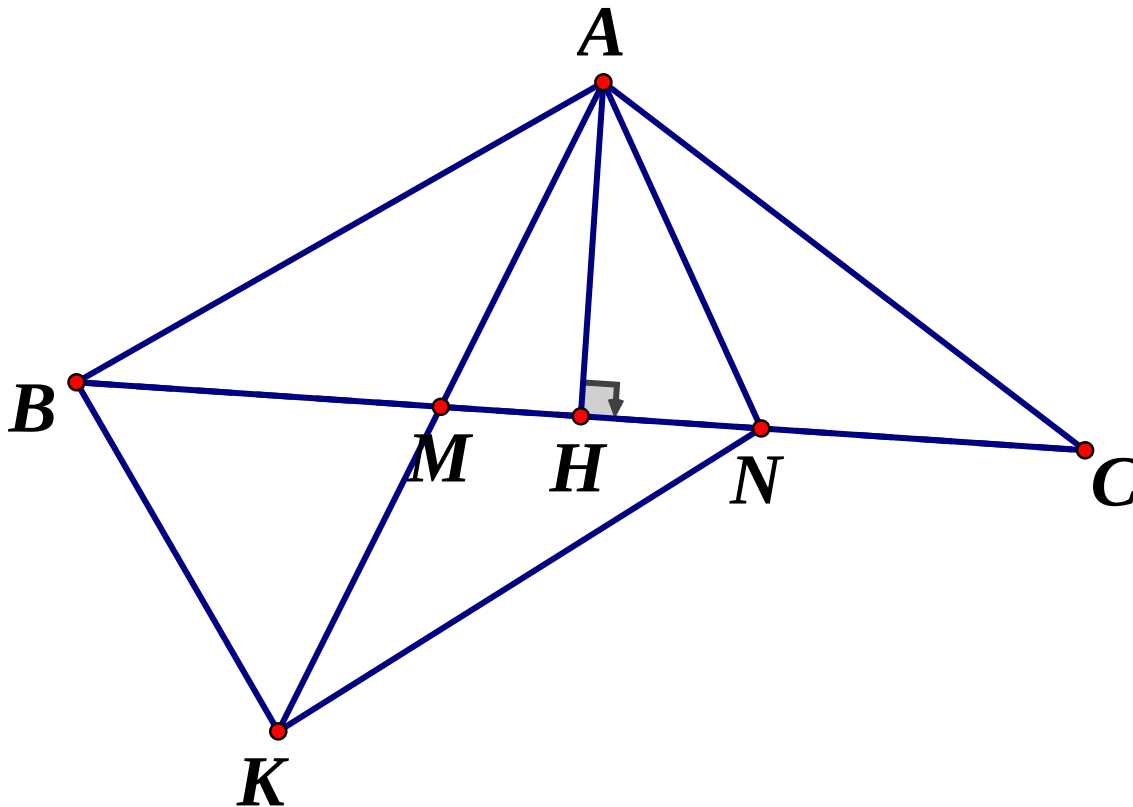
Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có: AB cạnh chung, $BAM = ABD = 20^\circ$; $ABM = DAB = 10^\circ$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD (g.c.g) \Rightarrow AM = BD$, mà $BD = BC (gt) \Rightarrow AM = BC$

Bài 78: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC

- a) Chứng minh : $AM = AN$ và $AH \perp BC$
- b) Tính độ dài đoạn thẳng AM khi $AB = 5cm, BC = 6cm$
- c) Chứng minh $MAN > BAM = CAN$

Lời giải

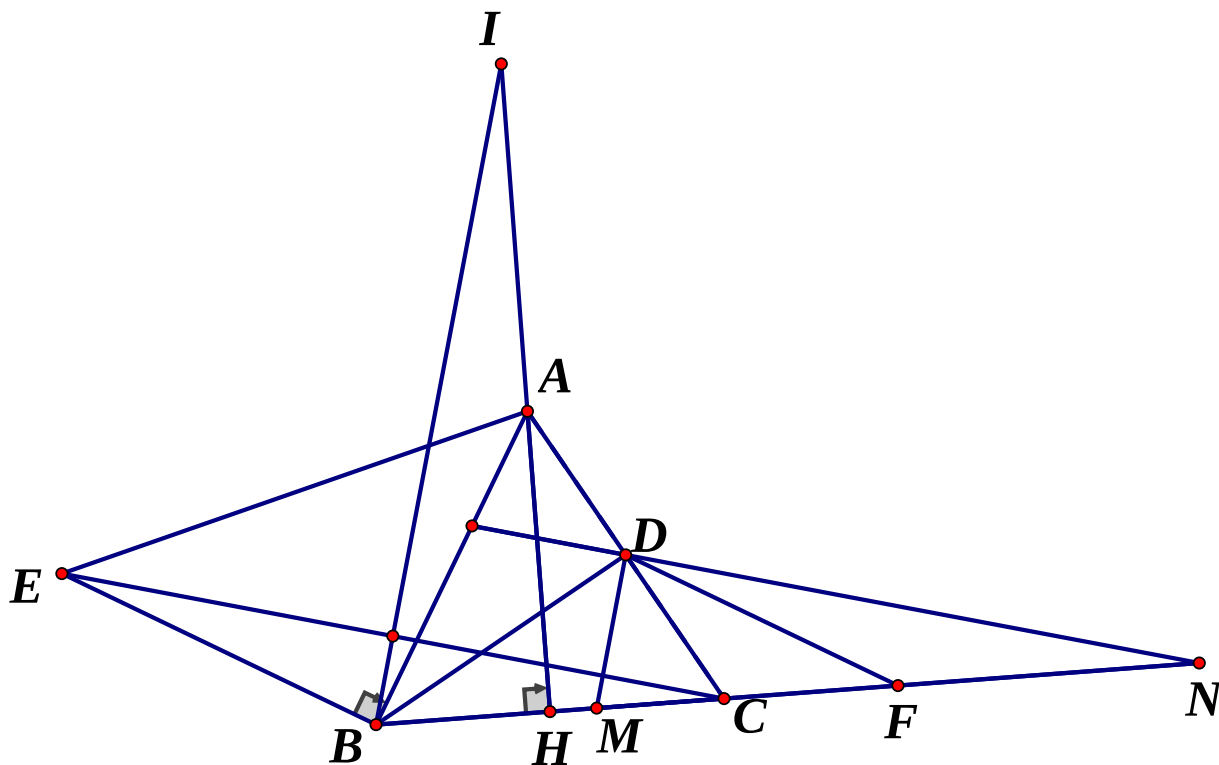


- a) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN (c.g.c) \Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$
- b) Tính $AH : AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4cm$
- Tính $AM : AM^2 = AH^2 + HM^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow AM = \sqrt{17}cm$
- c) Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = MN$, suy ra $\triangle AMN = \triangle KMB$
- $\Rightarrow \angle MAN = \angle BKM$ và $AN = AM = BK$. Do $BA > AM \Rightarrow BA > BK$
- $\Rightarrow \angle BKA > \angle BAK \Rightarrow \angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$
- d) Chứng minh $MAN > BAM = CAN$

Bài 79: Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn

- 1) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$
- 2) Phân giác của các góc ABC, BDC cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc BDA cắt BC tại N . Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$

Lời giải



3) Xét hai tam giác AIB và BCE có: $AI = BC$; $BE = BA$

Góc IAB là góc ngoài của $\triangle ABH$ nên: $IAB = ABH + AHB = ABH + 90^\circ$

Ta có: $EBC = EBA + ABC = ABC + 90^\circ \Rightarrow IAB = EBC$

Do đó: $\triangle ABI = \triangle BEC$ (c.g.c)

Do $\triangle ABI = \triangle BEC \Rightarrow AIB = BCE$

Trong tam giác vuông IHB vuông tại H có: $AIB + IBH = 90^\circ$

Do đó: $BCE + IBH = 90^\circ$

Vậy CE vuông góc với BI

4) Do tính chất của đường phân giác, ta có: $DM \perp DN$

Gọi F là trung điểm của MN . Ta có: $FM = FD = FN$

Tam giác FDM cân tại F nên $FMD = MDF$

$FMD = MBD + BDM$ (góc ngoài của tam giác)

$= MBD + CDM \Rightarrow MBD = CDF$ (1)

Ta có: $MCD = CDF + CFD$ (2)

Do tam giác ABC cân tại A nên $MCD = 2MBD$ (3)

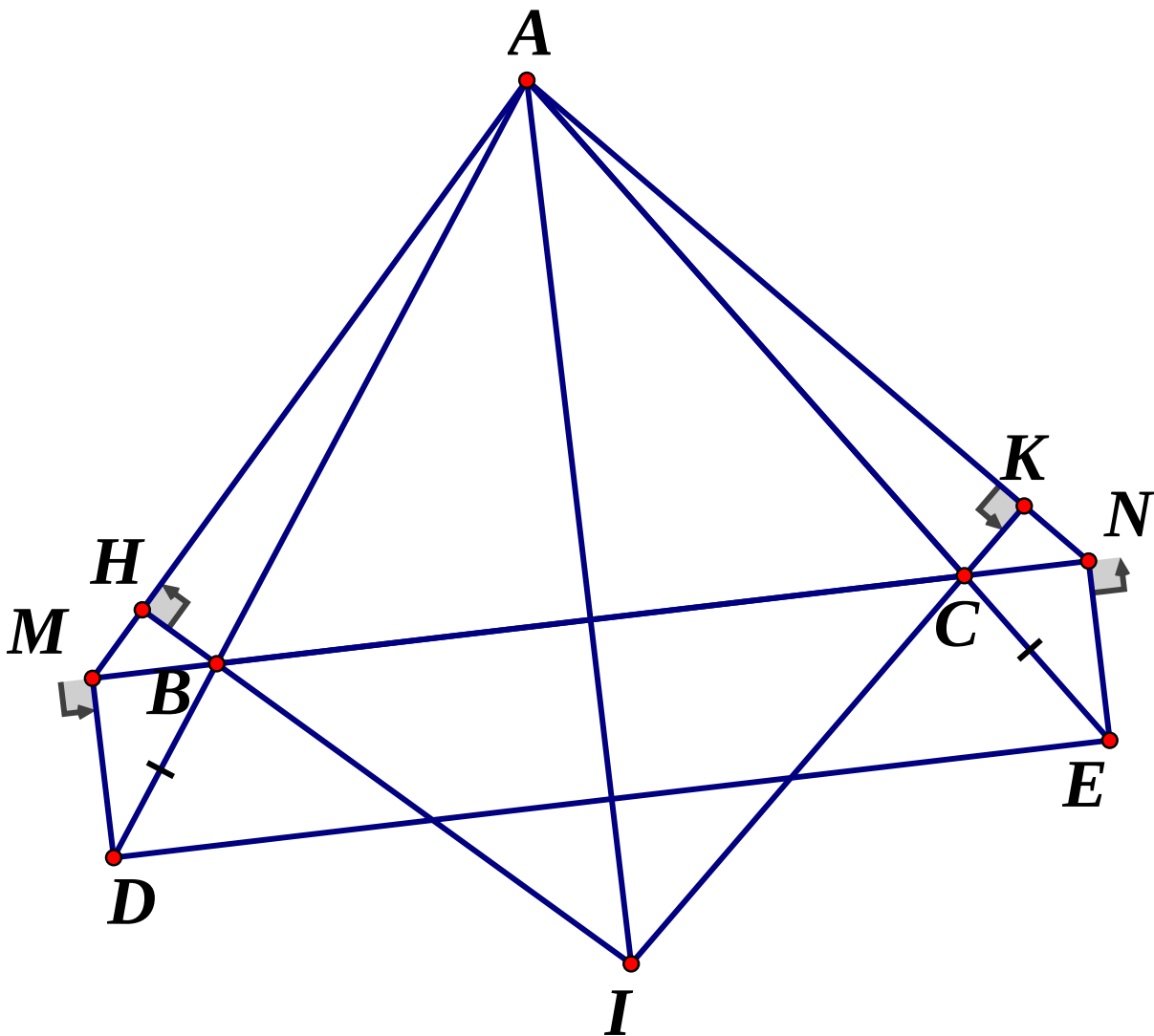
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow MBD = DFC$ hay tam giác DBF cân tại D.

Do đó: $BD = DF = \frac{1}{2}MN$

Bài 80. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BA và CA lấy hai điểm D và E , sao cho $BD = CE$.

- e) Chứng minh $DE \parallel BC$
- f) Từ D kẻ DM vuông góc với BC , từ E kẻ EN vuông góc với BC . Chứng minh $DM = EN$.
- g) Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân
- h) Từ B và C kẻ các đường vuông góc với AM và AN chúng cắt nhau tại I . Chứng minh AI là tia phân giác chung của 2 góc BAC, MAN

Lời giải



- e) Ta có: $AB = AC$ (gt) và $BD = CE$ (gt) $\Rightarrow AD = AE$

$\triangle ADE$ có $AD = AE$ nên là tam giác cân

Hai tam giác cân ABC và ADE có chung góc ở đỉnh A nên các góc ở đáy bằng nhau:

$$\angle ABC = \angle ADE \text{ mà } \angle ABC, \angle ADE \text{ là hai góc đồng vị} \Rightarrow DE \parallel BC$$

f) $\triangle ABC$ cân tại A: $ABC = ACB$

Mà $MBD = ABC$ (đối đỉnh); $NCE = ACB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow MBD = NCE$

Xét 2 tam giác vuông $\triangle DMB$ và $\triangle ENC$ có:

$MBD = NCE$ (cmt); $BD = CE$ (gt) $\Rightarrow \triangle DMB = \triangle ENC$ (ch - gn) $\Rightarrow DM = EN$

g) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle ANE$ có: $AD = AE$ (cmt); $ADM = AEN$ ($\triangle DMB = \triangle ENC$)

$DM = EN$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

h) $\triangle AMD = \triangle ANE$ (cmt) $\Rightarrow HAB = KAC$

Xét 2 tam giác vuông: HAB và KAC có:

$HAB = KAC$; $AB = AC$ (gt) $\Rightarrow \triangle HAB = \triangle KAC$ (ch - gn) $\Rightarrow AH = AK$

Mặt khác: Xét 2 tam giác vuông AIH và AIK có:

AI cạnh chung; $AH = AK$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AHI = \triangle AKI$ (ch - cv)

Do đó $IAH = IAK$

Lại có: $HAB = KAC$ nên $IAB = IAC$

Vậy AI là tia phân giác chung của BAC, MAN .

Dạng 2. Tam giác đều

A. BÀI MINH HỌA QUA CÁC ĐỀ THI HSG

Bài 1: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC

- Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$
- Chứng minh rằng $\angle DIB = 60^\circ$
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều
- Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$

Bài 2:

Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = \frac{1}{3} AB$. Tại D kẻ đường vuông góc với AB cắt cạnh BC tại E . Tại E kẻ đường vuông góc với BC cắt AC tại F .

- Chứng minh $DF \perp AC$ Biết trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc BED thì bằng nửa cạnh huyền.
- Chứng minh tam giác DEF đều.
- Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF . Chứng minh $GA = GB = GC$

Bài 3: Cho góc $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay, CM \perp Ay, BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

- K là trung điểm của AC

e) $BH = \frac{AC}{2}$

f) ΔKMC đều

Bài 4: Cho $\angle A = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H , kẻ $BK \perp Az$ và $Bt \parallel Ay$, Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M . Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC

b) ΔKMC là tam giác đều

c) Cho $BK = 2cm$, Tính các cạnh của ΔAKM

Bài 5: Cho ΔABC nhọn có góc $A = 60^\circ$. Phân giác ABC cắt AC tại D , phân giác ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I .

a) Tính số đo góc BIC .

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\Delta CID = \Delta CIF$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh ΔBCM là tam giác đều.

Bài 6: Cho tam giác ABC có góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng ΔAMN đều

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$

Bài 7: Cho $\angle A = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC

b) ΔKMC là tam giác đều

c) Cho $BK = 2cm$, tính các cạnh của ΔAKM

Bài 8: Cho $\angle A = 60^\circ$, vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Kẻ $BH \perp Ay$ tại H , $CM \perp Ay$ tại M , $BK \perp AC$ tại K . Chứng minh

Bài 9: Cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA = 1; MB = 2; MC = \sqrt{3}$, Tính độ dài cạnh AB và số đo góc AMB

Bài 10: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC
- $\triangle KMC$ là tam giác đều

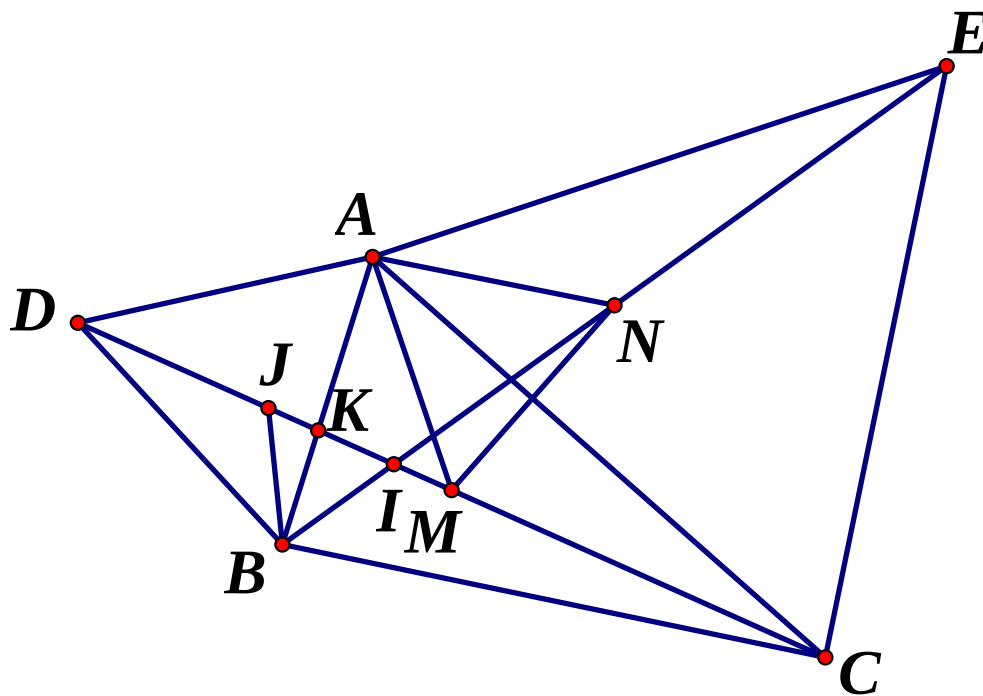
Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh $\triangle AKM$

B. LỜI GIẢI MINH HỌA

Bài 1: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC

- Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$
- Chứng minh rằng $\angle DIB = 60^\circ$
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều
- Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$

Lời giải



- Ta có $AD = AB, \angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE \Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow ABE = ADC$, mà $BKI = AKD$ (đối đỉnh)

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $BIK = DAK = 60^\circ$ (đpcm)

c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN, ACM = AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $CAM = EAN$

$\Rightarrow MAN = CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = JB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều

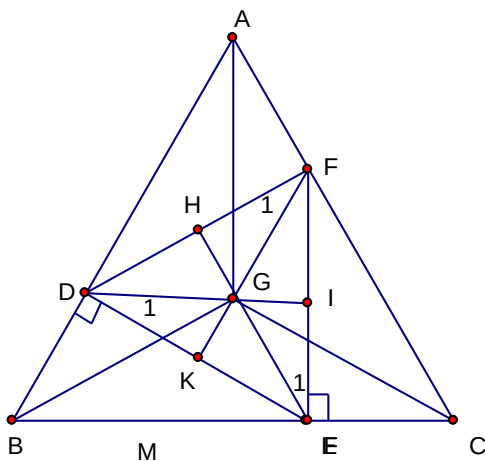
$\Rightarrow BJ = BI$ và $JB I = DBA = 60^\circ \Rightarrow IBA = JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AIB = DJB = 120^\circ$ mà $BID = 60^\circ$

$\Rightarrow DIA = 60^\circ \Rightarrow IA$ là phân giác của DIE

Bài 2:

Lời giải



1) $\triangle ABC$ đều nên $AB = AC = BC = a$ và $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$$BD = \frac{1}{3}a \text{ (gt)} \Rightarrow AD = \frac{2}{3}a$$

Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle DEB = 30^\circ$

$$\text{Xét } \triangle BDE \text{ vuông tại } D \text{ có } \angle DEB = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BE$$

$$\text{hay } BE = 2BD = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \text{ mà } BC = a \text{ nên } EC = \frac{1}{3}a$$

Tương tự, xét $\triangle ECF$ vuông tại E có $\angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle EFC = 30^\circ$

$$\Rightarrow AF = \frac{1}{3}a$$

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle BED$ có:

$$AD = BE \left(= \frac{2}{3}a \right)$$

$$\angle A = \angle B \left(= 60^\circ \right)$$

$$AF = BD \left(= \frac{1}{3} a \right)$$

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle BED \text{ (C g. c)}$$

$$\Rightarrow \angle AFD = \angle BDE \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \angle BDE = 90^\circ \Rightarrow \angle AFD = 90^\circ \text{ hay } DF \perp AC$$

$$2) \text{ Chứng minh tương tự cũng có } \triangle DBE = \triangle ECF \text{ (cgc) } \Rightarrow DE = EF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Có } \triangle ADF = \triangle BED \text{ (C g. c) (cmt) } \Rightarrow DF = DE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow DE = DF = EF \Rightarrow \triangle DEF \text{ là tam giác đều.}$$

$$3) \text{ Xét } \triangle DEF \text{ đều có } G \text{ là trọng tâm của tam giác } \Rightarrow G \text{ là giao điểm của ba đường phân giác}$$

$$\Rightarrow GD, GE, GF \text{ là các đường phân giác của các góc } \angle EDF; \angle DEF; \angle DFE$$

$$\text{Có } \triangle DEF \text{ đều nên } \angle D = \angle E = \angle F = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle D_1 = \angle E_1 = \angle F_1 = 30^\circ \text{ (cùng bằng nửa góc } \angle D, \angle E, \angle F = 60^\circ \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \angle BDG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\angle CEG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\angle AFG = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle DEF \text{ đều có } G \text{ là trọng tâm của tam giác } \Rightarrow G \text{ là giao điểm của ba đường trung trực } \Rightarrow GD = GE = GF$$

$$*) \text{ Xét } \triangle AGF \text{ và } \triangle BGD \text{ có}$$

$$GF = GD$$

$$\angle AFG = \angle BDG \text{ (} = 120^\circ \text{)}$$

$$AF = BD$$

$$\Rightarrow \triangle AGF = \triangle BGD \text{ (C g. c) } \Rightarrow GA = GB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Tương tự, có } \triangle AGF = \triangle CGE \text{ (C g. c) } \Rightarrow AG = GC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

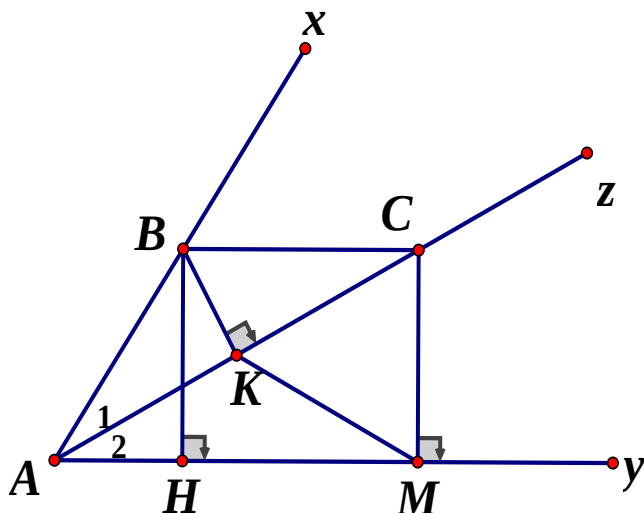
$$\Rightarrow AG = BG = CG \text{ (đpcm)}$$

Bài 3: Cho góc $\angle xAy = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay, CM \perp Ay, BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

$$a) K \text{ là trung điểm của } AC$$

$$b) BH = \frac{AC}{2}$$

$$c) \triangle KMC \text{ đều}$$



d) $\triangle ABC$ có $A_1 = A_2$ (Az là tia phân giác của A); $A_1 = C_1$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)

$\Rightarrow A_2 = C_1 \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Mà $BK \perp AC \Rightarrow BK$ là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ cân

Hay K là trung điểm của AC

e) Xét $\triangle$ vuông ABH và $\triangle$ vuông BAK có: AB là cạnh huyền;

$$A_2 = B_1 (= 30^\circ) \dots \text{do} \dots \begin{cases} A_2 = \frac{A}{2} = 30^\circ \\ B_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK \text{ mà } AK = \frac{AC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

f) $\triangle AMC$ vuông tại M có $AK = KC = \frac{AC}{2}$ (1) $\Rightarrow MK$ là trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = \frac{AC}{2} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân

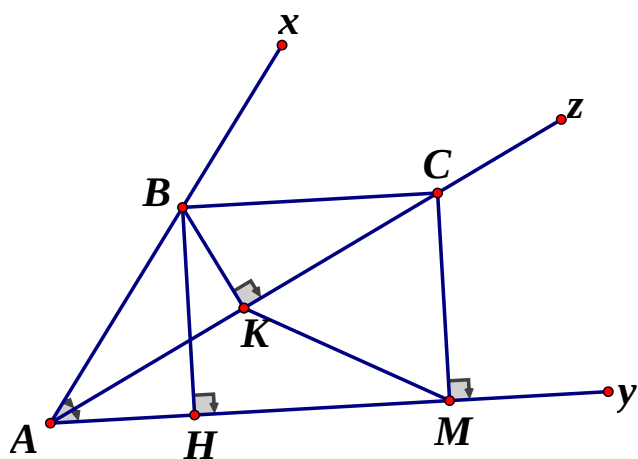
Mặt khác $\triangle AMC$ có $M = 90^\circ$; $A = 30^\circ \Rightarrow MKC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ đều.

Bài 4: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H, kẻ $BK \perp Az$ và $Bt \parallel Ay$, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M. Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều

c) Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh của $\triangle AKM$



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $CAB = ACB (= MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

b) $\triangle ABH = \triangle BAK$ (ch - gn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ ($\triangle BHM = \triangle MCB$) mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác $MCB = 90^\circ$ và $ACB = 30^\circ \Rightarrow MCK = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4\text{cm}$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \text{ mà } KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo phần b, $AB = BC = 4\text{cm}$, $AH = BK = 2$, $HM = BC$ ($\triangle BHM = \triangle MCB$)

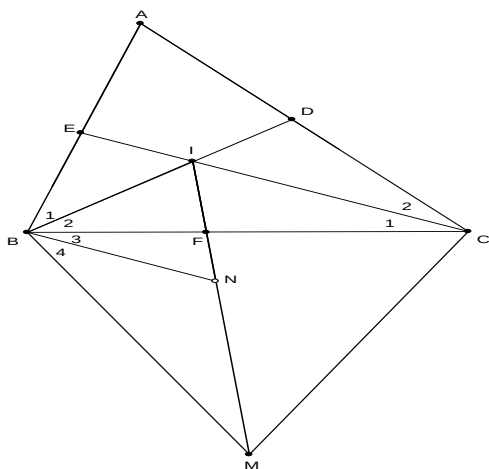
$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6\text{cm}$$

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc $A = 60^\circ$. Phân giác ABC cắt AC tại D, phân giác ACB cắt AB tại E. BD cắt CE tại I.

a) Tính số đo góc BIC.

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$.

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.



a) BD là phân giác của góc ABC nên $B_1 = B_2 = \frac{ABC}{2}$

CE là phân giác của góc ACB nên $C_1 = C_2 = \frac{ACB}{2}$

Mà tam giác ABC có $A + B + C = 180^\circ$ suy ra $60^\circ + ABC + ACB = 180^\circ$

$$\Rightarrow ABC + ACB = 120^\circ \Rightarrow B_2 + C_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow BIC = 120^\circ$$

b)

$$\triangle BIE = \triangle BIF \text{ (cgc)} \Rightarrow BIE = BIF$$

$$BIC = 120^\circ \Rightarrow BIE = 60^\circ \Rightarrow BIE = BIF = 60^\circ$$

$$\text{Mà } BIE + BIF + CIF = 180^\circ \Rightarrow CIF = 60^\circ$$

$$CID = BIE = 60^\circ \text{ (đ.đ)} \Rightarrow CIF = CID = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF \text{ (gcg)}$$

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IN = IB \Rightarrow NM = IC$

$$\Rightarrow \triangle BIN \text{ đều} \Rightarrow BN = BI \text{ và } BNM = 120^\circ$$

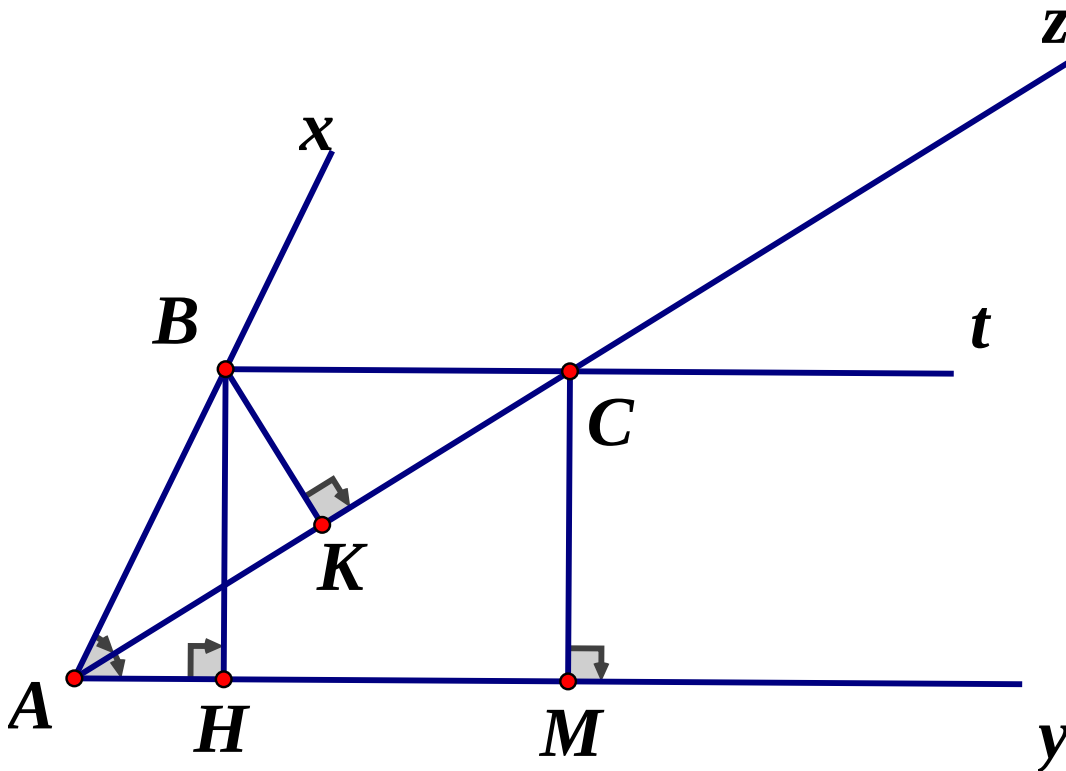
$$\Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC \text{ (cgc)}$$

$\Rightarrow BM = BC$ và $B_2 = B_4 \Rightarrow \triangle BCM$ đều

Bài 6: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC
- $\triangle KMC$ là tam giác đều
- Cho $BK = 2\text{cm}$, tính các cạnh của $\triangle AKM$

Lời giải:



- $\triangle ABC$ cân tại B do $\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến

$\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

- $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $\angle MCB = 90^\circ$ và $\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

- Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $\angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4\text{cm}$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$$\text{Mà } KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

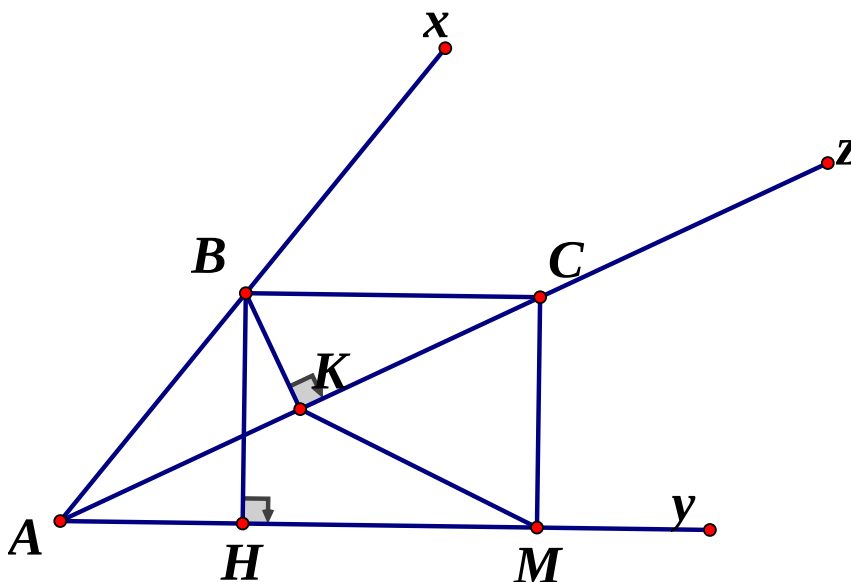
Theo phần b, $AB = BC = 4, AH = BK = 2, HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

Bài 7: Cho $\angle xAy = 60^\circ$, vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Kẻ $BH \perp Ay$ tại H , $CM \perp Ay$ tại M , $BK \perp AC$ tại K . Chứng minh

- a) $KC = KA$ b) $BH = \frac{AC}{2}$ c) $\triangle KMC$ đều

Lời giải:



- a) Ta có: $\angle yAz = \angle zAx = 30^\circ$ (Az là tia phân giác của $\angle xAy$)

Mà $\angle yAz = \angle ACB$ ($Ay \parallel BC$, slt) $\Rightarrow \angle zAx = \angle ACB \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy $\Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow KC = KA$

- b) Ta có: $\angle ABH = 90^\circ - \angle xAy = 30^\circ$ ($\triangle ABH$ vuông tại H)

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$ có:

$$\angle AB \text{ chung; } \angle zAx = \angle ABH (= 30^\circ) \Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK$$

$$\text{Mà } AK = \frac{AC}{2} \text{ (cmt)} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

- c) Ta có: $\triangle AMC$ vuông tại M có MK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = \frac{AC}{2} \quad (1) \text{ mà } AK = KC = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \Delta KMC$ cân tại K (3)

Bài 8: Cho tam giác ABC có góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

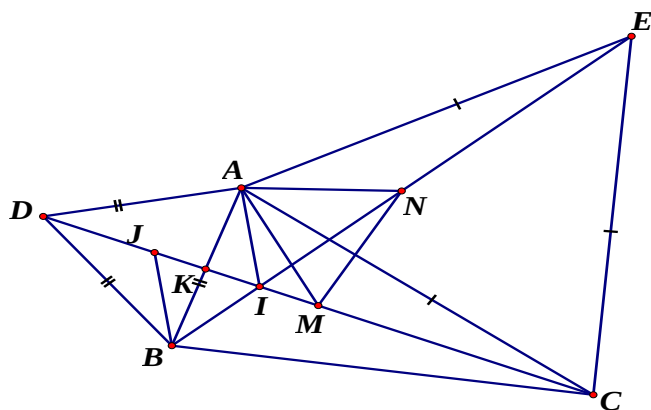
a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng ΔAMN đều

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$

Lời giải:



a) Ta có: $AD = AB, \angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE \Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE$ (c.g.c)

b) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh)

Khi đó xét ΔBIK và ΔDAK suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)

c) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow CM = EN, \angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \Delta ACM = \Delta AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó ΔAMN đều

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \Delta BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và

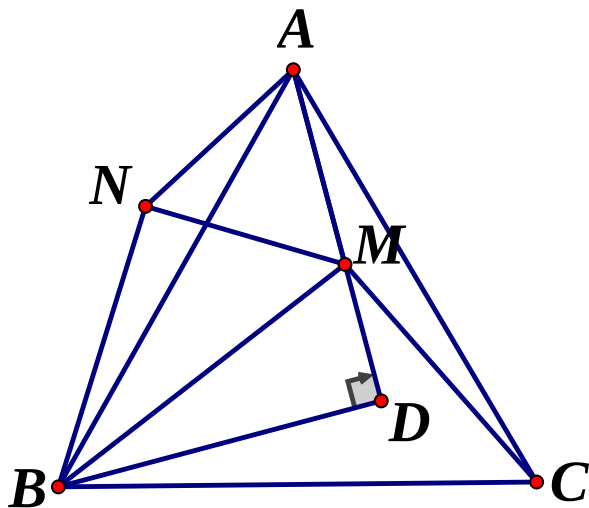
$\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ \Rightarrow \angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \angle IBA = \angle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của $\angle DIE$

Bài 9: Cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA = 1; MB = 2; MC = \sqrt{3}$, Tính độ dài cạnh AB và số đo góc $\angle AMB$

Giải



Vẽ tam giác đều AMN và kẻ $BD \perp AM$

$$\triangle AMC = \triangle ANB (c.g.c) \Rightarrow MN = 1; BN = \sqrt{3}; BM = 2$$

Dùng Pytago chứng minh $BNM = 90^\circ$, $BM = 2NM$ nên $NMB = 60^\circ$,

vậy $AMB = 120^\circ$

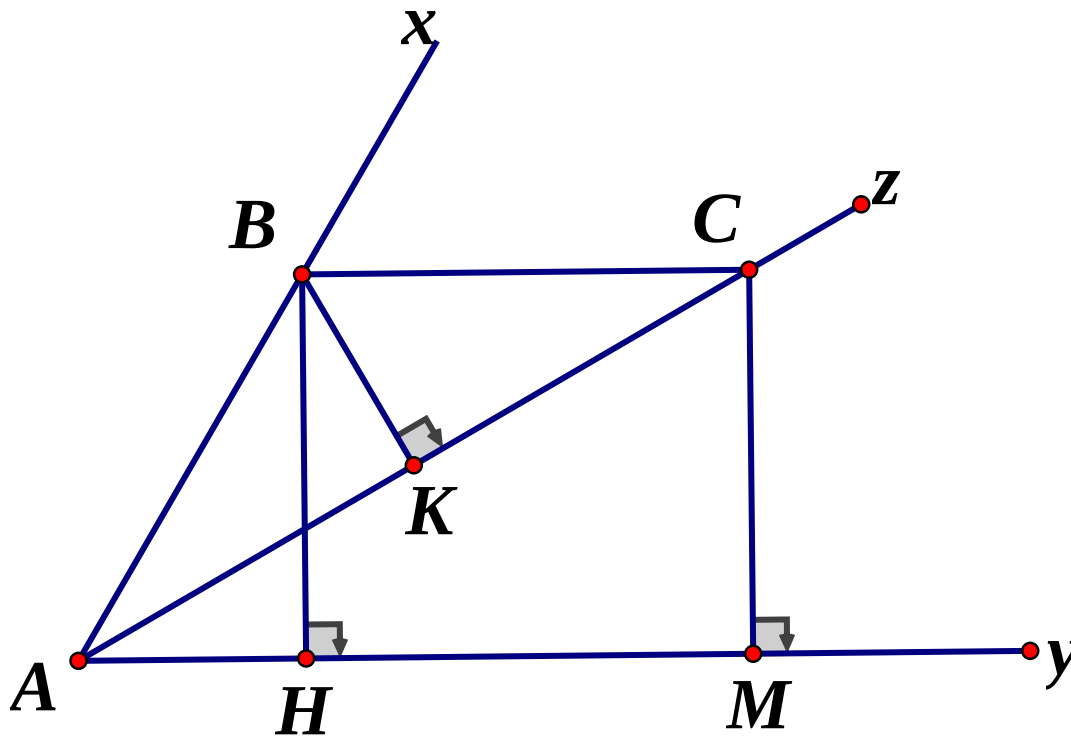
$$MBD = 30^\circ \Rightarrow MB = 2MD$$

Vậy $AD = 2$; $BD = \sqrt{3}$; Từ đó tính được: $AB = \sqrt{7}$

Bài 10: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC
- $\triangle KMC$ là tam giác đều
- Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh $\triangle AKM$

giải



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $CAB = ACB (= MAC)$ và BK là đường cao nên BK cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

b) $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất cặp đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $MCB = 90^\circ$ và $ACB = 30^\circ \Rightarrow MCK = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4cm$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{Mà } KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo phần b) $AB = BC = 4$; $AH = BK = 2$; $HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

