

PHẦN I. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT**A. Kiến thức cần nhớ**

Để giải tốt bài toán tính số đo góc thì chúng ta phải nắm vững kiến thức cơ bản sau:

*** Trong tam giác:**

+ Tổng ba góc trong bằng 180° .

+ Biết hai góc chúng ta xác định được góc còn lại.

*** Trong tam giác cân:** Biết một góc chúng ta xác định được hai góc còn lại.

*** Trong tam giác vuông:**

+ Biết một góc nhọn, chúng ta xác định được góc nhọn còn lại.

+ Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó có số đo bằng 30° .

*** Trong tam giác vuông cân:** Mỗi góc nhọn có số đo bằng 45° .

*** Trong tam giác đều:** Mỗi góc có số đo bằng 60° .

* Đường phân giác của một góc chia góc đó ra hai góc có số đo bằng nhau.

* Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

* Tính chất về góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía, của một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.

Trong thực tế, để giải bài toán tính số đo góc, ta thường xét các góc đó nằm trong mối liên hệ với các góc ở các hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhau, .. rồi suy ra kết quả.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, $C = 30^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, biết rằng $AH = \frac{1}{2}BC$. Gọi D là

trung điểm của AB. Tính số đo góc ACD?

Giải

*** Tìm cách giải.** Xuất phát từ $\triangle AHC$ vuông có $C = 30^\circ$ và $AH = \frac{1}{2}BC$. Với hai yếu tố này giúp

chúng ta nghĩ tới tam giác vuông có một góc bằng 30° . Với lập luận đó, chúng ta nghĩ tới việc chứng minh tam giác ABC cân. Chúng ta có thể giải th

*** Trình bày lời giải.**

Xét $\triangle AHC$ có $C = 30^\circ, AHC = 90^\circ$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$$

$$\text{Mà } AH = \frac{1}{2}BC \text{ gt} \Rightarrow AC = BC$$

$\Rightarrow \triangle ACB$ cân tại $C \Rightarrow CD$ là đường phân giác của góc $C \Rightarrow ACD = 15^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Biết rằng $BI = 2.IM$ và $BIM = 90^\circ$. Tính số đo A .

Giải

*** Tìm cách giải.** Dựa vào ví dụ 4, chuyên đề 7, chúng ta biết rằng $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Do vậy chúng

ta chỉ cần tính BIC . Mặt khác, theo giả thiết $BIM = 90^\circ$ nên chúng ta chỉ cần tính MIC . Do $MB = MC$ và $BI = 2.IM$ nên dễ dàng suy luận được tạo ra điểm D sao cho M là trung điểm của ID. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

*** Trình bày lời giải.**

Trên tia đối của tia MI lấy $MD = MI$. $BMI = CMD; IM = DM$

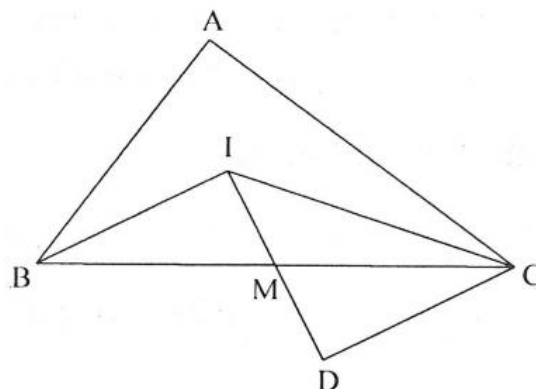
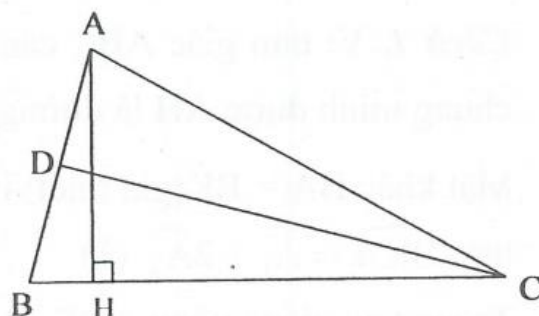
Suy ra $\triangle BIM = \triangle CDM$ c.g.c $\Rightarrow BI = CD; BIM = CDM \Rightarrow CDI = 90^\circ$

Từ $BI = 2.IM \Rightarrow BI = ID = 2.IM$

$\Rightarrow CD = ID \Rightarrow \triangle CDI$ vuông cân tại D

$\Rightarrow CID = 45^\circ \Rightarrow BIC = 135^\circ$

$\triangle BIC$ có $BIC = 135^\circ$ nên



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$IBC + ICB = 45^\circ$$

BI; CI là tia phân giác B và C nên

$$ABC + ACB = 2. IBC + ICB = 90^\circ, \text{ suy ra } A = 90^\circ$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân ở tại A với $BAC < 90^\circ$ và kẻ BD, AH lần lượt vuông góc với AC; BC. Trên tia BD lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Tính số đo của góc HAK.

Giải

- **Cách 1.** Vì tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC, dễ dàng chứng minh được AH là đường phân giác của góc BAC suy ra $A_2 = A_3$.

Mặt khác $BA = BK$ (giả thiết) nên $\triangle ABK$ cân tại B, suy ra $BKA = BAK$

$$\text{hay } BKA = A_1 + 2A_2 \quad (1)$$

Trong tam giác vuông ADK có:

$$K + A_1 = 90^\circ \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$2A_1 + 2A_2 = 90^\circ,$$

$$\text{Suy ra } A_1 + A_2 = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } HAK = 45^\circ$$

- **Cách 2.** Gọi I là giao điểm của AK và BC.

$$\triangle BIK \text{ có } AKB = \hat{I} + CBD \text{ (góc ngoài tam giác)}$$

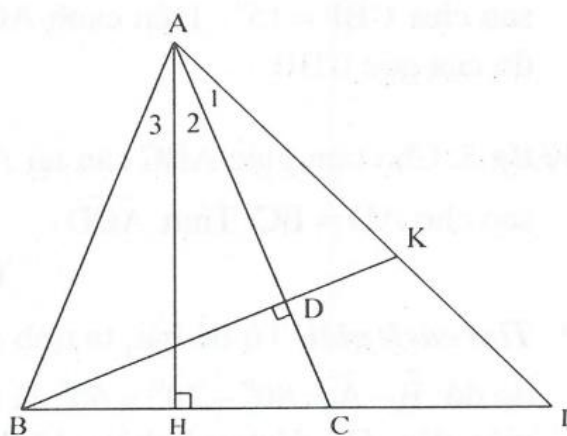
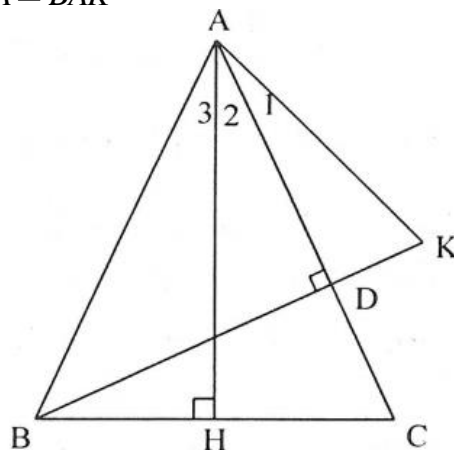
$$\text{Mà } CBD = A_2 = 90^\circ - ACB \text{ nên } AKB = \hat{I} + A_2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } KAB = IAH + A_3 \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác: } AKB = KAB \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$IAH + A_3 = \hat{I} + A_2$$



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Lại có $A_2 = A_3 \Rightarrow IAH = \hat{I}$

suy ra $\triangle AHI$ cân tại H

$$\Rightarrow HAK = 45^\circ$$

*** Nhận xét:**

• Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài hai cách tính trên đây, chúng ta có thể hạ $KJ \perp AH$ $J \in AH$ rồi chứng minh $\triangle AIK$ vuông cân tại J.

• Nếu $BAC > 90^\circ$ ta có kết quả $HAK = 135^\circ$ (bạn đọc tự chứng minh theo ý tưởng trên)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $ABE = 15^\circ$ và $CE = CF$. Tính số đo của góc CBF.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F, dựng tam giác đều BED. Ta có

$$EBC = ABC - ABE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow CBD = 30^\circ$$

Khi đó BC là tia phân giác góc EBD nên

$$\triangle BCD = \triangle BCE \text{ (c.c.c)} \Rightarrow CD = CE = CF,$$

Suy ra tam giác DEF vuông

tại D. Ta có:

$$\begin{aligned} DEF &= 180^\circ - AEB - BED \\ &= 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

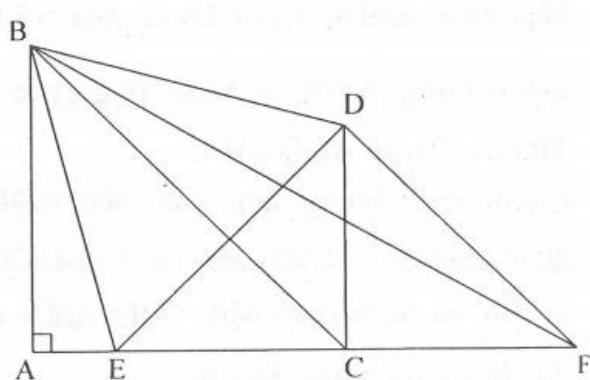
Vậy DEF vuông cân tại D.

Lại có.

$$DFE = 45^\circ; ACB = 45^\circ \Rightarrow DFE = ACB, \text{ do đó } BC \parallel DF.$$

Ta lại có tam giác DBF cân tại D (vì $DB = DF = DE$) và $BDF = BDE + EDF + 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

nên $DFB = DBF = 15^\circ$, suy ra $CBF = DFB = 15^\circ$. Vậy $CBF = 15^\circ$



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

* **Nhận xét.** Dựa vào kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $\angle CBF = 15^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = CF$. Tính số đo của góc CBE.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính $\angle ACD$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Từ đề bài, ta tính được $\angle B = \angle C = 80^\circ$ do đó $\angle B - \angle A = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam

giác đều. Do đó ta có thể nghĩ đến phương pháp vẽ đường phụ là tam giác đều.

Khi vẽ đường phụ chúng ta chú ý vẽ xuất phát điểm luôn luôn xuất hiện mối liên hệ giữa 20° ; 60° ; 80° . Sau đây là một vài cách:

* Trình bày lời giải

- **Cách vẽ 1.** Dựng điểm I nằm trong tam giác sao cho tam giác BIC là tam giác đều.

Ta có $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có $AB = AC$, $IB = IC$, AI là cạnh chung $\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle CAI = 10^\circ \quad (1)$$

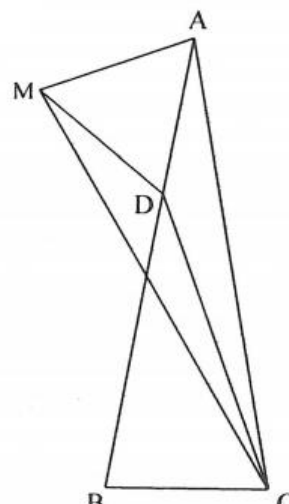
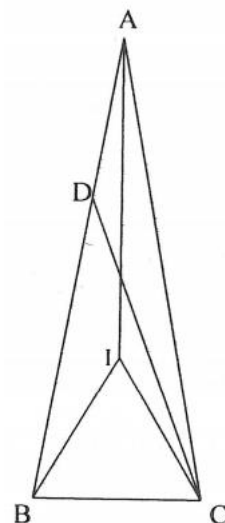
Mặt khác $\triangle ADC$ và $\triangle CIA$ có $AD = CI$ ($= BC$),

$\angle DAC = \angle ICA = 20^\circ$, AC là cạnh chung $\triangle ADC = \triangle CIA$

$$(c.g.c) \Rightarrow \angle ACD = \angle CAI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \angle ACD = 10^\circ$$

- **Cách vẽ 2.** Dựng tam giác đều ADM (M và C khác phía so với AB). suy ra: $\angle CAM = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\triangle ABC$ và $\triangle CAM$ có $MA = BC$,

$\angle ABC = \angle CAM = 80^\circ$, AC là cạnh chung. Suy ra:

$\triangle ABC = \triangle CMA$ c.g.c $\Rightarrow \angle ACM = 20^\circ$ và $CM =$

AC .

$\triangle ADC$ và $\triangle MDC$ có $AD = MD$, $AC = MC$, CD là

cạnh chung. Suy ra:

$$\triangle ADC = \triangle MDC \text{ c.c.c} \Rightarrow \angle ACD = \angle MCD = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

- **Cách vẽ 3.** Dựng tam giác đều CAN (B ; N khác phía so với AC) suy ra: $\angle DAN = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.

$\triangle ABC$ và $\triangle NAD$ có $AD = BC$,

$\angle ABC = \angle NAD = 80^\circ$, $AB = AN = AC$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle NAD$ c.g.c

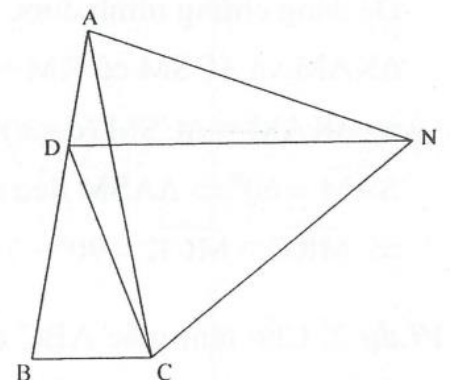
$\Rightarrow AC = ND$ và $\angle AND = 20^\circ$

Xét $\triangle DNC$ ta có $ND = NC$ (cùng bằng AC)

$\Rightarrow \triangle CND$ cân tại N mà

$$\angle CND = 60^\circ - \angle AND = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle NCD = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \angle ACD = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$



- **Cách vẽ 4.** Dựng tam giác đều ABK (K ; C cùng phía so với AB).

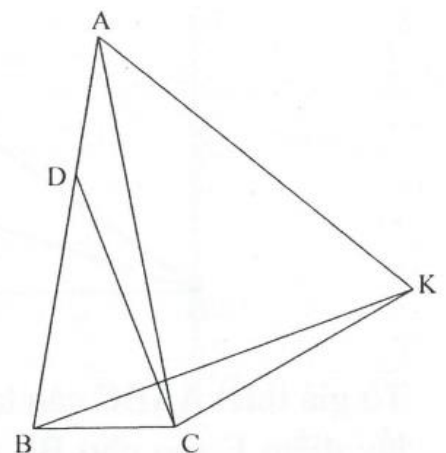
Ta có $\triangle ACK$ cân tại A mà

$$\angle CAK = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AKC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

Mặt khác: $\triangle ADC$ và $\triangle BCK$ có $AD = BC$,

$\angle DAC = \angle CBK = 20^\circ$, $AC = AK = AB$.



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Suy ra $\triangle ADC = \triangle BCK$ c.g.c

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle BKC = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC, $\angle BAM = 30^\circ, \angle MAC = 15^\circ$. Tính số đo góc $\angle BCA$?

Giải

* **Tìm cách giải.** Do $\angle BAC = 45^\circ$ nên chúng ta nghĩ tới việc dựng tam giác vuông cân. Do vậy chúng ta có thể giải như sau:

* **Trình bày lời giải**

Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $\triangle AKC$ vuông cân tại K

(vì $\angle BAC = 45^\circ$)

$\Rightarrow KA = KC$. Vẽ $\triangle ASC$ vuông cân tại S (K, S khác phía so với AC).

Do $\triangle BKC$ vuông tại K $\Rightarrow KM = \frac{1}{2}BC = MC$

$\Rightarrow \triangle KMC$ cân tại M $\angle MKC = \angle MCK \Rightarrow \angle AKM = \angle SCM$

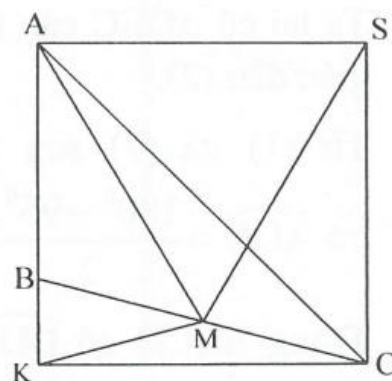
Dễ dàng chứng minh được $\triangle KAC = \triangle SAC \Rightarrow AK = CK = CS = SA$.

$\triangle KAM$ và $\triangle CSM$ có $KM = CM, \angle AKM = \angle SCM, KA = CS$

$\Rightarrow \triangle KAM = \triangle CSM$ c.g.c $\Rightarrow \angle CSM = 30^\circ \Rightarrow \angle ASM = 60^\circ$ và

$\angle SAM = 60^\circ \Rightarrow \triangle ASM$ đều $\Rightarrow AS = SM = AK \Rightarrow \triangle AKM$ cân tại A

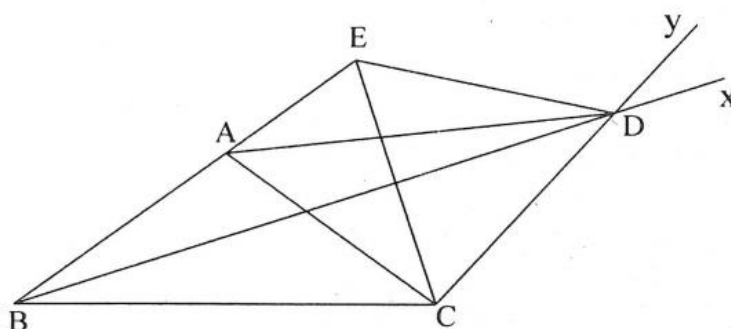
$\Rightarrow \angle MKC = \angle MCK = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \Rightarrow \angle BCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 3\angle B$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia

Cy sao cho $\angle BCy = 132^\circ$. Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB.

Giải



Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân tại A và $A = 3.B$, suy ra $B = C = 36^\circ$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$ (E nằm ngoài đoạn AB), khi đó Bx là tia phân giác của $\angle ABC$ từ đó dễ dàng chứng minh được BD vuông góc với CE.

Tam giác EBC cân tại B có; $\angle EAC = \angle ABC + \angle ACB = 72^\circ$

$$\angle AEC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ. \text{ Do đó } \angle AEC = \angle CAE \Rightarrow \triangle ACE \text{ cân tại C nên } CA = CE \text{ (1).}$$

Ta lại có $\triangle DEC$ cân tại D, và $\angle ECD = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle DEC$ là tam giác đều (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CAD$ cân tại C, có $\angle ACD = 132^\circ - 36^\circ = 96^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ.$$

Trong $\triangle BCD$ có $\angle BDC = 180^\circ - 132^\circ - 18^\circ = 30^\circ$, suy ra:

$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 42^\circ - 30^\circ = 12^\circ. \text{ Vậy } \angle ADB = 12^\circ$$

C. Bài tập vận dụng

1. Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\angle DBC = 10^\circ; \angle DCB = 30^\circ$. Tính số đo $\angle ADB$.

2. Cho tam giác vuông ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\angle ADC = 150^\circ$ và tam giác DAC cân tại D. Tính số đo $\angle ADB$

3. Cho $\triangle ABC, B = 45^\circ; A = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2BC$. Vẽ $DE \perp AC, E \in AC$.

a) Chứng minh rằng: $EB = ED$.

b) Tính số đo $\angle ADB$.

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

4. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Qua B dựng tia Bx sao cho $CBx = 30^\circ$. Tia phân giác của góc ACB cắt tia Bx tại D.

a) So sánh CD với CA.

b) Tính số đo của góc BDA.

5. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 40^\circ$. Trên tia phân giác AD của góc A lấy điểm E sao cho $ABE = 30^\circ$; trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CBF = 30^\circ$

a) Chứng minh rằng: $AE = AF$.

b) Tính số đo của BEF .

6. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) với $BAC = 20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CBD = 50^\circ$, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BCE = 60^\circ$. Tính số đo góc CED.

7. Cho tam giác ABC cân có $BAC = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $MAC = MCA = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.

8. Cho tam giác ABC với $BAC = 55^\circ, ABC = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $MAC = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC.

9. Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $MAC = MCA = 10^\circ$. Tính số đo góc AMB.

10. Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $MBC = 10^\circ, MCB = 30^\circ$. Tính số đo các góc AMB; AMC.

11. Cho tam giác đều ABC, điểm D nằm giữa A và B. Đường thẳng vẽ từ D vuông góc với AC cắt đường thẳng vẽ từ B vuông góc với BC tại điểm M. Gọi N là trung điểm của AD. Tính số đo góc MCN?

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. **Tìm cách giải.** Đây là bài toán khó bởi chúng ta khó nhận ra mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận để tìm cách giải quyết bài toán. Ta có: $ABC + DBC = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Từ đó chúng ta có thể vẽ để tạo ra tam giác đều theo các hướng sau:

- **Cách 1.** Dựng tam giác đều BCM (A; M cùng phía so với BC).

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có $AB = AC$, $MB = MC$, MA là cạnh chung.

Suy ra $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 30^\circ$$

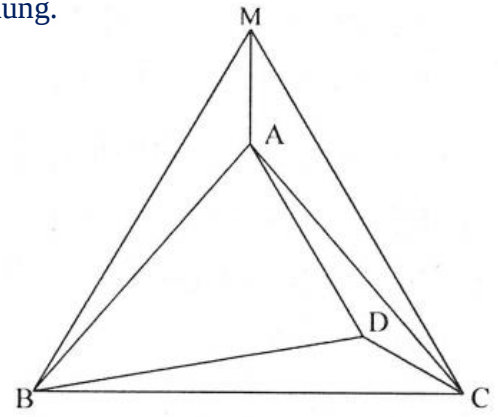
Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBC$ có $BM = BC$,

$$\angle AMB = \angle DCB = 30^\circ; \angle ABM = \angle DBC = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBC \text{ g.c.g} \Rightarrow AB = DB$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



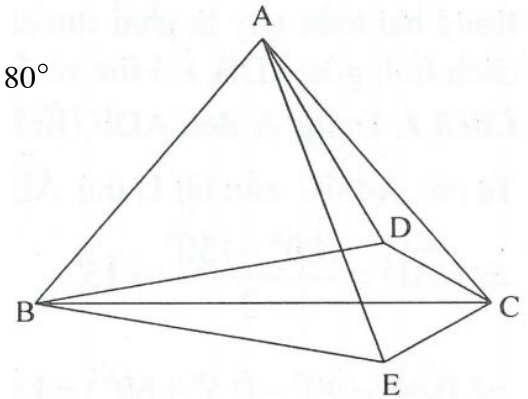
- **Cách 2.** Dựng tam giác đều ABE (C và E cùng phía so với AB)

$$\text{Ta có: } \triangle ACE \text{ cân tại A, mà } \angle CAE = 20^\circ \Rightarrow \angle ACE = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle BDC = \triangle BEC \text{ g.c.g}$$

$$\Rightarrow BD = BE = BA \Rightarrow \triangle BAD \text{ cân tại B}$$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$



- **Cách 3.** Dựng tam giác đều ACK (B; K cùng phía so với AC)

Ta có $\triangle ABK$ cân tại K, mà

$$\angle BAK = 20^\circ \Rightarrow \angle ABK = 80^\circ$$

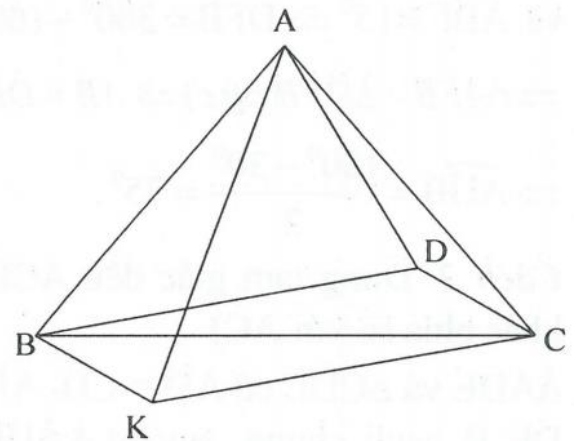
$$\Rightarrow \angle CBK = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle CKB \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BD = CK \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B}$$

Mà $\angle ABD = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



- **Cách 4.**

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Kẻ tia phân giác của góc ABD cắt CD kéo dài tại M .

Ta có: $MBC = MCB = 30^\circ \Rightarrow \triangle BMC$ cân tại $M \Rightarrow BMC = 120^\circ$

Mặt khác $\triangle AMB = \triangle AMC$ c.c.c

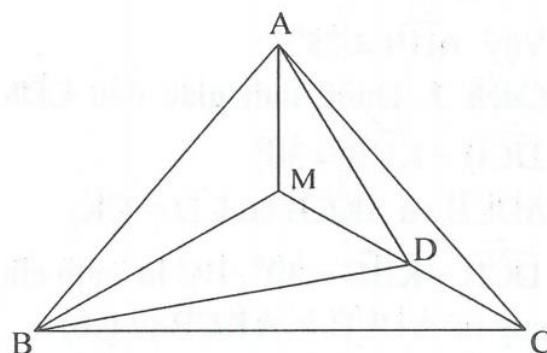
$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = DB \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B,$$

Mà $\angle ABD = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



2. Nhận xét. Để tính được góc ADB ta cần chứng minh tam giác ABD cân tại B . Ta có $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Do vậy trong bài toán này ta phải tìm cách vẽ kẻ để tạo ra tam giác đều từ đó tìm cách tính góc ADB . Có thể vẽ đường phụ theo các cách sau:

- **Cách 1.** Dựng $\triangle$ đều ADF (B ; F cùng phía so với AC).

Ta có: $\triangle ADC$ cân tại D mà $\angle ADC = 150^\circ$

$$\Rightarrow \angle CAD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAF = 90^\circ - 15^\circ + 60^\circ = 15^\circ$$

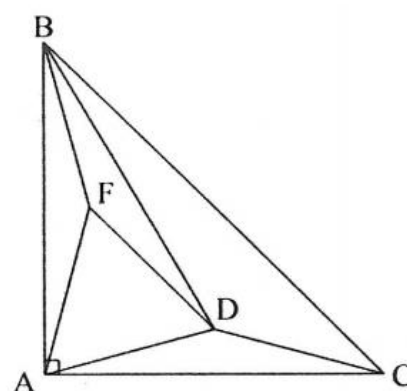
$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle AFB \text{ c.g.c} \Rightarrow \angle AFB = 150^\circ$$

$$\text{Và } \angle ABF = 15^\circ \Rightarrow \angle DFB = 360^\circ - 60^\circ + 150^\circ = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AFB = \triangle DFB \text{ c.g.c} \Rightarrow AB = DB \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } B$$

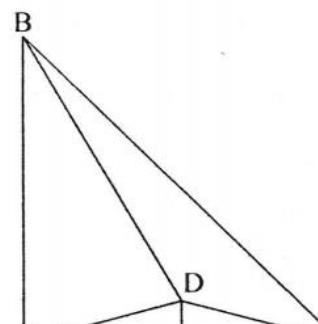
mà $\angle ABD = 30^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$



- **Cách 2.** Dựng tam giác đều ACE (E ; B khác phía so với AC)

$\triangle ADE$ và $\triangle CDE$ có $AD = CD$, $AB = CE$,



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

DE là cạnh chung, suy ra

$$\triangle ADE = \triangle CDE \text{ c.c.c} \Rightarrow ADE = CDE = 75^\circ$$

$\triangle ADE$ và $\triangle ADB$ có $AB = AE$,

$BAD = EAD = 75^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\triangle ADE = \triangle ADB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow ADE = ADB = 75^\circ$$

Vậy $ADB = 75^\circ$

- **Cách 3.** Dựng tam giác đều CDK (K ; B cùng phía so với AC) suy ra

$$DCB = KCB = 30^\circ$$

$\triangle DCB$ và $\triangle KCB$ có $CD = CK$,

$DCB = KCB = 30^\circ$, BC là cạnh chung,

suy ra $\triangle DCB = \triangle KCB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow DB = KB (*)$$

$\triangle ADK$ và $\triangle ADC$ có $DK = DC$,

$ADK = ADC = 150^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\triangle ADC = \triangle ADK$ c.g.c $\Rightarrow AC = AK$; $AC = AB \Rightarrow AK = AB$ 1

Mặt khác: $CAD = KAD = 15^\circ \Rightarrow KAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 2

Từ (1), (2) $\Rightarrow \triangle ABK$ là tam giác đều $\Rightarrow BK = BA(**)$

Từ (*) (**) $\Rightarrow DB = BA \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B

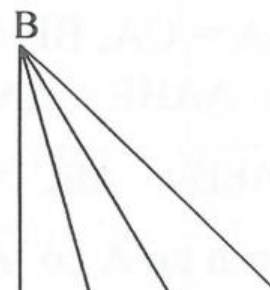
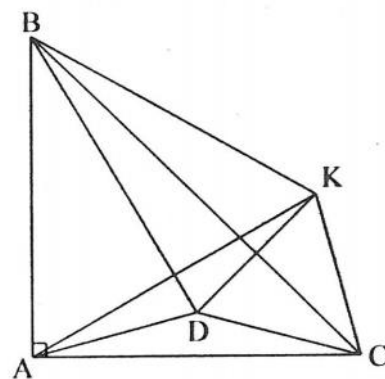
$$\Rightarrow BAD = BDA = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

Vậy $ADB = 75^\circ$.

- **Cách 4.** Dựng tia Bx sao cho $ABx = 15^\circ$ (Bx

và C cùng phía so với AB).

Tia Bx cắt tia CD tại I .



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Ta có $\triangle BIC$ cân tại I ($IBC = ICB = 30^\circ$)

$$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow BAI = CAI = 45^\circ \text{ do } \triangle BIC \text{ cân tại I}$$

$$\Rightarrow BIC = 150^\circ - 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

Mặt khác, $\triangle ACI$ có:

$$ACI = 15^\circ; CAI = 45^\circ \Rightarrow AIC = 180^\circ - 15^\circ + 45^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Từ đó ta có: } AIB = 360^\circ - 120^\circ + 120^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } AIB = DIB = 120^\circ. (*)$$

Xét tam giác: AID có $ADI = ACD + CAD = 30^\circ$ (Góc ngoài tam giác)

$$DAI = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow \triangle AID \text{ cân tại I} \Rightarrow IA = ID (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow \triangle AIB = \triangle DIB \text{ c.g.c} \Rightarrow AB = DB \text{ và } ABI = DBI = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B.}$$

$$\Rightarrow ABI = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

3.

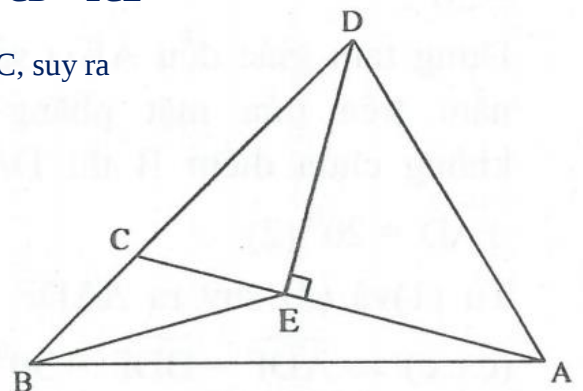
$$\text{a) Ta có } ACD = ABC + BAC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

Từ đó trong tam giác ECD vuông tại E, có $CDE = 30^\circ$ nên $CD = 2CE$

(theo ví dụ 8, chuyên đề 9), ta lại có $CD = 2BC$ nên $CE = BC$, suy ra

$$CBE = 30^\circ = CDE$$

$\triangle EBD$ cân tại E suy ra $EB = ED$.



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

b) Ta có $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ = \angle EAB \Rightarrow \triangle EAB$ cân tại E,

ta lại có $EA = EB = ED \Rightarrow \triangle EAD$ vuông cân tại E $\Rightarrow \angle EDA = 45^\circ$.

Vậy $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

4.

a) Dựng tam giác đều BEC sao cho E và

A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC.

Ta có $BA = CA$, $BE = CE$, AE là một cạnh

chung $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACE$ (c.c.c)

suy ra $\angle AEB = \angle AEC = 30^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A có $\angle A = 100^\circ$ nên suy ra

$\angle ACB = \angle ABC = 40^\circ \Rightarrow \angle ECA = \angle ACD = \angle DCB = 20^\circ$

Suy ra $\triangle DBC = \triangle AEC$ g - c - g $\Rightarrow CD = CA$

b) Ta có $\angle BDA = 180^\circ - \angle ABD + \angle BAD$ (1).

Mà $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 10^\circ$ 2 .

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = \angle BAC - \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2} \right) = 100^\circ - \left(\frac{180^\circ - 20^\circ}{2} \right) = 20^\circ \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\angle BDA = 180^\circ - \angle ABD + \angle BAD = 180^\circ - 10^\circ + 20^\circ = 150^\circ.$$

*** Mở rộng bài toán:** Có thể thay kết luận bằng yêu cầu: Tính số đo các góc ADC; BAD.

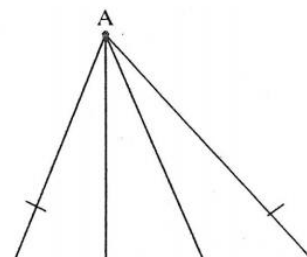
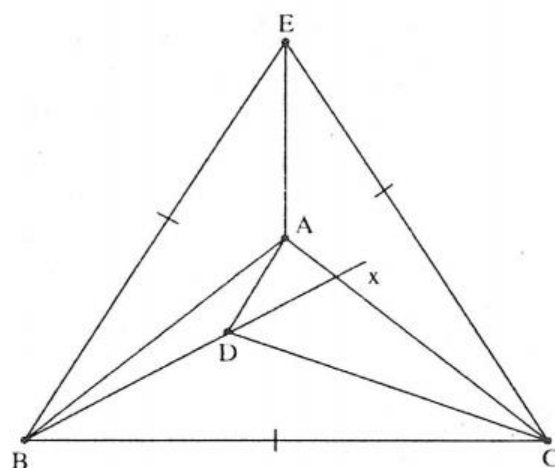
5.

a) Ta có $\angle FBA = 40^\circ = \angle BAC \Rightarrow \triangle BFA$ cân tại F $\Rightarrow FA = FB$ (1)

AH là phân giác của $\angle BAC$ nên $\angle BAE = 20^\circ$.

Dựng tam giác đều ABD sao cho D

nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ
không chứa điểm B thì $DA = DB$,

$$FAD = 20^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADF = \triangle BDF$

$$(c.c.c) \Rightarrow ADF = BDF = 30^\circ.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $\triangle FAD = \triangle EAB \quad g - c - g \Rightarrow AE = AF$.

$$b) \text{ Ta có } DFA = 180^\circ - ADF - DAF = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ$$

$$\text{Ta có } DFA = DFB = 130^\circ; EFA = 80^\circ \text{ nên suy ra } EFB = 20^\circ, EBF = 10^\circ$$

$$\text{Trong } \triangle BFE \text{ thì } BEF = 180^\circ - EBF - EFB = 150^\circ.$$

6.

- **Cách 1.** Vẽ tam giác đều ACF sao cho F nằm trên nửa mặt bờ AB không chứa điểm C

Gọi giao điểm của CF và AB là K

$$\text{Ta có } BCK = 20^\circ; ECK = 40^\circ;$$

$$BKC = 180^\circ - (CBK + BCK) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CBK \text{ cân tại C} \Rightarrow CK = BC \quad (1).$$

$$BDC = 180^\circ - (CBD + BCD) = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CBD \text{ cân tại C} \Rightarrow CD = BC \quad (2).$$

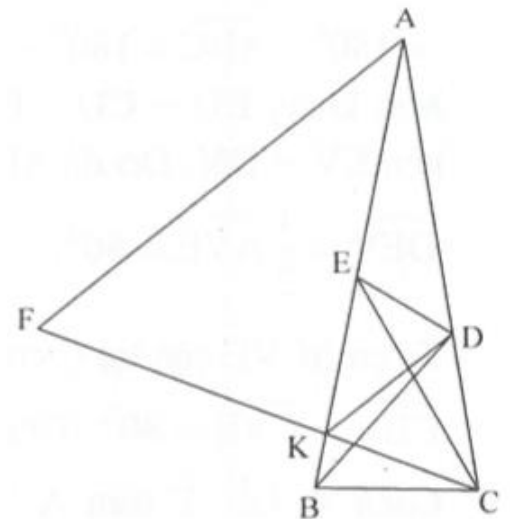
Từ (1) và (2) suy ra $CD = CK$

$$\Rightarrow \triangle KCD \text{ cân tại C và } DCK = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle KCD \text{ là tam giác đều} \Rightarrow CK = DK \quad (3).$$

$$\triangle CKE \text{ có } KCE = KEC = 40^\circ \text{ nên } \triangle CKE \text{ cân tại K} \Rightarrow CK = EK \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $EK = DK \Rightarrow \triangle EKD \text{ cân tại K và có}$



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$EKD = 180^\circ - (CKD + BKC) = 40^\circ \text{ nên } KED = 70^\circ \text{ mà } BEC = 40^\circ$$

$$\Rightarrow CED = 30^\circ$$

- **Cách 2.** Vẽ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC). Gọi P là giao

điểm của BF và CE, do $BCE = 60^\circ$ nên $\triangle BPC$

đều $\Rightarrow CP = CB$ (1).

Do $CBD = CDB = 50^\circ$ nên $\triangle BCD$ cân tại C, dẫn

đến $CD = CB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DCP$ cân tại C nên

$$CPD = 80^\circ; DPF = 40^\circ. \text{ Mà } DFP = 40^\circ \text{ nên } \triangle DPF \text{ cân } DP = DF.$$

Từ đó $\triangle DPF = \triangle DFE$ (c.c.c)

Suy ra $PED = FED = 30^\circ$. Hay $CED = 30^\circ$

- **Cách 3.** Trên tia CA; CB lấy V và U sao cho $CV = CU = CE$.

Ta có $CE = CU$ và $BCE = 60^\circ$ nên $\triangle CEU$ đều, do đó $EU = EC$

và $CEU = 60^\circ$. Vì $CEB = 40^\circ$ nên $BEU = 20^\circ$.

Lại có $\triangle ACE$ cân nên $AE = CE$, do đó $AE = EU$.

$$\text{Có } \triangle AEV = \triangle EUB (AE = EU), EAV = UEB$$

$$= 20^\circ, AV = AC - CV = AB - EC = AC - AE = EB$$

Nên $EV = BU$ và $AVE = EBU$

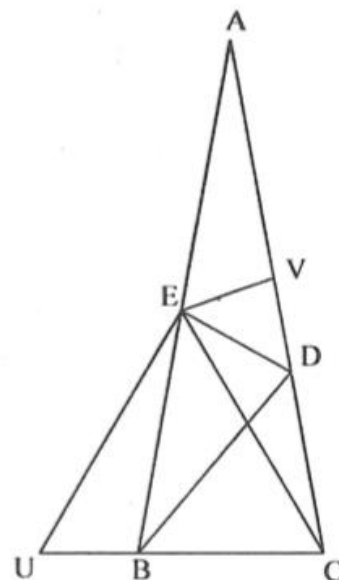
$$= 180^\circ - ABC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Mặt khác, $BU = CU - BC = CV - CD = DV$

Nên $EV = DV$. Do đó $\triangle EVD$ cân tại V, suy ra

$$DEV = \frac{1}{2} AVE = 50^\circ.$$

Ta có $\triangle CVE$ cân tại C có $ECV = 20^\circ$, suy ra



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$CEV = CVE = 80^\circ. \text{ Từ đó } CED = CEV - DEV = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

- **Cách 4.** Lấy F trên AB sao cho $DCF = 60^\circ$

$$\Rightarrow FCB = 20^\circ \Rightarrow \triangle BCF \text{ cân } (CFB = CBF = 80^\circ),$$

Nên $CF = CB$. Ta có $\triangle BCD$ cân ($CBD = CDB = 50^\circ$)

Suy ra $CB = CD$

Từ đó $CF = CD$ mà $DCF = 60^\circ$ nên $\triangle CDF$ đều, do đó

$$FCE = 40^\circ = FEC \text{ nên } FE = FC, \text{ suy ra } FE = FD.$$

Vậy $\triangle FED$ cân tại F. Vì $EFD = 40^\circ$, suy ra $FED = 70^\circ$.

$$\text{Ta có } CED = FED - FEC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

7. Giả sử CM cắt AB tại E, tia phân giác góc BEC cắt BM, BC lần lượt tại H và K. Ta có tam giác

MAC cân tại M, nên $AME = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$

Lại có $CEA = CEK = BEK = 60^\circ$, suy ra $\triangle CEA = \triangle CEK$ (g.c.g)

$$\Rightarrow \triangle MEA = \triangle MEK \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $AME = KME = 40^\circ$. Vì $EBK = 40^\circ$ nên

$$\triangle EKB = \triangle EKM \text{ (g.c.g), suy ra } \triangle EHB = \triangle EHM$$

(c.g.c), do đó $EHM = 90^\circ$.

Xét tam giác HEM có

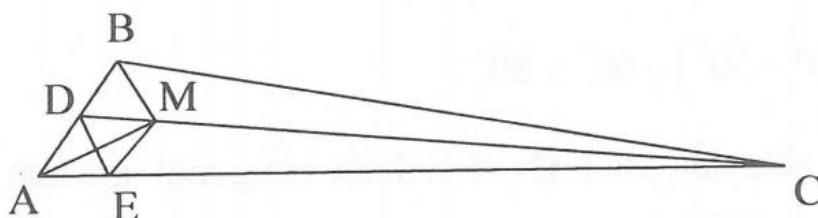
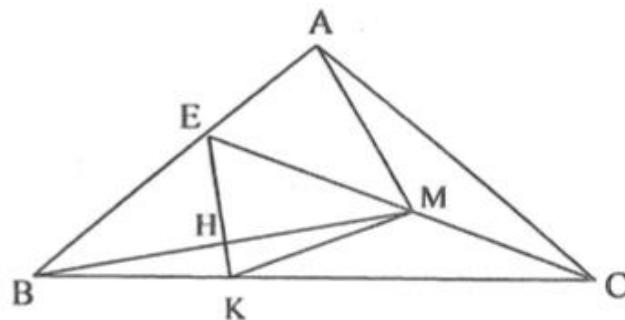
$$EHM = 90^\circ, HEM = 60^\circ, \text{ nên}$$

$$EMH = 30^\circ. \text{ Do đó}$$

$$AMB = BME + EMA = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ.$$

8. Ta có $C = 180^\circ - (55^\circ + 115^\circ) = 10^\circ$

Kẻ $DE \perp AM$ $E \in AC$.



Ta có $DAM = DMA = 30^\circ \Rightarrow \triangle DAM$ cân tại D từ đó suy ra $ADM = 120^\circ$, và DE là đường phân giác của góc ADM nên $EDM = BDM = 60^\circ$. Do đó $\triangle EDC = \triangle BDC$ g.c.g $\Rightarrow BC = EC$.

Xét $\triangle BMC$ và $\triangle EMC$ có $BC = EC$; $MCB = MCE = 5^\circ$, MC chung.

Do đó $\triangle BMC = \triangle EMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BMC = EMC = 180^\circ - DME = 180^\circ - DAE = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

9. Vẽ tam giác AEM đều với E và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AM.

Ta có $BAE = 80^\circ - 10^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

$\triangle BAE$ và $\triangle CAM$ có $AB = AC$,

$$BAE = MAC = 10^\circ, AE = AM$$

Suy ra $\triangle BAE = \triangle CAM$ (c.g.c)

$$ABE = ACM = 10^\circ. \text{ Do đó}$$

$$EAB = EBA = 10^\circ \Rightarrow AEB = 160^\circ$$

$$\Rightarrow BEM = 360^\circ - 60^\circ - 160^\circ = 140^\circ.$$

Xét tam giác BEM có $BE = AE = EM$ nên $EBM = EMB = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$. Do đó

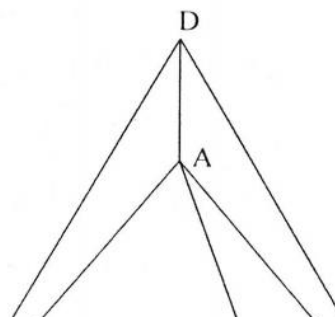
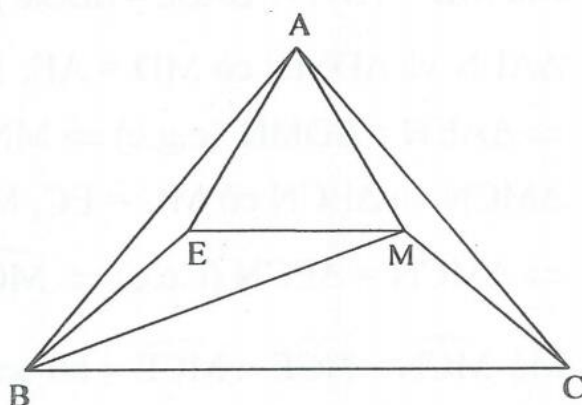
$$AMB = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ.$$

10. Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Ta có

$$ABC = ACB = 50^\circ, \text{ suy ra } ABD = 10^\circ.$$

Từ $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow ADB = ADC = 30^\circ$$



Từ đó $\triangle BAD = \triangle BMC$ (g.c.g), suy ra $BA = BM$,

dẫn đến tam giác BAM đều, suy ra $AMB = 60^\circ$

và $AMC = 180^\circ - 10^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

11. Vẽ tam giác đều MCE (N và E thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CM).

Ta có $ACE = BCM$ (cùng + $MCA = 60^\circ$)

$\triangle ACE$ và $\triangle BCM$ có $BC = AC$,

$$ACE = BCM, MC = EC$$
$$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta BCM \text{ (c.g.c)}$$
$$\Rightarrow CAE = CBM = 90^\circ$$
$$\Rightarrow AE \parallel DM \text{ (cùng } \perp AC)$$
$$\Rightarrow EAN = MDN \text{ (so le trong).}$$

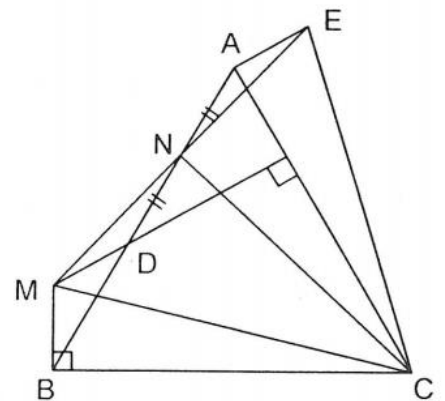
Ta có $MBD = MDB = 30^\circ \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại $M \Rightarrow MB = MD$

Mà $MB = AE$ (vì $\triangle ACE = \triangle BCM$) $\Rightarrow MD = AE$.

$\triangle AEN$ và $\triangle DMN$ có $MD = AE, MDN = EAN = 150^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AEN = \triangle DMN \text{ c.g.c} \Rightarrow MN = NE$$

$\triangle MCN$ và $\triangle ECN$ có $MC = EC, MN = EN, CN$ là cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta MCN = \Delta ECN \text{ c.c.c} \Rightarrow MCN = NCE$$
$$\text{Ma } MCN + NCE = MCE = 60^\circ \Rightarrow MCN = \frac{1}{2} MCE = 30^\circ.$$


PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI HSG

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE .

Gọi M là giao điểm của DC và BE .

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC$

b) Tính số đo $\angle BMC$

Bài 2: Tam giác ABC cân ở B có $\angle ABC = 80^\circ$. I là một điểm nằm trong tam giác, biết

$\angle IAC = 10^\circ$, và $\angle ICA = 30^\circ$. Tính $\angle AIB$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $\angle A = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và BE , tính số đo của góc $\angle BED$.

Bài 4: Cho tam giác ABC có $\angle A = 3\angle B = 6\angle C$

a) Tính số đo các góc của $\triangle ABC$

b) Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Chứng minh: $AD < BD < CD$

Bài 5: Cho Oz là tia phân giác của $\angle xOy = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C . Kẻ $BH \perp Oy$; $CM \perp Oy$; $BK \perp Oz$ ($H, M \in Oy$; $K \in Oz$). MC cắt Ox tại P . Chứng minh:

a) K là trung điểm của OC

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

b) ΔKMC là tam giác đều

c) $OP > OC$

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $\angle BAC = 60^\circ$. Chứng minh rằng

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$$

Bài 7: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M . Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC

b) ΔKMC là tam giác đều

c) Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh ΔAKM

Bài 8: Cho ΔABC nhọn có góc $A = 60^\circ$. Phân giác ABC cắt AC tại D , phân giác ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I

a) Tính số đo $\angle BIC$

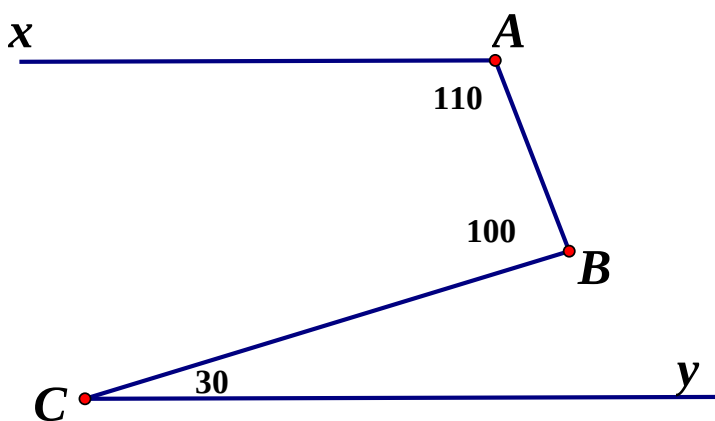
b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\Delta CID = \Delta CIF$

c) Trên cạnh IF lấy M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh ΔBCM là tam giác đều.

Bài 9: Cho $\angle xOy = 140^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy . Gọi Om là tia phân giác của góc

$\angle xOz$, On là tia phân giác của $\angle yOz$. Tính $\angle mOn$

Bài 10: Cho hình vẽ, biết $A = 110^\circ, \angle ABC = 100^\circ, \angle C = 30^\circ$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Cy$



Bài 11: Cho tam giác ABC có $AB = AC$; $A = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MBC = 10^\circ$, $MCB = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB

Bài 12: Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$, $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh rằng I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^\circ$, $MEB = 25^\circ$. Tính HEM và BME

Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại A , $B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $KBC = 10^\circ$, $KCB = 30^\circ$.

a) Chứng minh $BA = BK$

b) Tính số đo BAK

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BAC = BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC , BA lần lượt tại D và E . Cho biết $CAD = 60^\circ$, $ECA = 50^\circ$

Tính số đo ADE

Câu 15.

1. Cho $\triangle ABC$ có $B + C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $ABM = ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $ACN = ACO$. Chứng minh rằng

a) $AM = AN$

b) $\triangle MON$ là tam giác đều

2. Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất

câu 16. Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D

a) Chứng minh $BEH = ACB$

b) Chứng minh $DH = DC = DA$

c) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân

d) Chứng minh $AE = HC$

Bài 17: Cho $\triangle DEF$ vuông tại D và $DF > DE$, kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF). Gọi M là trung điểm của EF .

a) Chứng minh $MDH = E - F$

b) Chứng minh $EF - DE > DF - DH$

Bài 18: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

c) $AM \perp EF$.

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác BE, CF của $\triangle ABC$ và ACB cắt nhau tại I

(E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai

điểm M, N sao cho $BIM = CIN = 30^\circ$

- Tính số đo của $\angle MIN$
- Chứng minh $CE + BF < BC$

Bài 20: Cho tam giác đều ABC . M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$.

Tính số đo góc $\angle AMB$

Bài 21: Cho tam giác ABC có góc nhọn ($AB < AC$). Về phía ngoài tam giác ABC các tam

giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

- Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$
- Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều
- Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$.

Bài 22. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho

$ME = MA$. Chứng minh rằng:

- $AC = EB$ và $AC \parallel BE$
- Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.
- Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ, \angle MEB = 25^\circ$.

Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$

Bài 23. Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc $\angle COD$ bằng 90° .

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

a) Chứng minh rằng: $AC + BD = CD$.

b) Chứng minh rằng: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$

2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Bài 24. Cho góc $xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Để Am song song với Ox thì số đo của góc OAm là:

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

Bài 25. Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H, kẻ

$BK \perp Az$ và $Bt \parallel Ay$, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M. Chứng minh:

- a) K là trung điểm của AC
b) $\triangle KMC$ là tam giác đều
c) Cho $BK = 2cm$, Tính các cạnh của $\triangle AKM$

Bài 26. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

- a) $DM = EN$
b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN.
c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC.

Bài 27: Cho tam giác ABC, AD là tia phân giác của góc A và $B > C$.

a) Chứng minh rằng $\angle ADC - \angle ADB = B - C$.

b) Vẽ đường thẳng AH vuông góc BC tại H. Tính $\angle ADB$ và $\angle HAD$ biết $B - C = 40^\circ$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

c) Vẽ đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc đỉnh A, nó cắt đường thẳng BC tại E. Chứng

minh rằng $\angle AEB = \angle HAD = \frac{B-C}{2}$

Bài 28: Cho tam giác ABC vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15\text{cm}$. Tia phân giác góc C cắt AB tại

D. Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$).

a) Chứng minh $AC = CE$.

b) Tính độ dài AB; AC.

c) Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia DE tại M. Tính $\angle DCM$.

Bài 29: Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Biết $\angle ADB = 85^\circ$

a/ Tính: $B - C$

b/ Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $4B = 5C$

Bài 30: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$

Bài 31: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$.

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Tính HEM và BME

Bài 32: Cho tam giác ABC có góc B bằng 45^0 , góc C bằng 120^0 . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB

Bài 33: Cho tam giác ABC cân tại A , $A = 80^0$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho $IBC = 10^0$, $ICB = 30^0$. Tính AIB

Bài 34: Cho $\triangle ABC$ cân tại A và có $A = 100^0$, tia phân giác của B cắt AC tại D . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại I

- Chứng minh $BA = BI$
- Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Chứng minh $\triangle AIK$ đều

Tính các góc của tam giác BCK

Bài 35: Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

- $AC = EB$, $AC \parallel BE$
- Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh rằng I, M, K thẳng hàng
- Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^0$, $MEB = 25^0$. Tính HEM và BME

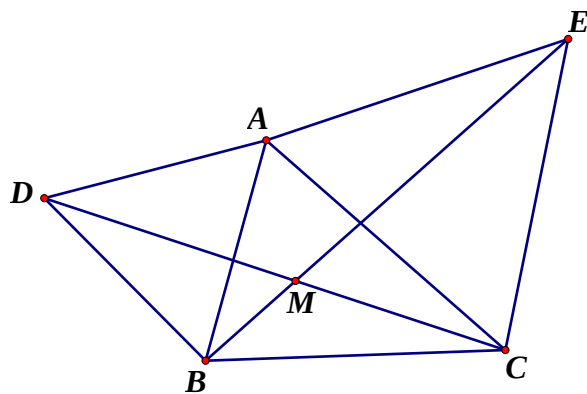
Bài 36: Cho tam giác ABC có $B = 45^0$, $C = 120^0$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính ADB

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD , ACE .

Gọi M là giao điểm của DC và BE

- Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC$
- Tính số đo BMC

Lời giải:

$\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

$$AD = AB (\triangle ADB \text{ đều}); AE = AC (\triangle AEC \text{ đều})$$

$$\angle BAE = \angle DAC (= 60^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \Rightarrow \angle ACM = \angle AEM$$

$$\angle BMC = \angle MCE + \angle CEM$$

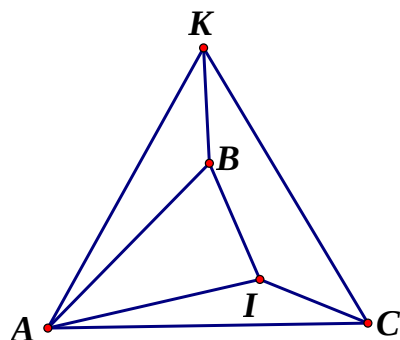
$$= \angle MCA + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEM + \angle ACE + \angle CEM$$

$$= \angle AEC + \angle ACE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Bài 2: Tam giác ABC cân ở B có $\angle ABC = 80^\circ$. I là một điểm nằm trong tam giác, biết

$$\angle IAC = 10^\circ, \text{ và } \angle ICA = 30^\circ. \text{ Tính } \angle AIB$$

Lời giải:

$$\triangle ABC \text{ cân ở } B, \angle ABC = 80^\circ \text{ nên } \angle BAC = \angle BCA = 50^\circ$$

$$\text{Vì } \angle IAC = 10^\circ, \angle ICA = 30^\circ \text{ nên } \angle IAB = 40^\circ, \angle ICB = 20^\circ$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Vẽ tam giác đều AKC (K và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AC)

Ta có: $BAK = BCK = 10^\circ$

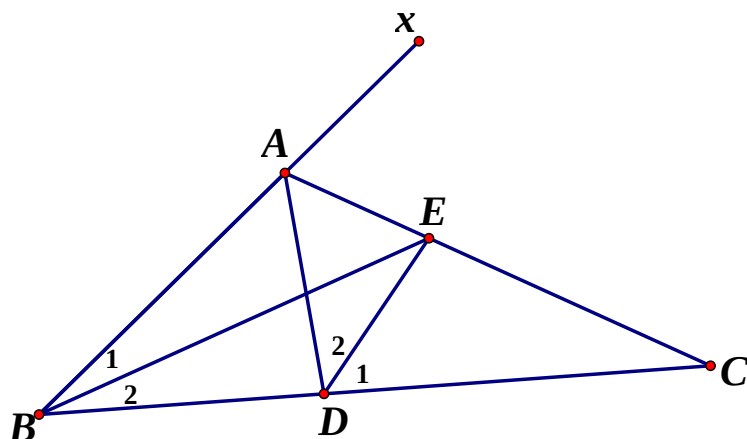
$$\triangle ABK = \triangle CKB(c.g.c) \Rightarrow BAK = BCK = 30^\circ$$

$$\triangle ABK = \triangle AIC(g.c.g) \Rightarrow AB = AI$$

$$\triangle ABI \text{ cân ở } A \Rightarrow AIB = 70^\circ$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và BE , tính số đo của góc BED .

Lời giải:



Gọi Ax là tia đối của tia AB ta có: $BAD = DAC = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ có AE là tia phân giác góc ngoài của đỉnh A

BE là phân giác của góc B chúng cắt nhau tại E nên DE là phân giác góc ngoài của D, do đó:

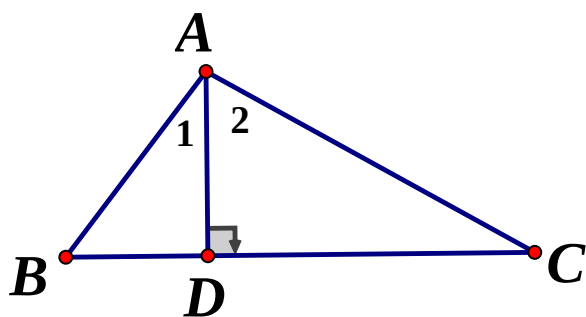
$$BED = D_1 - B_1 = \frac{ADC - ABC}{2} = \frac{BAD}{2} = 30^\circ$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có $A = 3B = 6C$

a) Tính số đo các góc của $\triangle ABC$

b) Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Chứng minh: $AD < BD < CD$

Lời giải:



a) Từ $A = 3B = 6C \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = \frac{A+B+C}{6+2+1} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$

$$\Rightarrow A = 120^\circ, B = 40^\circ, C = 20^\circ$$

Vậy $A = 120^\circ, B = 40^\circ, C = 20^\circ$

b) Trong $\triangle ACD$ có:

$$\angle ADC = 90^\circ, C = 20^\circ \Rightarrow \angle A_2 = 70^\circ \Rightarrow \angle A_1 = 50^\circ$$

Xét $\triangle ABD$ có $B = 40^\circ > C = 20^\circ \Rightarrow AB < AC \Rightarrow AB^2 < AC^2 (*)$

Áp dụng định lý Pytago cho hai tam giác vuông ADB, ADC có:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ và } AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\text{Do đó, từ } (*) \Rightarrow AD^2 + BD^2 < AD^2 + CD^2 \Rightarrow BD^2 < CD^2 \Rightarrow BD < CD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AD < BD < CD$$

Bài 5: Cho Oz là tia phân giác của $\angle xOy = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song

song với tia Oy cắt Oz tại điểm C . Kẻ $BH \perp Oy$; $CM \perp Oy$; $BK \perp Oz$ ($H, M \in Oy$; $K \in Oz$). MC cắt

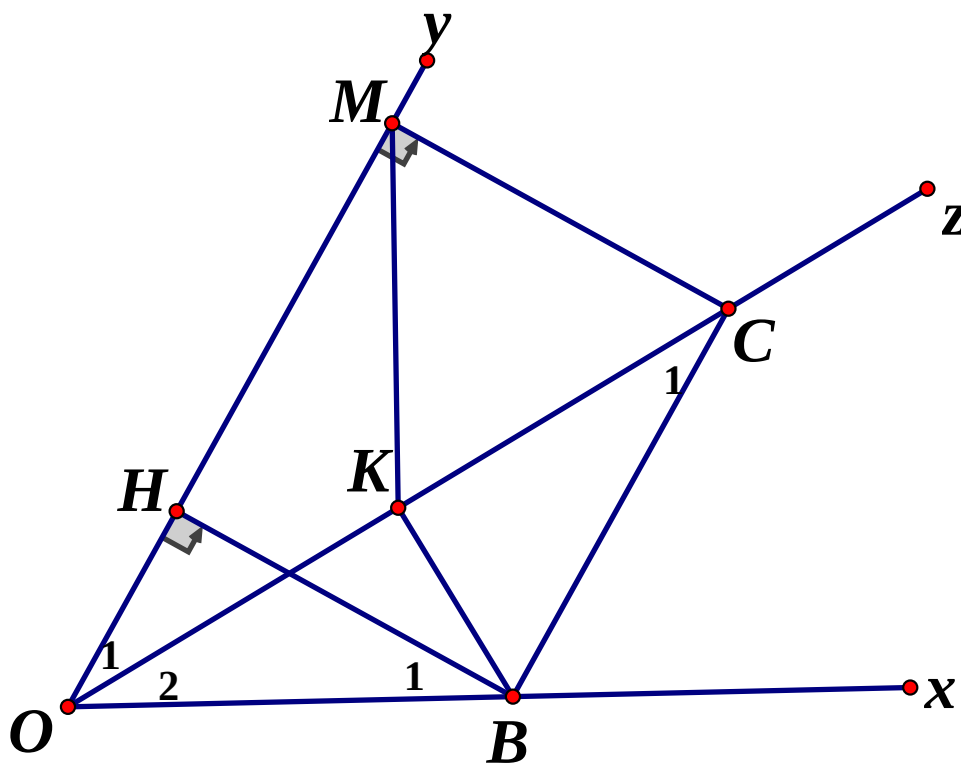
Ox tại P . Chứng minh:

a) K là trung điểm của OC

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều

c) $OP > OC$

Lời giải



$\Rightarrow O_2 = C_1 \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại B $\Rightarrow BO = BC$, mà $BK \perp OC$ tại K

b) Học sinh lập luận để chứng minh ΔKMC cân

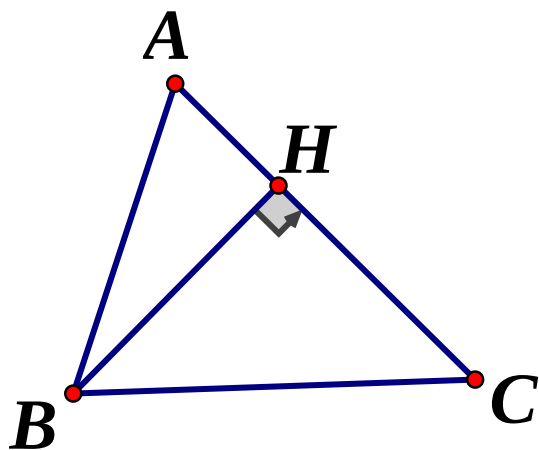
c) ΔOMC vuông tại M $\Rightarrow$ MCO nhọn $\Rightarrow$ OCP tù (hai góc MCO; OCP bù nhau)

Xét trong ΔOCP có $OC \perp OP$ nên $OP > OC$

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh rằng

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$$

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$

$$\text{Vì } \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABH = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Pytago ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \text{ và } BC^2 = BH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AH^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AH + AH^2$$

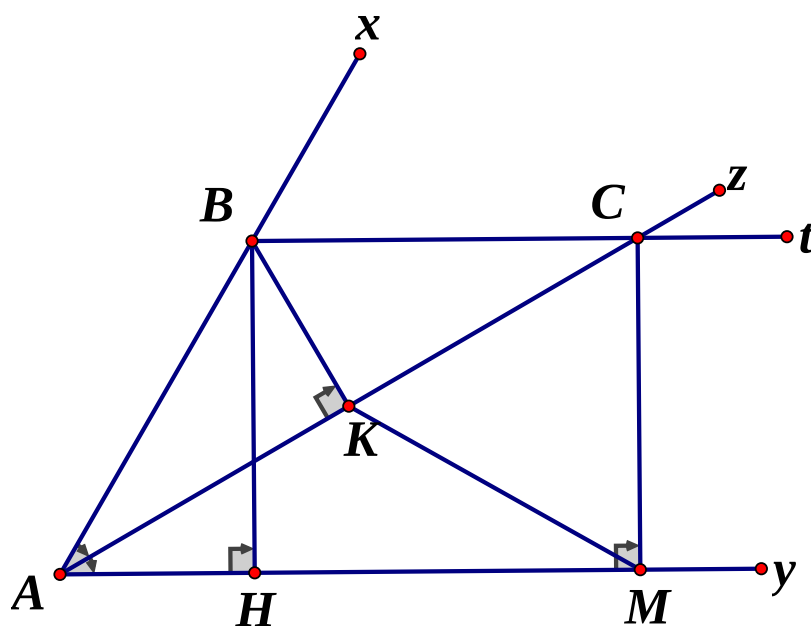
$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm

Bài 7: Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC
- $\triangle KMC$ là tam giác đều
- Cho $BK = 2\text{cm}$, Tính các cạnh $\triangle AKM$

Lời giải



$\triangle ABC$ cân tại B do $\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$ và BK là đường cao

$\Rightarrow$ BK là đường trung tuyến $\Rightarrow$ K là trung điểm của AC

$\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$

Ta có $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác $\angle MCB = 90^\circ$ và $\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $\angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AK = 2.2 = 4\text{cm}$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo định lý Pytago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{Mà } KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo câu b, $AB = BC = 4$; $AH = BK = 2$; $HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

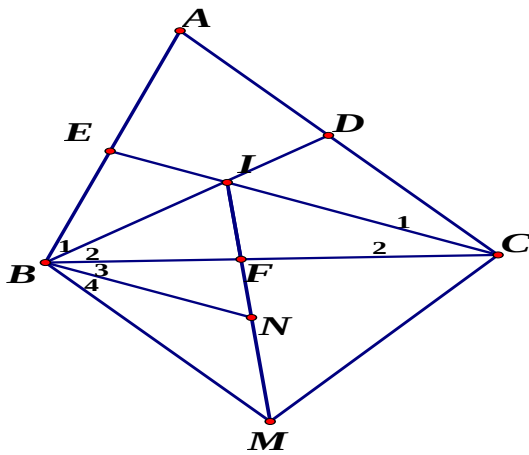
Bài 8: Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc $A = 60^\circ$. Phân giác ABC cắt AC tại D , phân giác ACB cắt AB tại E . BD cắt CE tại I

a) Tính số đo $\angle BIC$

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$

c) Trên cạnh IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ là tam giác đều.

Lời giải



a) BD là phân giác của $\triangle ABC$ nên $B_1 = B_2 = \frac{\angle ABC}{2}$

CE là phân giác của $\triangle ACB$ nên $C_1 = C_2 = \frac{\angle ACB}{2}$

Mà tam giác ABC có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow B_2 + C_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$

b) $\triangle BIE = \triangle BIF$ (c.g.c) $\Rightarrow BIE = BIF$

$\angle BIC = 120^\circ \Rightarrow \angle BIE = 60^\circ \Rightarrow \angle BIE = \angle BIF = 60^\circ$

Mà $\angle BIE + \angle BIF + \angle CIF = 180^\circ \Rightarrow \angle CIF = 60^\circ$

$\angle CID = \angle BIE = 60^\circ$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle CIF = \angle CID = 60^\circ \Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF$ (g.c.g)

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IB = IN \Rightarrow NM = IC$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

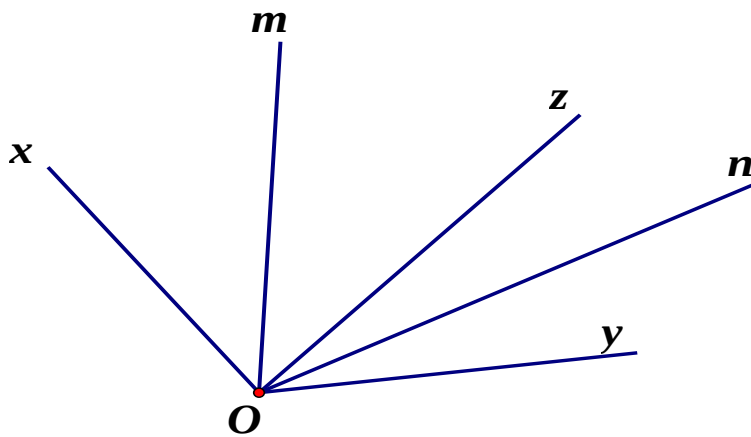
$\Rightarrow \triangle BIN$ đều $\Rightarrow BN = BI$ và $BNM = 120^\circ \Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BM = BC$ và $B_2 = B_4 \Rightarrow \triangle BCM$ đều

Bài 9: Cho $\angle xOy = 140^\circ$, tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy . Gọi Om là tia phân giác của góc

$\angle xOz$, On là tia phân giác của $\angle yOz$. Tính mOn

Lời giải



Vì Om là tia phân giác của $\angle xOz$ nên: $mOz = \frac{xOz}{2}$

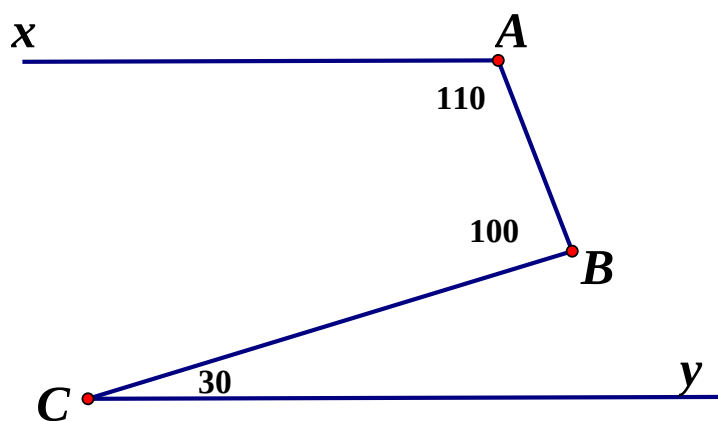
Vì On là tia phân giác của $\angle yOz$ nên: $nOz = \frac{yOz}{2}$

Vì tia Oz nằm giữa hai tia Om, On nên:

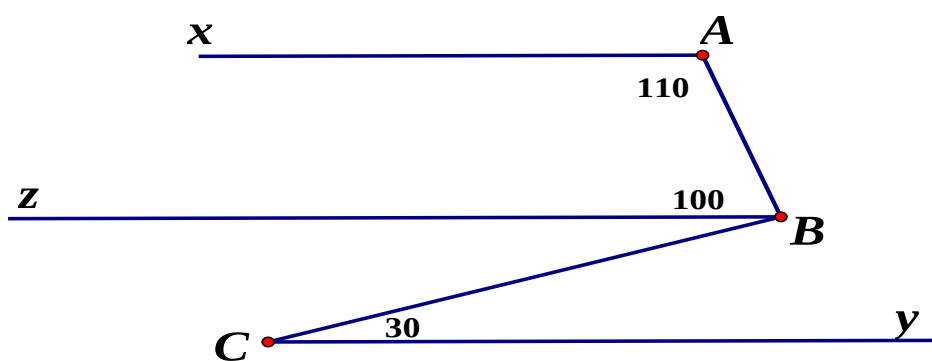
$$mOn = \frac{xOz}{2} + \frac{zOy}{2} = \frac{xOy}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Vậy $mOn = 70^\circ$

Bài 10: Cho hình vẽ, biết $A = 110^\circ, \angle ABC = 100^\circ, C = 30^\circ$. Chứng minh rằng $Ax \parallel Cy$



Lời giải



Qua B vẽ tia $Bz \parallel Ax$ (1)

Vì $Bz \parallel Ax$ nên $ABz + A = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

$$\Rightarrow ABz = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\text{Suy ra } CBz = ABC - ABz = 100^\circ - 70^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Do đó: } CBz = BCy = 30^\circ$$

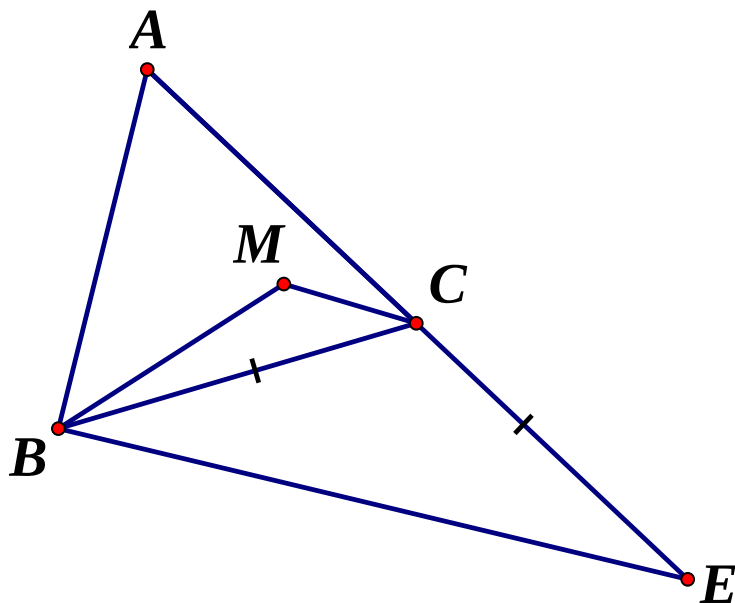
Mà hai góc so le trong nên $Bz \parallel Cy$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $Ax \parallel Cy$

Bài 11: Cho tam giác ABC có $AB = AC$; $A = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho

$$MBC = 10^\circ, MCB = 20^\circ. \text{ Tính số đo góc } AMB$$

Lời giải



Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB \Rightarrow BEC = EBC = 70^\circ$

Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ABE (c.g.c) \Rightarrow \angle AMB = \angle AEB = 70^\circ$

Bài 12: Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho

$ME = MA$. Chứng minh rằng:

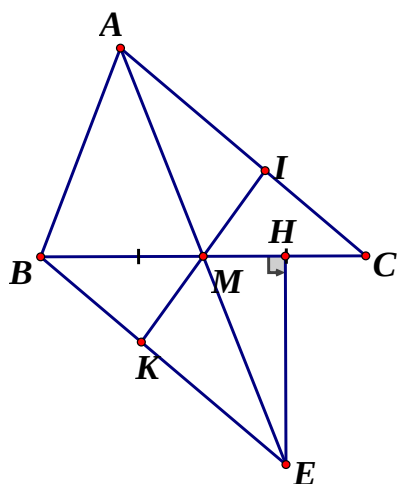
a) $AC = EB, AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh rằng

I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $HBE = 50^\circ, MEB = 25^\circ$. Tính HEM và BME

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM(gt)$; $AMC = EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC(gt)$ nên

$$\triangle AMC = \triangle EMB(c.g.c) \Rightarrow AC = EB$$

b) Vì $\Delta AMC = \Delta EMB \Rightarrow MAC = MEB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong \

Suy ra $AC // BE$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt); $MAI = MEK$ ($\angle AMC = \angle EMB$)

Nên $AMI = EMK$ mà $AMI + IME = 180^0$ (kề bù)

$$\Rightarrow EMK + IME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K \text{ thẳng hàng}$$

c) Trong ΔBHE ($H = 90^\circ$) có $HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow HBE = 90^0 - HEB = 90^0 - 50^0 = 40^0$$
$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^{\circ} - 25^{\circ} = 15^{\circ}$$

BME là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

Nên $BME = HEM + MHE = 15^{\circ} + 90^{\circ} = 105^{\circ}$

(định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại $A, B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho

$$KBC = 10^0, KCB = 30^0.$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

c) Chứng minh $BA = BK$

d) Tính số đo BAK

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BAC = BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và

Cy cắt BC, BA lần lượt tại D và E . Cho biết $CAD = 60^\circ, ECA = 50^\circ$

Tính số đo ADE

Câu 15.

3. Cho $\triangle ABC$ có $B + C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia

AC lấy điểm M sao cho $ABM = ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho

$ACN = ACO$. Chứng minh rằng

c) $AM = AN$

d) $\triangle MON$ là tam giác đều

4. Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất

câu 16. Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia

BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D

e) Chứng minh $BEH = ACB$

f) Chứng minh $DH = DC = DA$

g) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân

h) Chứng minh $AE = HC$

B.Lời giải bài minh họa.

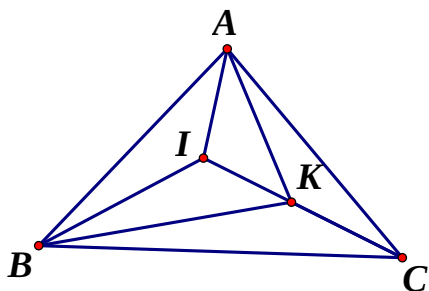
Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại $A, B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho

$KBC = 10^\circ, KCB = 30^\circ$.

e) Chứng minh $BA = BK$

f) Tính số đo BAK

Lời giải

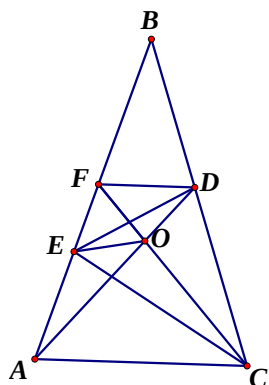
a) Vẽ tia phân giác ABK cắt CK ở I , ta có: $\triangle IBC$ cân nên $IB = IC$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \triangle BIA = \triangle CIA (c.c.c) \Rightarrow \angle BIA = \angle CIA = 120^\circ,$$

$$\text{do đó } \triangle BIA = \triangle BIK (g.c.g) \Rightarrow BA = BK$$

b) Từ phần a ta tính được $BAK = 70^\circ$.**Câu 14.** Cho tam giác ABC có $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC, BA lần lượt tại D và E . Cho biết $\angle CAD = 60^\circ, \angle ECA = 50^\circ$ Tính số đo $\angle ADE$

Lời giải

Kẻ tia CF sao cho $\angle ACF = 60^\circ$ ($F \in AB$), Tia CF cắt AD tại $O \Rightarrow \triangle AOC; \triangle FOD$ đều

$$\Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$\triangle AEC$ có: $EAC = 80^\circ, ACE = 50^\circ \Rightarrow CEA = 50^\circ \Rightarrow \triangle AEC$ cân tại A

Có $EAO = 20^\circ \Rightarrow AEO = AOE = 80^\circ \Rightarrow EOF = 40^\circ$

Suy ra $AFC = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = EOF$

$\Rightarrow \triangle EOF$ cân tại E

$\Rightarrow EO = EF \Rightarrow \triangle FDE = \triangle ODE (c.c.c)$

$\Rightarrow ODE = FDE = \frac{1}{2} FDA = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$

Vậy $ADE = 30^\circ$

Câu 15.

5. Cho $\triangle ABC$ có $B + C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia

AC lấy điểm M sao cho $ABM = ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho

$ACN = ACO$. Chứng minh rằng

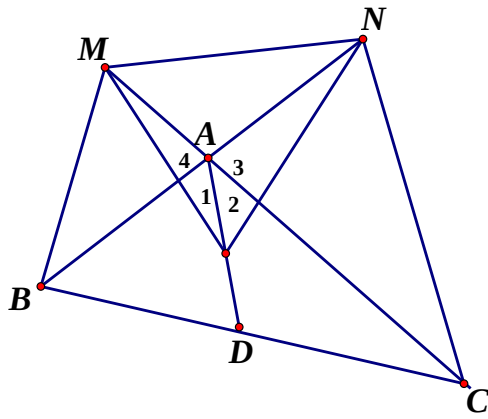
e) $AM = AN$

f) $\triangle MON$ là tam giác đều

6. Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất

Lời giải

1.



a) $\triangle ABC$ có $B + C = 60^\circ$ nên $A = 120^\circ$

Do AD là tia phân giác nên $A_1 = A_2 = 60^\circ$, ta lại có $A_3 = A_4 = 180^\circ - A = 60^\circ$

$$\text{Suy ra } A_1 = A_2 = A_3 = A_4 (= 60^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \triangle ABM = \triangle ABD (g.c.g) \Rightarrow AM = AD(1) \\ \triangle ACN = \triangle ACO (g.c.g) \Rightarrow AN = AD(2) \end{cases}$$

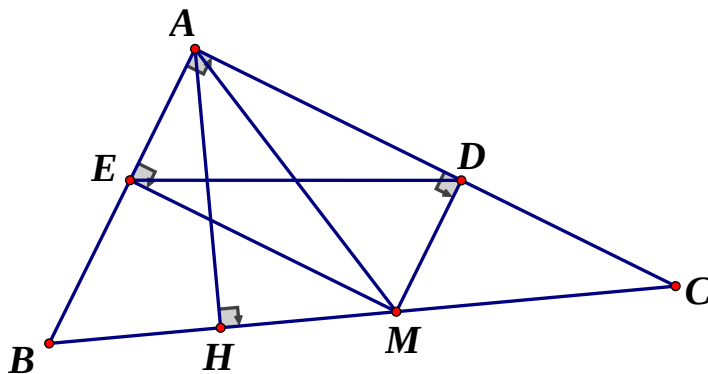
Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$

b) $\triangle AOM = \triangle ONN (c.g.c) \Rightarrow OM = ON(3)$

$$\triangle AOM = \triangle AMN (c.g.c) \Rightarrow OM = NM(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM \Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều

2.



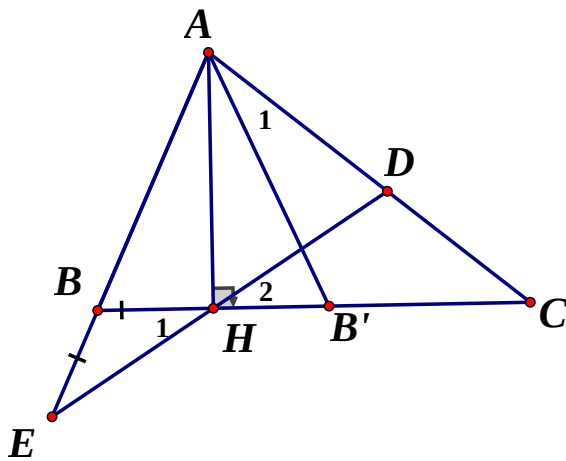
$$DE = AM \geq AH \text{ (AH là đường cao của } \triangle ABC)$$

Vậy DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng với H

câu 16. Cho tam giác ABC có $B < 90^\circ$ và $B = 2C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D

- i) Chứng minh $BEH = ACB$
- j) Chứng minh $DH = DC = DA$
- k) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân
- l) Chứng minh $AE = HC$

Lời giải



- a) $\triangle BEH$ cân tại B nên $E = H_1$; $ABC = E + H_1 = 2E$;

$$ABC = 2C \Rightarrow BEH = ACB$$

- b) Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$

$$\triangle DAH \text{ có: } \angle DAH = 90^\circ - C; \angle DHA = 90^\circ - H_2 = 90^\circ - C$$

$$\Rightarrow \triangle DAH \text{ cân tại } D \text{ nên } DA = DH$$

- c) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $B = B' = 2C$

$$B' = A_1 + C \text{ nên } 2C = A_1 + C \Rightarrow C = A_1 \Rightarrow \triangle AB'C \text{ cân tại } B'$$

- d) $AB = AB' = CB'$; $BE = BH = B'H$

$$\text{Có: } AE = AB + BE; \quad HC = CB' + B'H \Rightarrow AE = HC$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Bài 17: Cho $\triangle DEF$ vuông tại D và $DF > DE$, kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF). Gọi M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh $MDH = E - F$

b) Chứng minh $EF - DE > DF - DH$

Lời giải

a) Chứng minh $MDH = E - F$

Hình vẽ đúng, chính xác

Vì M là trung điểm của EF suy ra $MD = ME = MF$

$\Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M $\Rightarrow E = MDE$

Mà $HDE = F$ cùng phụ với E

Ta có $MDH = MDE - HDE$

Vậy $MDH = E - F$

b) Chứng minh $EF - DE > DF - DH$

Trên cạnh EF lấy K sao cho $EK = ED$, trên cạnh DF lấy I sao cho $DI = DH$

Ta có $EF - DE = EF - EK = KF$

$DF - DH = DF - DI = IF$

Ta cần chứng minh $KF > IF$

- $EK = ED \Rightarrow \triangle DHK \Rightarrow EDK = EKD$

- $EDK + KDI = EKD + HDK = 90^\circ$

$\Rightarrow KDI = HDK$

- $\triangle DHK = \triangle DIK$ (c-g-c)

$\Rightarrow KID = DHK = 90^\circ$

Trong $\triangle KIF$ vuông tại I $\Rightarrow KF > FI$ điều phải chứng minh

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Bài 18: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

- a) $FB = EC$
- b) $EF = 2AM$
- c) $AM \perp EF$.

Lời giải

a) Chứng minh $\triangle ABF = \triangle AEC (cgc) \Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$. Ta có $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

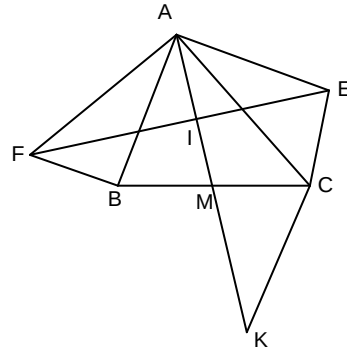
$$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

$\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;

$AF = AC$ (gt); $\angle ACK = \angle EAF$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA (cgc) \Rightarrow EF = AK = 2AM.$$

c) Từ $\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow \angle CAK = \angle AFE \Rightarrow \angle AFE + \angle FAK = \angle CAK + \angle FAK = 90^\circ$
 $\Rightarrow AK \perp EF$

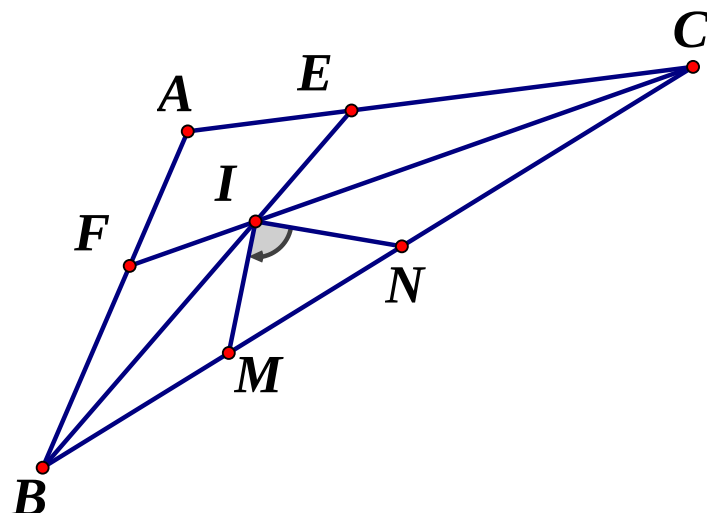


Bài 19: Cho $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác BE, CF của $\angle B$ và $\angle C$ cắt nhau tại I

(E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai

điểm M, N sao cho $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$

- a) Tính số đo của $\angle MIN$

b) Chứng minh $CE + BF < BC$ 

a) Ta có: $ABC + ACB = 180^\circ - A = 60^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 30^\circ$

$\Rightarrow BIC = 150^\circ$ mà $BIM = CIN = 30^\circ \Rightarrow MIN = 90^\circ$

b) $BIC = 150^\circ \Rightarrow FIB = EIC = 30^\circ$

Suy ra $\triangle BFI = \triangle BMI (g.c.g) \Rightarrow BF = BM$

$\triangle CNI = \triangle CEI (g.c.g) \Rightarrow CN = CE$

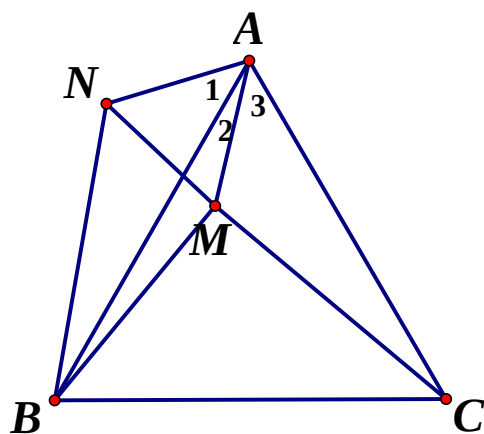
Do đó $CE + BF = BM + CN < BM + MN + NC = BC$

Vậy $CE + BF < BC$

Bài 21: Cho tam giác đều ABC . M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$.

Tính số đo góc

Lời giải:



Do $MA:MB:MC = 3:4:5$

$$\text{Đặt } \frac{MA}{3} = \frac{MB}{4} = \frac{MC}{5} = a \Rightarrow MA = 3a, MB = 4a, MC = 5a$$

Trên nửa mặt phẳng bờ AC dựng tam giác đều AMN

$$\Rightarrow AM = AN = MN = 3a \text{ và } \angle AMN = 60^\circ$$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$ có: $AB = AC$ (gt)(1); $AN = AM = 3a$ (2)

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle A_2 = 60^\circ \\ \angle A_2 + \angle A_3 = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_3 \text{ (3)}$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \triangle ABN = \triangle ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM = 5a$

Xét $\triangle BMN$ có $BN^2 = (5a)^2 = 25a^2$

$$BM^2 + MN^2 = (4a)^2 + (3a)^2 = 25a^2$$

$\Rightarrow BN^2 = BM^2 + MN^2 \Rightarrow \triangle BMN$ vuông tại M (định lý Pythagoras đảo)

$$\Rightarrow \angle NMB = 90^\circ$$

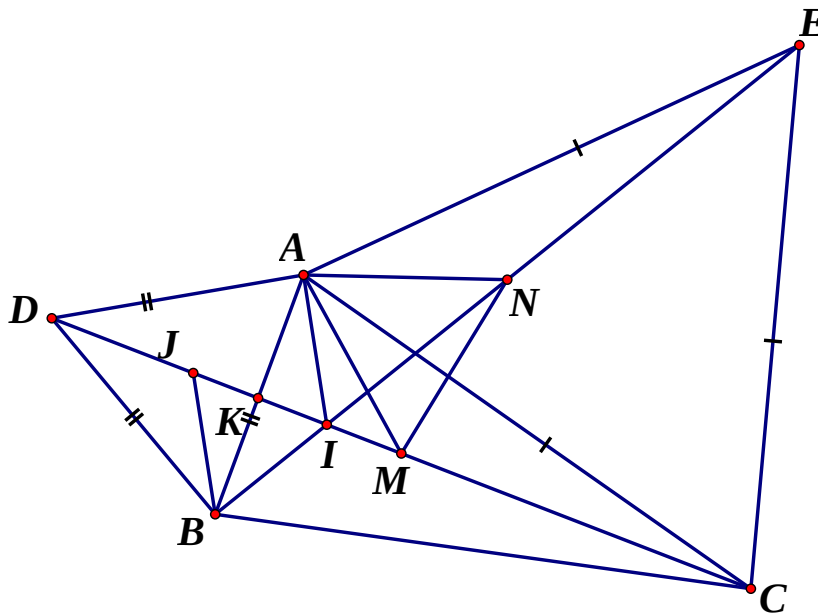
$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMN + \angle NMB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

Bài 21: Cho tam giác ABC có góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

e) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$

- f) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$
- g) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều
- h) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle DIE$

Lời giải:



a) Ta có: $AD = AB, \angle DAC = \angle BAE$ và $AC = AE \Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE (c.g.c)$

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh)

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)

c) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow CM = EN, \angle ACM = \angle AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN (c.g.c) \Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và

$\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ \Rightarrow \angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD (c.g.c) \Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$\Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$. Từ đó suy ra IA là phân giác của DIE .

Bài 22. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

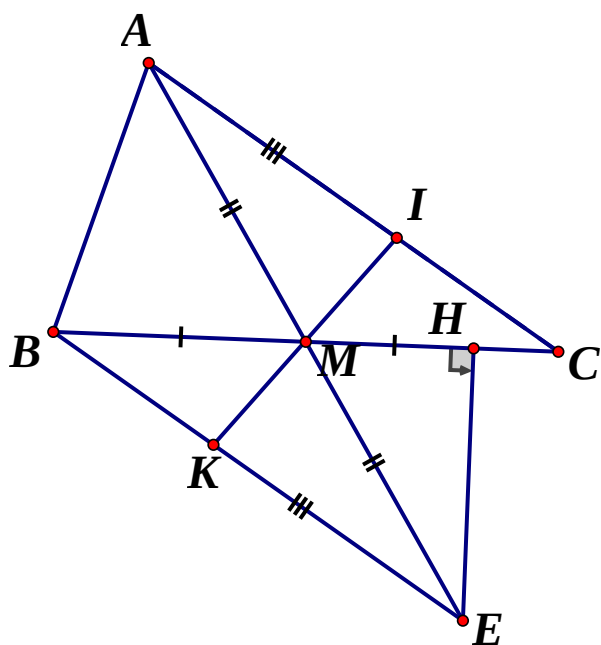
d) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

e) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

f) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$.

Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM$ (gt); $\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh); $BM = MC$ (gt)

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE) suy ra $AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt); $\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$)

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$AI = EK(gt) \Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK(c.g.c) \Rightarrow AMI = EMK$$

$$\text{Mà } AMI + IME = 180^\circ (\text{tính chất kề bù}) \Rightarrow EMK + IME = 180^\circ$$

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($H = 90^\circ$) có $HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow HEB = 90^\circ - HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$$\text{Nên } BME = HEM + MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ (\text{định lý góc ngoài của tam giác})$$

Bài 23 . Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax và By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° .

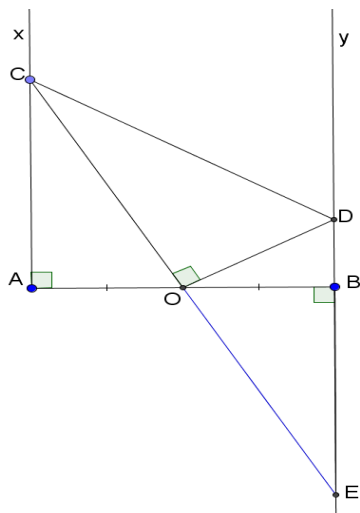
a) Chứng minh rằng: $AC + BD = CD$.

b) Chứng minh rằng: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$

2. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Lời giải



GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

A, Vẽ tia CO cắt tia đối của tia By tại điểm E.

Chứng minh $\Delta AOC = \Delta BOE$ ($g - c - g$) $\Rightarrow AC = BE; CO = EO$

Chứng minh $\Delta DOC = \Delta DOE$ ($c - g - c$) $\Rightarrow CD = ED$

Mà $ED = EB + BD = AC + BD$.

Từ đó : $CD = AC + BD$ (đpcm)

B, Áp dụng định lí Pytago vào các tam giác vuông BOE và BOD ta có:

$$\begin{cases} OE^2 = OB^2 + EB^2 \\ OD^2 = OB^2 + DB^2 \end{cases} \Rightarrow OE^2 + OD^2 = 2OB^2 + EB^2 + DB^2$$

Mà $OE^2 + OD^2 = DE^2$; Nên

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2OB^2 + EB^2 + DB^2 \\ &= 2OB^2 + EB.(DE - BD) + DB.(DE - BE) \\ &= 2OB^2 + EB.DE - EB.BD + DB.DE - DB.BE \\ &= 2OB^2 + (EB.DE + DB.DE) - 2BD.BE \\ &= 2OB^2 + DE.(EB + DB) - 2BD.BE \\ &= 2OB^2 + DE^2 - 2BD.BE \end{aligned}$$

Suy ra $2OB^2 - 2BD.BE = 0 \Rightarrow BD.BE = OB^2$

Mà $BE = AC; OB = \frac{AB}{2}$.

$$\text{Vậy } AC.BD = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} \text{ (đpcm)}$$

2.

Qua H kẻ đường thẳng // với AB cắt AC tại D, kẻ đường thẳng // với AC cắt AB tại E

Ta có $\Delta AHD = \Delta HAE$ ($g - c - g$)

$\Rightarrow AD = HE; AE = HD$

ΔAHD có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$ (1)

Từ đó $HE \perp BH$

ΔHBE vuông nên $HB < BE$ (2)

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Tương tự ta có $HC < DC$ (3)

Từ 1,2,3 $HA + HB + HC < AB + AC$ (4)

Tương tự $HA + HB + HC < AB + BC$ (5)

$HA + HB + HC < BC + AC$ (6)

Từ đó suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$ đpcm

Bài 24. Cho góc $xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy. Qua A vẽ tia Am. Để Am song song với Ox thì số đo của góc OAm là:

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

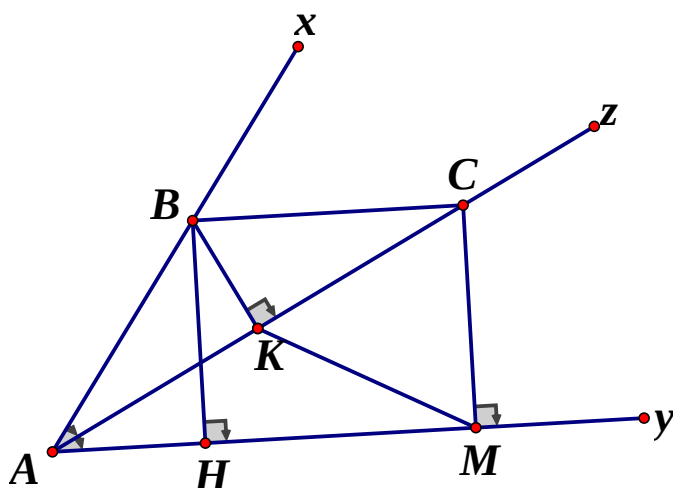
Đáp án C.

Bài 25. Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az. Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H, kẻ

$BK \perp Az$ và $Bt \parallel Ay$, Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ $CM \perp Ay$ tại M. Chứng minh:

- d) K là trung điểm của AC
e) $\triangle KMC$ là tam giác đều
f) Cho $BK = 2cm$, Tính các cạnh của $\triangle AKM$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $CAB = ACB (= MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

$$b) \quad \triangle ABH = \triangle BAK (ch - gn) \Rightarrow BH = AK \text{ mà } AK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC$$

Ta có: $BH = CM (\triangle BHM = \triangle MCB)$ mà $CK = BH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

$$\text{Mặt khác } \angle MCB = 90^\circ \text{ và } \angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 60^\circ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKC$ là tam giác đều

$$c) \quad \text{Vì } \triangle ABK \text{ vuông tại K mà } \angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4\text{cm}$$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pitago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \text{ mà } KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

Theo phần b, $AB = BC = 4\text{cm}, AH = BK = 2, HM = KC (\triangle BHM = \triangle MCB)$

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6\text{cm}.$$

Bài 26. Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

$$d) \quad DM = EN$$

e) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

f) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải

$$a) \quad \triangle MDB = \triangle NEC \Rightarrow DN = EN$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

b) $\Delta MDI = \Delta NEI \Rightarrow IM = IN \Rightarrow BC$ cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Gọi H là chân đường cao vuông góc kẻ từ A xuống BC , ta có:

$$\Delta AHB = \Delta AHC \Rightarrow HAB = HAC$$

Gọi O là giao AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I thì

$$\Delta OAB = \Delta OAC (c.g.c) \Rightarrow OBA = OCA \quad (1)$$

$$\Delta OIM = \Delta OIN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OBN = \Delta OCN (c.c.c) \Rightarrow OBM = OCM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OCA = OCN = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

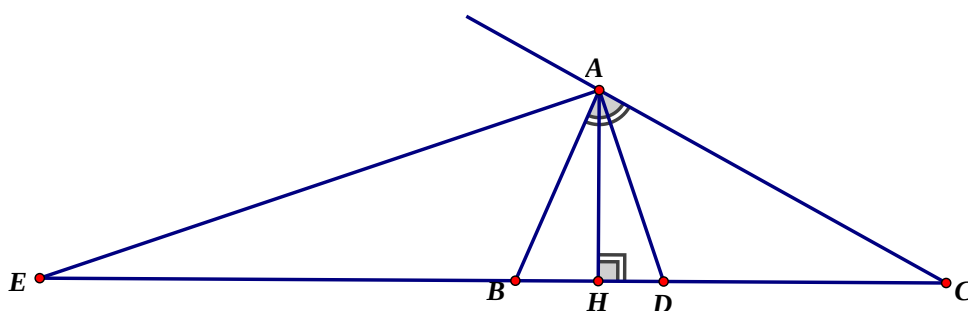
Bài 27: Cho tam giác ABC , AD là tia phân giác của góc A và $B > C$.

a) Chứng minh rằng $ADC - ADB = B - C$.

b) Vẽ đường thẳng AH vuông góc BC tại H . Tính ADB và HAD biết $B - C = 40^\circ$

c) Vẽ đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc đỉnh A , nó cắt đường thẳng BC tại E . Chứng

minh rằng $AEB = HAD = \frac{B - C}{2}$



Lời giải

a)

$$ADC = B + BAD \quad (\text{góc ngoài } \Delta ABD) \quad (1)$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$\widehat{ADB} = C + \widehat{CAD} \quad (\text{góc ngoài } \triangle ADC) \quad (2)$$

Mà AD là phân giác góc BAD nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm

b)

Ta có:

$$\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = B - C = 40^\circ$$

$$\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \frac{180^\circ + 40^\circ}{2} = 110^\circ; \widehat{ADB} = 70^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AHD} = 20^\circ$$

c)

Ta có AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh A nên $AD \perp AE$

$$\text{Xét } \triangle AED \quad \text{ta có: } \widehat{AEB} + \widehat{ADE} = 90^\circ \quad (4)$$

$$\text{Xét } \triangle AHD \quad \text{ta có: } \widehat{HAD} + \widehat{ADE} = 90^\circ \quad (5)$$

Mặt khác

$$\widehat{ADB} = C + \widehat{DAC} = C + \frac{A}{2}$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{B + C}{2}$$

$$\widehat{ADB} = C + 90^\circ - \frac{B + C}{2}$$

$$= \frac{C - B}{2} + 90^\circ$$

$$\frac{B - C}{2} + \widehat{ADB} = 90^\circ \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra đpcm

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15\text{cm}$. Tia phân giác góc C cắt AB tại

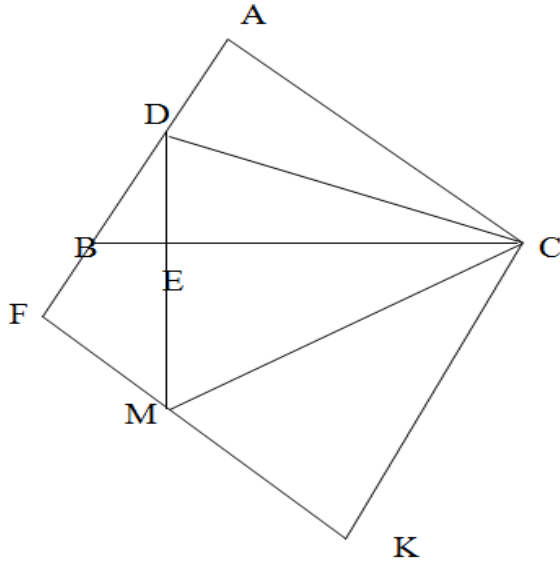
D. Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$).

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

a) Chứng minh $AC = CE$.

b) Tính độ dài AB ; AC .

c) Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia DE tại M . Tính $\angle DCM$.



Lời giải

a) C/m được $\triangle ACD = \triangle ECD$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow AC = CE$ (hai cạnh tương ứng)

$$b) \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} (gt) \Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$$

$$AB^2 = 9 \cdot 9 = 81 \Rightarrow AB = 9cm$$

$$AC^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow AC = 12cm$$

c) Kẻ $Cy \perp Fx$ cắt nhau tại K

Ta thấy $AC = AF = FK = CK = CE$ và $\angle ACK = 90^\circ$

C/M được $\triangle CEM = \triangle CKM$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle ECM = \angle KCM$ (hai góc tương ứng)

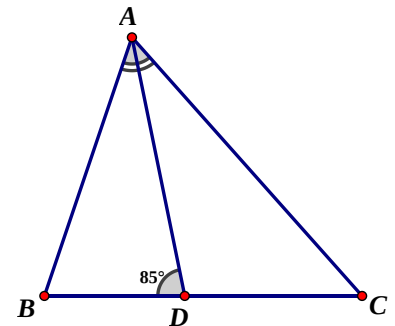
$$DCM = DCE + ECM = \frac{1}{2}ACK = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Bài 29: Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Biết

$$\angle ADB = 85^\circ$$

a/ Tính: $B - C$

b/ Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $4.B = 5.C$



Lời giải

a) Xét $\triangle ADC$ có $\angle ADB$ là góc ngoài tại D

$$\Rightarrow \angle ADB = C + \angle DAC = 85^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle ADB$ có $\angle ADC$ là góc ngoài tại D

$$\Rightarrow \angle ADC = B + \angle BAD = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ \quad (2)$$

Mà $\angle DAC = \angle BAD$ (Vì AD là tia phân giác của góc A)

$$\Rightarrow \text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow B - C = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ$$

$$\text{b) Vì } B - C = 10^\circ \text{ mà } 4.B = 5.C \Rightarrow \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = \frac{B-C}{5-4} = 10^\circ$$

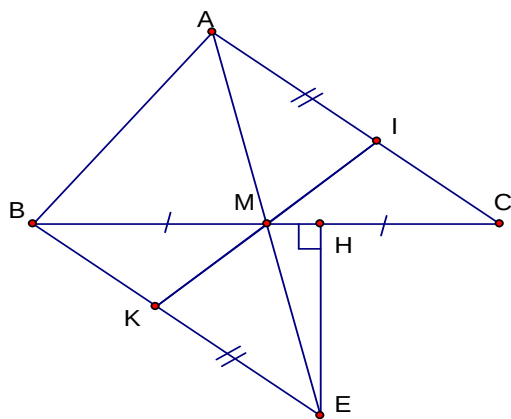
$$\Rightarrow B = 50^\circ \text{ và } C = 40^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$$

Bài 30: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$

**Lời giải**

a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên : } \triangle AMC = \triangle EMB \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AC = EB$$

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$$

Mà $\angle MAC$ và $\angle MEB$ là 2 góc có vị trí so le trong

Suy ra $AC \parallel BE$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có :

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle MAI = \angle MEK \quad (\text{vì } \triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \quad (\text{gt})$$

$$\text{Nên } \triangle AMI = \triangle EMK \quad (\text{c.g.c})$$

$$\text{Suy ra } \angle AMI = \angle EMK$$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Ba điểm I;M;K thẳng hàng (đpcm)

c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$$\text{Nên } \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

(định lý góc ngoài của tam giác)

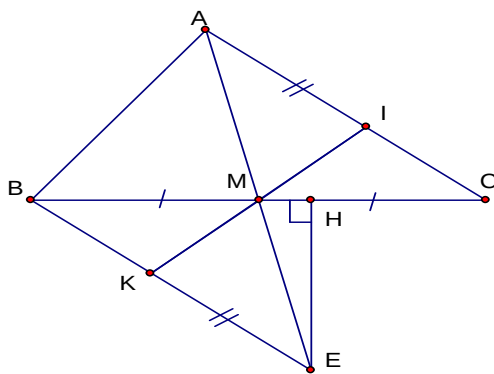
Bài 31: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của của tia MA lấy điểm E sao cho ME = MA. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I , M , K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$) . Biết $\angle HBE = 50^\circ$; $\angle MEB = 25^\circ$.

Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$



Lời giải

a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có : $AM = EM$ (gt)

$\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = EB$ (Hai cạnh tương ứng)

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong Suy ra $AC \parallel BE$.

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có : $AM = EM$ (gt)

$\angle MAI = \angle MEK$ (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$)

$AI = EK$ (gt)

Nên $\triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c) $\Rightarrow MI = EK$

Mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow$ Ba điểm I;M;K thẳng hàng

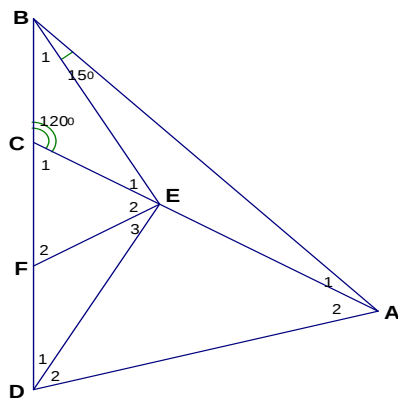
c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$ $\angle BME$ là góc

ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

$\Rightarrow \angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$

Bài 32: Cho tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB.



Lời giải

Trên CA lấy điểm E sao cho $EBA = 15^\circ \Rightarrow B_1 = 30^\circ$

Ta có : $E_1 = A_1 + EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại C $\Rightarrow CB = CE$

Gọi F là trung điểm CD $\Rightarrow CB = CE = CF = FD$

Tam giác CEF cân tại C, lại có $C_1 = 180^\circ - BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Như vậy : $CB = CE = CF = FD = EF$.

Suy ra $D_1 = E_3$ mà $D_1 + E_3 = F_2 = 60^\circ$ ($\triangle CEF$ đều) $\Rightarrow D_1 = 30^\circ$

Xét tam giác CDE ta có: $CED = 180^\circ - (C_1 + D_1) = 90^\circ$ (1)

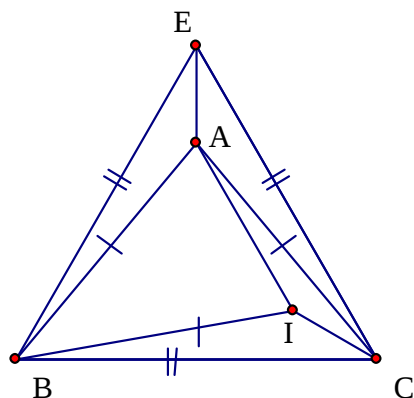
Ta có : $D_1 = B_1 \Rightarrow EB = ED$, $A_1 = EBA \Rightarrow EA = EB \Rightarrow ED = EA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tam giác EDA vuông cân tại E $\Rightarrow D_2 = 45^\circ$

Vậy $ADB = D_1 + D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

Bài 33: Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80^\circ$. Ở miền trong tam giác lấy điểm I sao cho

$IBC = 10^\circ, ICB = 30^\circ$. Tính AIB

**Lời giải**

Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC, chứa điểm A dựng tam giác đều BCE.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A, $A = 80^\circ$ nên $ABC = ACB = 50^\circ \Rightarrow ABE = ACE = 10^\circ$ và điểm A thuộc miền trong $\triangle BCE$.

Dễ dàng chứng minh được

$$\triangle ABE = \triangle ICB \text{ (g. c. g)}$$

$$\Rightarrow BA = BI \Rightarrow \triangle ABI \text{ cân tại B, ta có}$$

$$ABI = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ \Rightarrow AIB = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

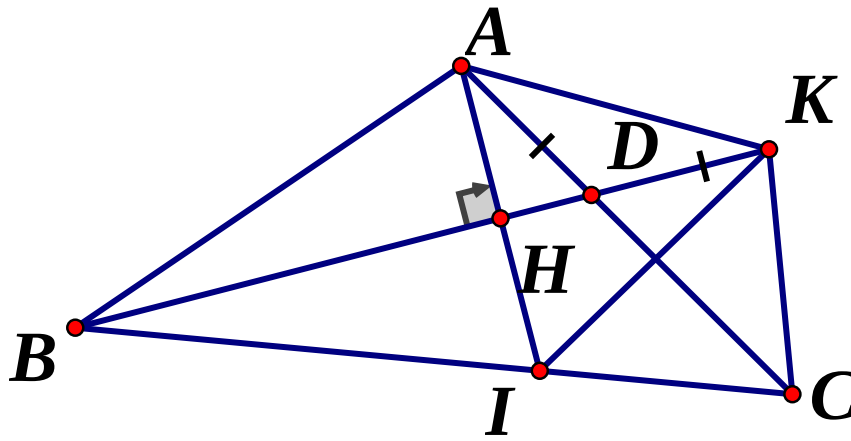
Bài 34: Cho $\triangle ABC$ cân tại A và có $A = 100^\circ$, tia phân giác của B cắt AC tại D. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại I

a) Chứng minh $BA = BI$

b) Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Chứng minh $\triangle AIK$ đều

Tính các góc của tam giác BCK

Giải



a) Gọi H là giao điểm của BD và AI

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle IBH$ có: $AHB = IHB = 90^\circ$; BH chung; $B_1 = B_2$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle IBH (g.c.g) \Rightarrow BA = BI$$

b) Xét $\triangle ABK$ và $\triangle IBK$ có:

$$BK \text{ cạnh chung; } B_1 = B_2; BA = BI \text{ (cmt)} \Rightarrow \triangle ABK = \triangle IBK (g.c.g) \Rightarrow AK = IK$$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A mà $A = 100^\circ$ nên $B = 40^\circ$

Vì $\triangle ABI$ cân tại B mà $B = 40^\circ \Rightarrow BAI = BIA = 70^\circ$

$$\Rightarrow IAC = 30^\circ \Rightarrow ADH = 60^\circ \Rightarrow ADK = 120^\circ$$

$$\triangle ADK \text{ cân tại } K \text{ mà } ADK = 120^\circ \Rightarrow DAK = 30^\circ \Rightarrow IAK = 60^\circ$$

Suy ra $\triangle AIK$ đều

c) Ta có: $B_2 = 20^\circ$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle AKC$ có: $AI = AK$; $IAC = KAC = 30^\circ$; AC chung

$$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle AKC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow AKC = AIC = 110^\circ \Rightarrow BKC = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$$

Xét $\triangle BCK$ ta suy ra được $BCK = 80^\circ$

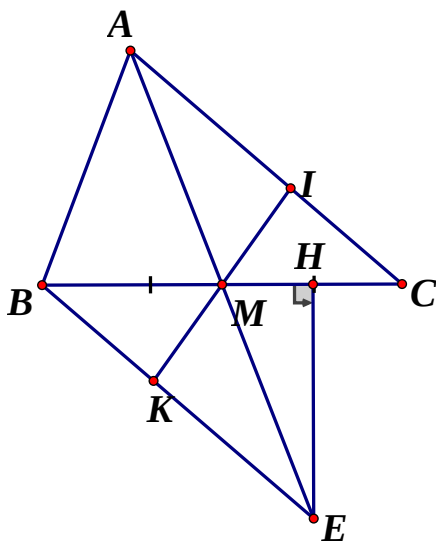
GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Bài 35: Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho

$ME = MA$. Chứng minh rằng:

- $AC = EB, AC \parallel BE$
- Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh rằng I, M, K thẳng hàng
- Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $HBE = 50^\circ, MEB = 25^\circ$. Tính HEM và BME

Lời giải:



- Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM$ (gt); $\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC$ (gt)

nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = EB$

- Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong \

Suy ra $AC \parallel BE$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt); $\angle MAI = \angle MEK$ ($\triangle AMC = \triangle EMB$)

Nên $\angle AMI = \angle EMK$ mà $\angle AMI + \angle IME = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle IME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng

- Trong $\triangle BHE$ ($H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

$$\Rightarrow HBE = 90^\circ - HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow HEM = HEB - MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

BME là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

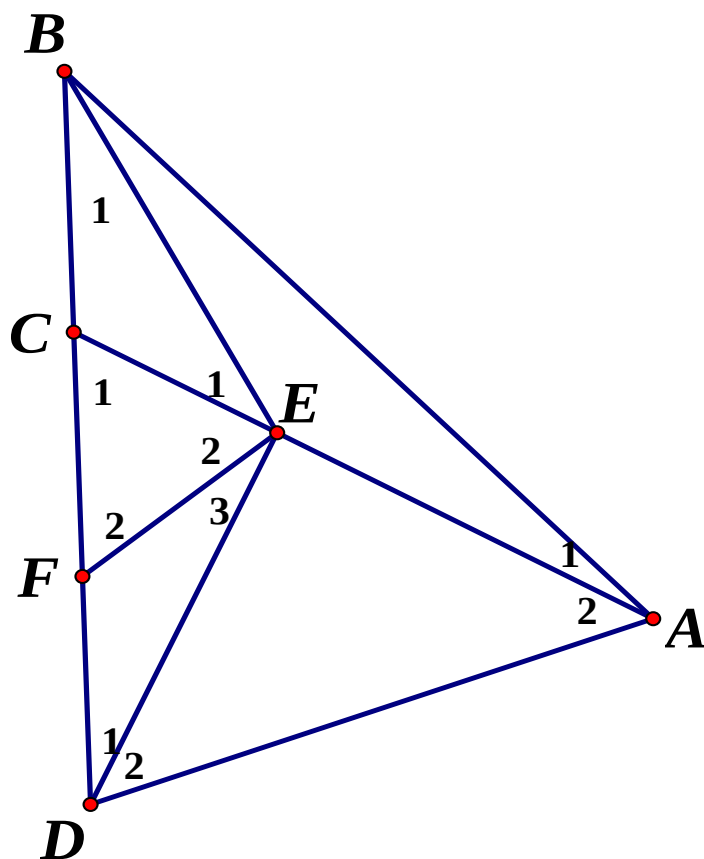
$$\text{Nên } BME = HEM + MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

(định lý góc ngoài của tam giác)

Bài 36: Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ, C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho

$$CD = 2CB. \text{ Tính } ADB$$

Lời giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $EBA = 15^\circ \Rightarrow B_1 = 30^\circ$

Ta có: $E_1 = A_1 + EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại $C \Rightarrow CB = CE$

GIÁO VIÊN: LÊ THI NGÀ

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$

$\triangle CEF$ cân tại C , lại có: $C_1 = 180^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều

Như vậy $CB = CE = CF = FD = EF$

Suy ra $D_1 = E_3$ mà $D_1 + E_3 = F_2 = 60^\circ (\triangle CEF \text{ đều}) \Rightarrow D_1 = 30^\circ$

Xét $\triangle CDE$ ta có: $\angle CED = 180^\circ - (\angle C_1 + D_1) = 90^\circ$ (1)

Ta có: $D_1 = B_1 \Rightarrow EB = ED, A_1 = EBA \Rightarrow EA = EB \Rightarrow ED = EA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle EDA$ vuông cân tại $E \Rightarrow D_2 = 45^\circ$

Vậy $\angle ADB = D_1 + D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$