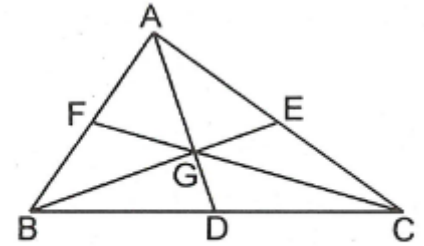


**HH7-CHỦ ĐỀ 4.CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC****PHẦN I.TRỌNG TÂM HSG CẦN ĐẠT****Chuyên đề 1. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC****A. Kiến thức cần nhớ**

1. Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối một đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.
2. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (điểm này gọi là trọng tâm của tam giác).

Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng  $\frac{2}{3}$  độ dài đường

trung tuyến đi qua điểm đó (h.18.1).



Hình 18.1

**B. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Trên tia GB và GC lấy các điểm F và E sao cho G là trung điểm của FM đồng thời là trung điểm của EN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy.

**Giải** (h.18.2)

\* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy ta có thể chứng minh chúng là ba đường trung tuyến của tam giác GBC.

\* *Trình bày lời giải.*

Gọi D là giao điểm của AG và BC. Vì G là trọng tâm của  $\triangle ABC$  nên AD là đường trung tuyến, suy ra  $DB = DC$ .

Ta có  $GF = GM = \frac{1}{3}BM$ ;  $GE = GN = \frac{1}{3}CN$ .

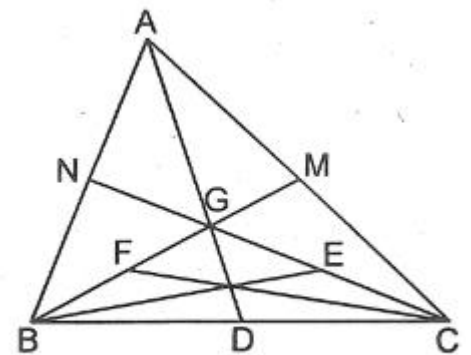
Do đó  $GF = FB \left( = \frac{1}{3}BM \right)$ ;  $GE = EC \left( = \frac{1}{3}CN \right)$ .

Xét  $\triangle GBC$  có GD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy suy ra ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

**Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia  $Bx \parallel AC$ . Lấy điểm  $D \in Bx$  và điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho  $BD = CE$ . Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  và  $\triangle ADE$  có cùng một trọng tâm.

**Giải** (h.18.3)

\* *Tìm cách giải*



Hình 18.2

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Tam giác ABC và ADE có chung đỉnh A nên muốn chứng minh chúng có cùng một trọng tâm, chỉ cần chứng minh chúng có chung một đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A.

\* Trình bày lời giải.

Vì  $Bx \parallel AC$  nên  $CBx = BCE$  (so le trong).

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có  $\triangle BMD = \triangle CME$  (c.g.c).

Suy ra  $MD = ME$  (1) và  $BMD = CME$ .

Ta có  $BME + CME = 180^\circ$  (kề bù).

Do đó  $BME + BMD = 180^\circ \Rightarrow D, M, E$  thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của DE.

$\triangle ABC$  và  $\triangle ADE$  chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AM nên trọng tâm G của hai tam giác này trùng nhau.

\* Nhận xét: Để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm ta có thể chứng minh chúng có chung một đỉnh và chung đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

**Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho  $DK = \frac{1}{3}AD$ . Qua B vẽ một đường thẳng song song với CK cắt AC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của AC.

**Giải (h.18.4)**

\* Tìm cách giải.

Để chứng minh M là trung điểm của AC ta chứng minh BM là đường trung tuyến. Muốn vậy, chỉ cần chứng minh BM đi qua trọng tâm G.

\* Trình bày lời giải.

Gọi G là giao điểm của BM và AD.

Ta có  $\triangle BDG = \triangle CDK$  (g.c.g).

Suy ra  $DG = DK = \frac{1}{3}AD$ .

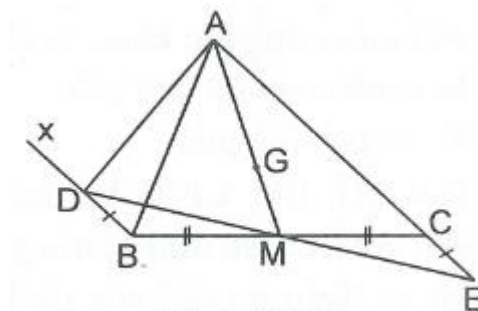
Xét  $\triangle ABC$  có điểm G nằm trên đường trung tuyến AD mà  $GD = \frac{1}{3}AD$  nên G là trọng tâm. Suy ra

BM là đường trung tuyến do đó  $MA = MC$ .

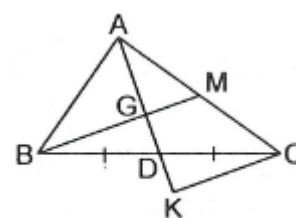
**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng ba đường trung tuyến của một tam giác có thể là ba cạnh của một tam giác khác.

**Giải (h.18.5)**

\* Tìm cách giải.



Hình 18.3



Hình 18.4

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Để chứng minh ba đường trung tuyến của tam giác này có thể là ba cạnh của một tam giác khác, ta chứng minh ba đường trung tuyến đó tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác.

\* *Trình bày lời giải.*

Gọi AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của  $\triangle ABC$ . Ba đường trung tuyến cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm H sao cho  $DH = DG$ .

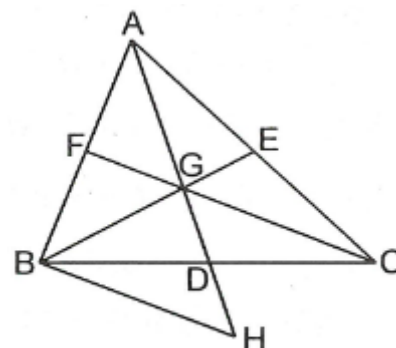
Ta có  $\triangle CDG = \triangle BDH$  (c.g.c)  $\Rightarrow GC = HB$ .

Theo tính chất ba đường trung tuyến của  $\triangle ABC$  ta có:

$$AD = \frac{3}{2}GA = \frac{3}{2}GH; BE = \frac{3}{2}GB; CF = \frac{3}{2}GC = \frac{3}{2}BH.$$

$$\text{Suy ra } \frac{AD}{GH} = \frac{BE}{GB} = \frac{CF}{BH} = \frac{3}{2}.$$

Vậy ba đường trung tuyến AD, BE, CF tỉ lệ với ba cạnh của tam giác GHB, do đó ba đường trung tuyến này có thể là ba cạnh của một tam giác.



Hình 18.5

### C. Bài tập vận dụng

#### • Chứng minh đồng quy, thẳng hàng

**1.1.** Chứng minh rằng trong một tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì đường trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn sẽ nhỏ hơn đường trung tuyến ứng với cạnh bé.

**1.2.** Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ  $AH \perp BC$ . Cho biết  $AB = \sqrt{10}cm$ ,  $AC = \sqrt{13}cm$ , và  $AH = 3cm$ . Gọi O là một điểm trên AH sao cho  $AO = 2cm$ . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và HC.

Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

#### • Chứng minh trọng tâm

**1.3.** Cho tam giác ABC. Gọi D và E là hai điểm trên cạnh BC sao cho  $BD = DE = EC$ . Vẽ đường trung tuyến AO của tam giác ABC. Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho  $OF = OA$ .

a) Chứng minh rằng D là trọng tâm của tam giác BAF; E là trọng tâm của tam giác CAF.

b) Tia AD cắt BF tại N, tia FE cắt AC tại M. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác AMN có cùng trọng tâm.

**1.4.** Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng  $a \parallel BC$ . Qua B vẽ đường thẳng  $b \parallel AC$  và qua C vẽ đường thẳng  $c \parallel AB$ . Các đường thẳng b và c cắt nhau tại A' và cắt đường thẳng a lần lượt tại C' và B'.

Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có cùng một trọng tâm.

**1.5.** Cho góc xOy và một điểm G ở trong góc đó. Hãy xác định điểm  $A \in Ox; B \in Oy$  sao cho G là trọng tâm của tam giác AOB.

#### • Tính độ dài các đường trung tuyến

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

1.6. Cho tam giác ABC cân tại A,  $AB = 3\sqrt{41}cm$ ,  $BC = 24cm$ .

Tính độ dài đường trung tuyến BM.

1.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến BE, CF cắt nhau tại G. Biết  $GB = 4\sqrt{61}cm$ ,  $GC = 2\sqrt{601}cm$ . Tính chu vi tam giác ABC.

1.8. Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB^2 = 2AC^2$ .

Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM và CN vuông góc với nhau.

1.9. Chứng minh rằng tổng ba đường trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn  $\frac{3}{4}$  chu vi của tam giác đó.

- Chứng minh trung tuyến, trung điểm

1.10. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BE và CF bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng  $AG \perp BC$ .

1.11. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho  $AD = \frac{2}{3}AC$ . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho  $CE = CB$ . Tia BD cắt AE tại điểm M. Trên tia CM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của NC. Chứng minh rằng  $AN = BC$ .

1.12. Cho tam giác ABC và trọng tâm G của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi  $AB + GB = AC + GC$ .

1.13. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

Chứng minh rằng  $AM > \frac{1}{2}BC$  khi và chỉ khi  $A < 90^\circ$ .

1.14. Cho tam giác ABC trọng tâm G.

Chứng minh rằng nếu  $BGC < 90^\circ$  thì  $AB + AC > 3BC$ .

### Hướng dẫn giải

1.1. (h.18.6)

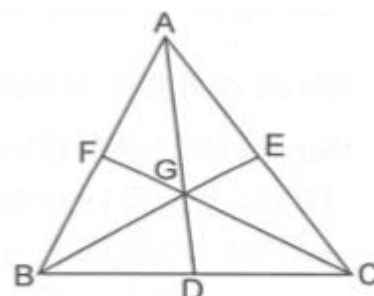
Xét tam giác ABC có BE và CF là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G.

Giả sử  $AC > AB$ , ta phải chứng minh  $BE < CF$ .

Ta vẽ thêm đường trung tuyến AD, theo tính chất ba đường trung tuyến ta có AD đi qua G.

- Xét  $\triangle ADB$  và  $\triangle ADC$  có:

$DB = DC$ , AD chung và  $AB < AC$  nên  $\angle ADB < \angle ADC$  (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).



Hình 18.6

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

- Xét  $\triangle GDB$  và  $\triangle GDC$  có:  $DB = DC$ ,  $GD$  chung và  $ADB < ADC$  (chứng minh trên) nên

$$GB < GC, \text{ suy ra } \frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF, \text{ do đó } BE < CF.$$

### 1.2. (h.18.7)

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông  $ABH$  và  $ACH$  ta tính được  $HB = 1\text{cm}$ ,  $HC = 2\text{cm}$ .

Vì  $N$  là trung điểm của  $HC$  nên  $HN = NC = 1\text{cm}$ .

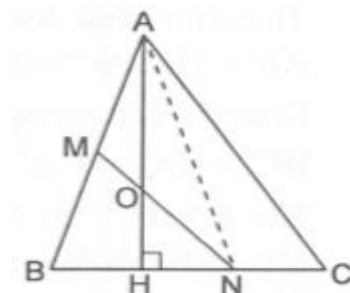
Do đó  $HN = HB = 1\text{cm}$ .

Vậy  $AH$  là đường trung tuyến của  $\triangle ABN$ .

Mặt khác  $AH = 3\text{cm}$ ,  $AO = 2\text{cm}$  nên  $AO = \frac{2}{3}AH$ , suy ra  $O$  là trọng tâm của  $\triangle ABN$ .

Ta có  $NM$  là một đường trung tuyến của  $\triangle NAB$ , do đó  $NM$  phải đi qua trọng tâm  $O$ . Vậy ba điểm  $M$ ,  $N$ ,  $O$  thẳng hàng.

Ta có  $NM$  là một đường trung tuyến của  $\triangle NAB$ , do đó  $NM$  phải đi qua trọng tâm  $O$ . Vậy ba điểm  $M$ ,  $N$ ,  $O$  thẳng hàng.



Hình 18.7

### 1.3. (h18.8)

a) Xét  $\triangle BAF$  có  $OA = OF$  nên  $BO$  là đường trung tuyến.

Điểm  $D$  nằm trên đường trung tuyến  $BO$  mà  $BD = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}BO$  (vì  $BC = 2BO$ ) nên  $D$  là trọng tâm của  $\triangle BAF$ .

Chứng minh tương tự ta được  $E$  là trọng tâm của  $\triangle CAF$ .

b) Vì  $D$  là trọng tâm của  $\triangle BAF$  nên đường thẳng  $AD$  là một đường trung tuyến.

$$\text{Vì } AD \text{ cắt } BF \text{ tại } N \text{ nên } FN = BN = \frac{1}{2}BF. \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } AM = MC = \frac{1}{2}AC. \quad (2)$$

Ta có  $\triangle OFB = \triangle OAC$  (c.g.c).

Suy ra  $BF = AC$  (3) và  $OFB = OAC$ .

Từ (1), (2), (3) suy ra  $AM = FN$ .

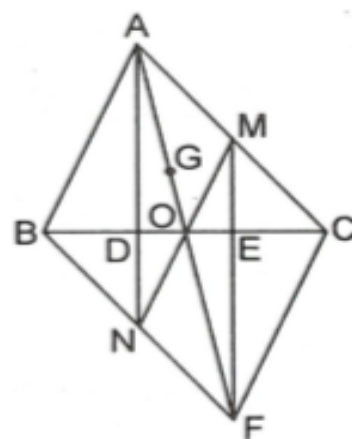
$\triangle AOM = \triangle FON$  (c.g.c), suy ra  $OM = ON$  (4) và  $\angle AOM = \angle FON$ .

Ta có  $\angle AOM + \angle FOM = 180^\circ$  (kề bù).

Suy ra  $\angle FON + \angle FOM = 180^\circ$ , do đó ba điểm  $M$ ,  $O$ ,  $N$  thẳng hàng. (5)

Từ (4) và (5) suy ra  $O$  là trung điểm của  $MN$  do đó  $AO$  là đường trung tuyến của  $\triangle AMN$ .

$\triangle ABC$  và  $\triangle AMN$  có chung đỉnh  $A$ , chung đường trung tuyến  $AO$  nên có cùng trọng tâm  $G$ .



Hình 18.8

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

#### 1.4. (h.18.9)

Theo tính chất đoạn chắn song song ta có  $AB' = BC, AC' = BC$  suy ra  $AB' = AC'$ .

Chứng minh tương tự ta được  $BC' = BA'$  và  $CA' = CB'$ .

Xét  $\Delta A'B'C'$ , ba đường thẳng  $A'A, B'B, C'C$  là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy tại một điểm  $G$ .

Gọi  $M$  là giao điểm của  $AA'$  với  $BC$ ;  $N$  là giao điểm của  $BB'$  với  $AC$ ;  $P$  là giao điểm của  $CC'$  với  $AB$ .

Ta có  $\Delta AMC = \Delta A'MB$  (c.g.c) suy ra  $MC = MB$ .

Vậy  $AM$  là đường trung tuyến ứng với cạnh  $BC$  của  $\Delta ABC$ .

Chứng minh tương tự ta được  $BN, CP$  là đường trung tuyến tương ứng với cạnh  $AC, AB$  của  $\Delta ABC$ .

Ba đường trung tuyến  $AM, BN, CP$  của  $\Delta ABC$  gặp nhau tại một điểm. Mặt khác ba đường thẳng  $AM, BN, CP$  cũng là ba đường thẳng  $A'A, B'B, C'C$ . Do đó trọng tâm  $G$  của  $\Delta A'B'C'$  cũng là trọng tâm của  $\Delta ABC$ .

#### 1.5. (h.18.10)

##### • Tìm cách giải

Giả sử đã vẽ được tam giác  $AOB$  sao cho  $G$  là trọng tâm của nó. Tia  $OG$  cắt  $AB$  tại trung điểm  $M$ . Trên tia  $OG$  lấy điểm  $K$  sao cho  $OK = 3OG$ . Ta chứng minh được

$$\Delta AMK = \Delta BMO \text{ (c.g.c)}; \Delta AMO = \Delta BMK \text{ (c.g.c)}.$$

Suy ra  $KA \parallel Oy; KB \parallel Ox$ . Do đó xác định được  $A$  và  $B$ .

##### • Trình bày lời giải.

- Vẽ tia  $OG$ , trên đó lấy điểm  $K$  sao cho  $OK = 3OG$ .
- Từ  $K$  vẽ  $KA \parallel Oy$  ( $A \in Ox$ ) và  $KB \parallel Ox$  ( $B \in Oy$ )
- Vẽ đoạn thẳng  $AB$  cắt  $OK$  tại  $M$ . Khi đó  $G$  là trọng tâm của  $\Delta AOB$ .

Thực vậy, ta có  $AK = OB$  (tính chất đoạn chắn song song).

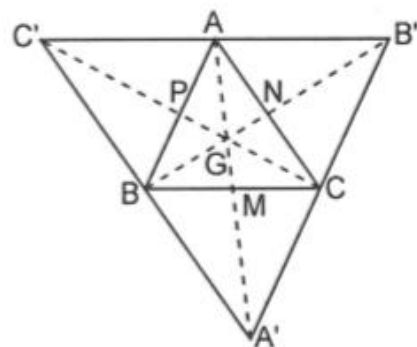
$$\Delta AMK = \Delta BMO \text{ (g.c.g)}, \text{ suy ra } MA = MB \text{ (1) và } MK = MO.$$

$$\text{Vì } OK = 3OG \text{ nên } OM = \frac{3}{2}OG \text{ hay } OG = \frac{2}{3}OM. \quad (2)$$

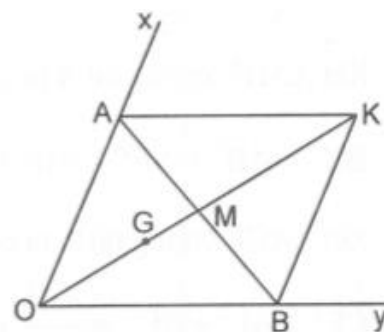
Từ (1) và (2) suy ra  $G$  là trọng tâm của  $\Delta AOB$ .

#### 1.6. (h.18.11)

Vẽ các đường trung tuyến  $AD, BM$  cắt nhau tại  $G$ .



Hình 18.9



Hình 18.10

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Ta có  $\triangle ADB = \triangle ADC$  (c.c.c). Suy ra  $DB = DC = 12\text{cm}$ ;  $\angle ADB = \angle ADC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào  $\triangle ABD$  vuông tại D ta được

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (3\sqrt{41})^2 - 12^2 = 225 \Rightarrow AD = 15(\text{cm})$$

Vì G là trọng tâm của  $\triangle ABC$  nên  $GD = \frac{1}{3}AD = 5\text{cm}$ .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác GBD vuông tại D ta được

$$GB^2 = GD^2 + BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow GB = 13(\text{cm}).$$

$$\text{Suy ra } BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2} \cdot 13 = 19,5(\text{cm}).$$

1.7. (h.18.12)

Vì G là trọng tâm của  $\triangle ABC$  nên

$$BE = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt{61} = 6\sqrt{61}(\text{cm}).$$

$$CF = \frac{3}{2}CG = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{601} = 3\sqrt{601}(\text{cm}).$$

• Xét  $\triangle ABE$  vuông tại A ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} = (6\sqrt{61})^2 = 2196. \quad (1)$$

• Xét  $\triangle ACF$  vuông tại A ta có:

$$CF^2 = AF^2 + AC^2 = \frac{AB^2}{4} + AC^2 = (3\sqrt{601})^2 = 5409. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $\frac{5}{4}(AB^2 + AC^2) = 7605$ .

$$\text{Mặt khác } AB^2 + AC^2 = BC^2. \quad (3)$$

$$\text{Suy ra } \frac{5}{4}BC^2 = 7605 \Rightarrow BC^2 = 6084 \Rightarrow BC = 78(\text{cm}).$$

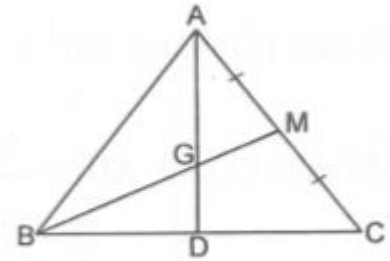
$$\text{Ta viết (3) thành } AB^2 + \frac{AC^2}{4} + \frac{3AC^2}{4} = 6084. \quad (*)$$

$$\text{Mà theo (1) thì } AB^2 + \frac{AC^2}{4} = 2196. \quad (**)$$

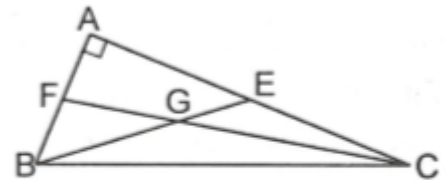
$$\text{So sánh (*) và (**) ta được } \frac{3}{4}AC^2 = 6084 - 2196 = 3888$$

$$\Rightarrow AC^2 = 5184 \Rightarrow AC = 72(\text{cm}).$$

$$\text{Từ đó ta tính được } AB^2 = BC^2 - AC^2 = 6084 - 5184 = 900$$



Hình 18.11



Hình 18.12

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\Rightarrow AB = 30\text{cm}$ .

Vậy chu vi  $\triangle ABC$  là:  $78 + 72 + 30 = 180(\text{cm})$ .

### 1.8. (h.18.13)

Đặt  $AC = b$ . Áp dụng định lý Py-ta-go cho  $\triangle ABC$  vuông tại A ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AC^2 + AC^2 = 3AC^2 = 3b^2 = (\sqrt{3}b)^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}b \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho  $\triangle ACN$  vuông tại A ta có:

$$CN^2 = AC^2 + AN^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} = AC^2 + \frac{2AC^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}b\right)^2 \Rightarrow CN = \frac{\sqrt{6}}{2}b.$$

Gọi G là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , ta có

$$CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}b = \frac{\sqrt{6}}{3}b \Rightarrow CG^2 = \frac{2}{3}b^2.$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{3}b \Rightarrow AG^2 = \frac{1}{3}b^2.$$

Xét  $\triangle GAC$  có  $CG^2 + AG^2 = \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 = b^2$  mà

$$AC^2 = b^2 \text{ nên } AC^2 = CG^2 + AG^2.$$

Do đó theo định lý Py-ta-go đảo ta được  $\triangle GAC$  vuông tại G. Suy ra  $AM \perp CN$ .

### 1.9. (h.18.14)

Xét  $\triangle ABC$  có các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

$$\text{Xét } \triangle GBC \text{ ta có } GB + GC > BC \Rightarrow \frac{2}{3}(BE + CF) > BC$$

$$\Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC. (1)$$

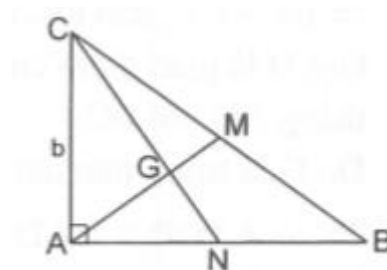
$$\text{Tương tự, ta có } CF + AD > \frac{3}{2}CA; (2)$$

$$AD + BE > \frac{3}{2}AB. (3)$$

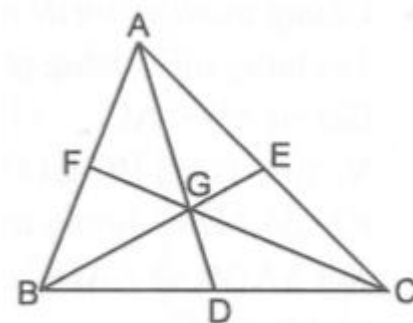
Cộng từng vế các bất đẳng thức (1) (2) (3) ta được:

$$2(BE + CF + AD) > \frac{3}{2}(BC + CA + AB).$$

$$\text{Suy ra } BE + CF + AD > \frac{3}{4}(BC + CA + AB).$$



Hình 18.13



Hình 18.14

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Nhận xét: Trong bài 17.7 ta đã chứng minh được  $AD + BE + CF$  lớn hơn nửa chu vi tam giác. Như vậy kết quả bài này “mạnh” hơn kết quả ở bài 17.7.

**1.10. (h.18.15)**

Xét  $\triangle ABC$  có  $BE$  và  $CF$  là hai đường trung tuyến và  $BE = CF$ .

Vì  $G$  là trọng tâm nên  $GB = \frac{2}{3}BE, GC = \frac{2}{3}CF$  do đó

$$GB = GC; GE = GF.$$

Ta có  $\triangle GBF = \triangle GCE$  (c.g.c)

$$\Rightarrow BF = CE, \text{ dẫn tới } AB = AC.$$

Gọi  $D$  là giao điểm của đường thẳng  $AG$  với  $BC$ .

Do  $G$  là trọng tâm nên  $AG$  là đường trung tuyến. Suy ra  $DB = DC$ .

Ta có  $\triangle ADB = \triangle ADC$  (c.c.c), do đó

$$\angle ADB = \angle ADC = 180^\circ : 2 = 90^\circ. \text{ Vậy } AG \perp BC.$$

**1.11. (h.18.16)**

Xét  $\triangle ABE$  có  $AC$  là đường trung tuyến. Mặt khác  $D \in AC$  và

$$AD = \frac{2}{3}AC \text{ nên } D \text{ là trọng tâm của } \triangle ABE.$$

Suy ra đường thẳng  $BD$  chứa đường trung tuyến ứng với cạnh  $AE$ , do đó  $MA = ME$ .

Ta có  $\triangle AMN = \triangle EMC$  (c.g.c)  $\Rightarrow AN = EC$ . Do đó  $AN = BC$  (vì  $BC = EC$ ).

**1.12. (h.18.17)**

• Chứng minh mệnh đề nếu  $AB + GB = AC + GC$  thì  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ .

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử  $AB < AC$ . (1)

Vẽ tia  $AG$  cắt  $BC$  tại  $D$ .

Khi đó  $AD$  là đường trung tuyến nên  $DB = DC$ .

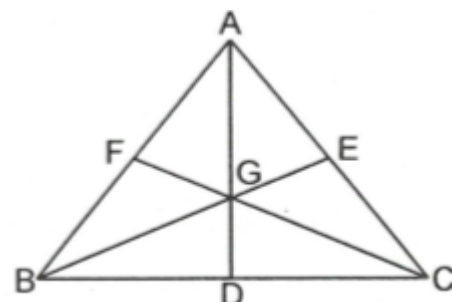
Xét  $\triangle ADB$  và  $\triangle ADC$  có:  $AD$  chung;  $DB = DC$  và

$AB < AC$  nên  $\angle ADB < \angle ADC$  (định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

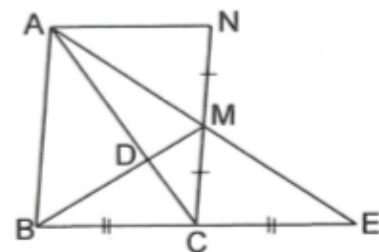
Xét  $\triangle GDB$  và  $\triangle GDC$  có:  $GD$  chung;  $DB = DC$  và  $\angle GDB < \angle GDC$  (chứng minh trên) nên

$$GB < GC. \quad (2)$$

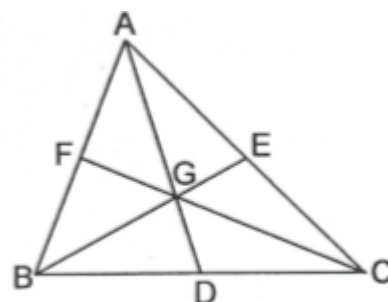
Từ (1) và (2) suy ra  $AB + GB < AC + GC$  (trái giả thiết).



Hình 18.15



Hình 18.16



Hình 18.17

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Vậy điều giả sử  $AB < AC$  là sai. (\*)

Nếu  $AB > AC$  ta cũng đi đến mâu thuẫn vậy  $AB > AC$  là sai (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $AB = AC$  do đó  $\triangle ABC$  cân tại A.

- Chứng minh mệnh đề nếu  $\triangle ABC$  cân tại A thì  $AB + GB = AC + GC$ .

Gọi E là giao điểm của BG với AC; F là giao điểm của CG với AB.

Khi đó  $EA = EC; FA = FB$ .

$$\triangle ABE = \triangle ACF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BE = CF, \text{ do đó } \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF, \text{ dẫn tới } GB = GC.$$

Suy ra  $AB + GB = AC + GC$ .

**1.13. (h.18.18)**

- Chứng minh mệnh đề nếu  $A < 90^\circ$  thì  $AM > \frac{1}{2}BC$ .

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử  $AM = \frac{1}{2}BC$ , khi đó  $A = 90^\circ$ , trái giả thiết.

Giả sử  $AM < \frac{1}{2}BC$ , tức là  $AM < BM$  và  $AM < MC$ .

Xét  $\triangle ABM$  có  $AM < BM \Rightarrow B < A_1$ . Xét  $\triangle ACM$  có

$AM < CM \Rightarrow C < A_2$ .

Do đó  $B + C < A_1 + A_2 = BAC$ .

Suy ra  $A + B + C < 2A \Rightarrow A > \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$  trái giả thiết.

Vậy nếu  $A < 90^\circ$  thì  $AM > \frac{1}{2}BC$ .

- Chứng minh mệnh đề nếu  $AM > \frac{1}{2}BC$  thì  $A < 90^\circ$ .

Ta có  $AM > \frac{1}{2}BC$  tức là  $AM > BM$  và  $AM > CM$ .

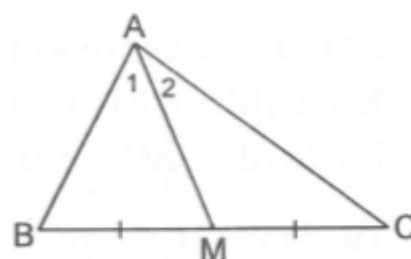
Xét  $\triangle ABM$  có  $AM > BM \Rightarrow B > A_1$ . Xét  $\triangle ACM$  có

$AM > CM \Rightarrow C > A_2$ .

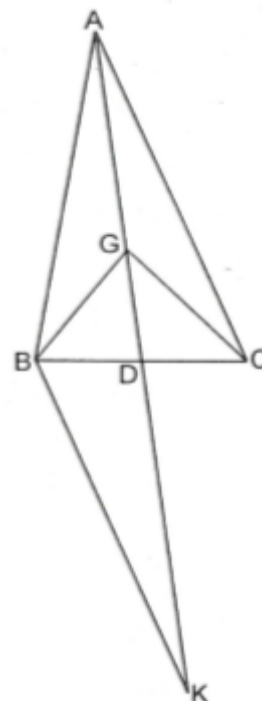
Do đó  $B + C > A_1 + A_2 = BAC$ . Suy ra

$A + B + C > 2A \Rightarrow A < \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ .

**1.14. (h.18.19)**



Hình 18.18



Hình 18.19

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Gọi  $D$  là giao điểm của tia  $AG$  với  $BC$ .

Ta có  $DB = DC$  do đó  $GD$  là đường trung tuyến của tam giác  $GBC$ .

Xét  $\triangle GBC$  có  $BGC < 90^\circ$  (giả thiết) suy ra  $GD > \frac{1}{2}BC$  (xem bài 17.13) do đó  $AD > \frac{3}{2}BC$ . (1)

Trên tia  $AD$  lấy điểm sao cho  $DK = DA$ .

$\triangle ACD = \triangle KBD$  (c.g.c). Suy ra  $AC = BK$ .

Xét  $\triangle ABK$  có  $AB + BK > AK$ .

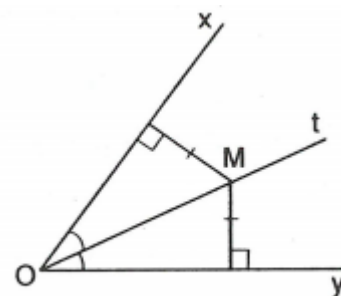
Do đó  $AB + AC > 2AD$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $AB + AC > 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot BC = 3BC$ .

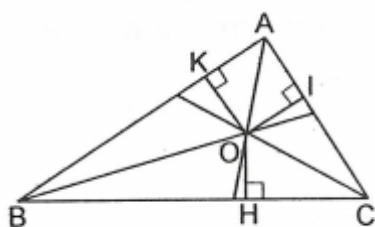
## Chuyên đề 2. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

### A. Kiến thức cần nhớ

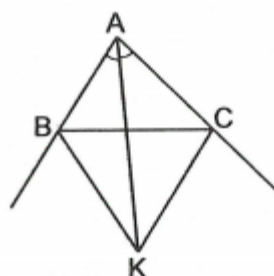
1. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó (h.19.1).
2. Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.
3. Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó (h.19.2).



Hình 19.1



Hình 19.2



Hình 19.3

4. Trong một tam giác, hai đường phân giác của hai góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kẻ cùng đi qua một điểm (h.19.3).

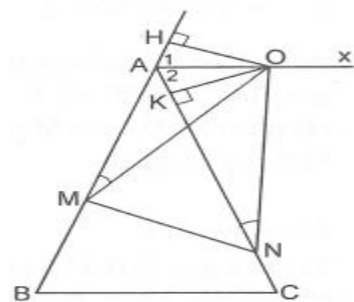
### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  không chứa  $B$  vẽ tia  $Ax \parallel BC$ .

Lấy điểm  $O$  trên tia  $Ax$ , điểm  $M$  trên  $AB$  và điểm  $N$  trên  $AC$  sao cho  $AMO = ANO$ . Chứng minh rằng  $\triangle OMN$  là tam giác cân.

**Giải (h.19.4)**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ



Hình 19.4

**\* Tìm cách giải.**

Ta có  $Ax // BC$  nên dễ thấy  $Ax$  là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ . Vì điểm  $O$  nằm trên tia phân giác này nên ta vẽ  $OH \perp AB$ ,  $OK \perp AC$  để vận dụng tính chất cách đều hai cạnh của điểm  $O$ . Từ đó dùng phương pháp tam giác bằng nhau để chứng minh  $OM = ON$ .

**\* Trình bày lời giải.**

Ta có  $Ax // BC$  nên  $A_1 = B$  (cặp góc đồng vị);  $A_2 = C$  (cặp góc so le trong).

Mặt khác,  $B = C$  (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên  $A_1 = A_2$ .

Vẽ  $OH \perp AB$ ,  $OK \perp AC$  ta được  $OH = OK$  (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

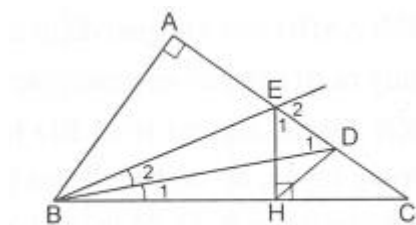
Ta chứng minh được  $\triangle HOM = \triangle KON$  (g.c.g). Suy ra  $OM = ON$ , do đó  $\triangle OMN$  cân.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = AB$ .

Gọi  $E$  là một điểm nằm giữa  $A$  và  $D$  sao cho tia  $BD$  là tia phân giác của góc  $CBE$ . Vẽ  $EH \perp BC$ .

Tính số đo của góc  $CHD$ .

**Giải (h.19.5)**



Hình 19.5

**\* Tìm cách giải.**

Vẽ hình chính xác, ta dự đoán  $\angle CHD = 45^\circ$ . Do đó cần chứng minh  $HD$  là đường phân giác của góc  $CHE$ . Muốn vậy phải chứng minh  $EC$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $E$  của tam giác  $EBH$ .

**\* Trình bày lời giải.**

Ta có  $E_1 = \angle ABC$  (cùng phụ với góc  $C$ ). Do đó  $E_1 = \angle ABD + B_1$ . (1)

Lại có  $E_2 = D_1 + B_2$  (2) (tính chất góc ngoài của  $\triangle EBD$ ).

Mặt khác,  $\angle ABD = D_1 (= 45^\circ)$  và  $B_1 = B_2$  nên  $E_1 = E_2$ .

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Xét  $\triangle EBH$  có  $D$  là giao điểm của đường phân giác góc  $B$  với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $E$  nên  $HD$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $H$ .

Suy ra  $\angle CHD = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ .

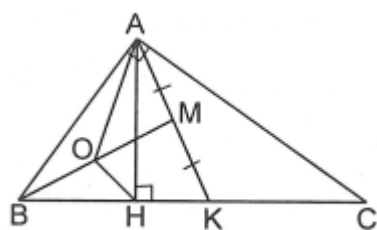
**Vi dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Vẽ  $AH \perp BC$ . Tia phân giác của góc  $HAC$  cắt  $BC$  tại  $K$ . Các đường phân giác của góc  $BAH$  và góc  $BHA$  cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AK$ . Chứng minh ba điểm  $B, O, M$  thẳng hàng.

**Giải (h.19.6)**

**\* Tìm cách giải.**

Xét tam giác  $ABH$  có  $O$  là giao điểm của hai đường phân giác nên  $O$  nằm trên đường phân giác của góc  $B$ . Để chứng minh ba điểm  $B, O, M$  thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh  $M$  cũng nằm trên đường phân giác của góc  $B$ . Muốn thế ta phải chứng minh tam giác  $BAK$  cân tại  $B$ .

**\* Trình bày lời giải.**



Hình 19.6

Ta có:  $\angle BAK + \angle KAC = 90^\circ$  (vì  $\angle BAC = 90^\circ$ );

$\angle BKA + \angle KAH = 90^\circ$  (vì  $\angle AHK = 90^\circ$ ).

Mặt khác,  $\angle KAC = \angle KAH$  nên  $\angle BAK = \angle BKA$ , suy ra  $\triangle BAK$  cân tại  $B$ .

Xét  $\triangle ABH$  có  $O$  là giao điểm của hai đường phân giác của góc  $A$  và góc  $H$ . Suy ra  $BO$  là đường phân giác của góc  $B$ .

Xét  $\triangle BAK$  cân tại  $B$  có  $BO$  là đường phân giác nên đồng thời là đường trung tuyến, do đó  $BO$  đi qua trung điểm  $M$  của  $AK$ .

Vậy ba điểm  $B, O, M$  thẳng hàng.

### C. Bài tập vận dụng

#### • Tính góc đo, tính độ dài

**2.1.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $K$  là giao điểm của đường phân giác góc  $B$  với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $C$ .

Cho biết  $\angle AKC = 65^\circ$ , tính số đo của góc  $ABC$ .

**2.2.** Cho tam giác  $ABC$ . Ba đường phân giác  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $O$ . Cho biết  $\angle BOC = 150^\circ$ , tính số đo của góc  $EDF$ .

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**2.3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Các tia phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  cắt nhau Tại  $O$ . Cho biết  $OA = \sqrt{8}cm$ .

Tính khoảng cách từ  $O$  đến ba cạnh của tam giác.

**2.4.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $AB = 3cm$ ,  $AC = 5cm$ ,  $BC = 6cm$ . Gọi  $O$  là giao điểm các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$ . Vẽ  $OH \perp BC$ .

Tính các độ dài  $HB$  và  $HC$ .

• **Chứng minh tia phân giác**

**2.5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Vẽ tam giác  $OBC$  vuông tại  $O$  sao cho  $O$  và  $A$  thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $BC$ .

Chứng minh rằng tia  $OA$  là tia phân giác của góc  $BOC$ .

**2.6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Lấy điểm  $N$  nằm giữa  $M$  và  $C$ . Vẽ  $BH \perp AN$ . Chứng minh rằng khi điểm  $N$  di động thì tia phân giác của góc  $BHN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**2.7.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên tia đối của tia  $BC$  lấy điểm  $M$ , trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $BM = BA$  và  $CN = CA$ . Vẽ  $BH \perp AM$ ,  $CK \perp AN$ . Hai đường thẳng  $BH$  và  $CK$  cắt nhau tại  $O$ . Chứng minh rằng tia  $AO$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .

**2.8.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $A = 120^\circ$ . Các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Vẽ tia  $Bx$  sao cho  $BA$  là tia phân giác của góc  $OBx$ . Vẽ tia  $Cy$  sao cho  $CA$  là tia phân giác của góc  $OCy$ . Hai tia  $Bx$  và  $CA$  cắt nhau tại  $E$ ; hai tia  $Cy$  và  $BA$  cắt nhau tại  $D$ . Chứng minh rằng:

- Tam giác  $ODE$  là tam giác đều;
- Tia  $OA$  là tia phân giác của góc  $DOE$ .

**2.9.** Cho tam giác  $ABC$ . Nếu cách vẽ đoạn thẳng  $MN \parallel BC$  ( $M \in AB$ ,  $N \in AC$ ) sao cho  $BM + CN = BC$ .

**2.10.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $A = 105^\circ$ ,  $B = 40^\circ$ . Vẽ điểm  $D$ , điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $AD \perp AC$  và  $AD$  là đường phân giác của góc  $BAM$ .

Chứng minh rằng  $AB + AM = BC$ .

• **Chứng minh thẳng hàng, đồng quy**

**2.11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$  sao cho  $BF = BD$  và  $CE = CD$ . Đường thẳng qua  $B$  và vuông góc với  $DF$  cắt đường thẳng qua  $C$  và vuông góc với  $DE$  tại  $I$ . Đường thẳng qua  $B$  và song song với  $DF$  cắt đường thẳng qua  $C$  và song song với  $DE$  tại  $K$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, I, K$  thẳng hàng.

**2.12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tam giác  $DBC$  vuông tại  $D$  trong đó  $A$  và  $D$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Vẽ tia  $Ax$  sao cho  $AC$  là tia phân giác của góc  $DAx$ . Vẽ tia  $Dy$  sao cho  $DB$  là tia phân giác của góc  $ADy$ . Hai tia  $Ax$  và  $Dy$  cắt nhau tại  $K$ .

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Chứng minh rằng ba điểm  $B, K, C$  thẳng hàng.

**2.13.** Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng chứa tia phân giác của một góc có đỉnh nằm ngoài tờ giấy

**2.14.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng  $xy \parallel BC$ . Các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  cắt nhau tại  $O$  và cắt  $xy$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ .

Chứng minh rằng các đường thẳng  $BE, CD$  và  $AO$  cùng đi qua một điểm.

### Hướng dẫn giải

#### 2.1. (h.19.7)

Xét  $\triangle ABC$  có đường phân giác của góc  $B$  và đường phân giác ngoài tại đỉnh  $C$  cắt nhau tại  $K$ . Suy ra  $AK$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $A$ .

Ta đặt  $\angle ABC = x$  (độ) thì  $\angle CAx = x + C_1$ ;

$$\angle ACy = x + A_1.$$

Do đó  $\angle CAx + \angle ACy = x + C_1 + x + A_1 = x + 180^\circ$ .

$$\text{Suy ra } \frac{\angle CAx + \angle ACy}{2} = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle AKC \text{ có } \angle AKC = 180^\circ - \frac{\angle CAx + \angle ACy}{2} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{x}{2}\right) = 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$\text{Vì } \angle AKC = 65^\circ \text{ nên } 90^\circ - \frac{x}{2} = 65^\circ \Rightarrow x = 50^\circ.$$

#### 2.2. (h.19.8)

$$\text{Xét } \triangle BOC \text{ có } \angle BOC = 180^\circ - \frac{B+C}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$$

$$\text{Mà } \angle BOC = 150^\circ \text{ nên } 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 120^\circ$$

Về các tia  $Ax, Ay$  lần lượt là tia đối của các tia  $AB, AC$ .

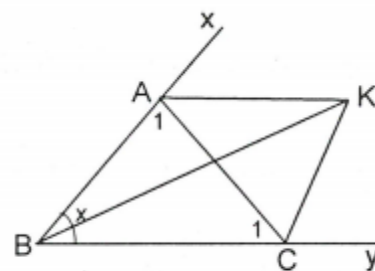
Dễ thấy  $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 = 60^\circ$ .

Xét  $\triangle ABD$  có  $AC$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $A$ ;  $BO$

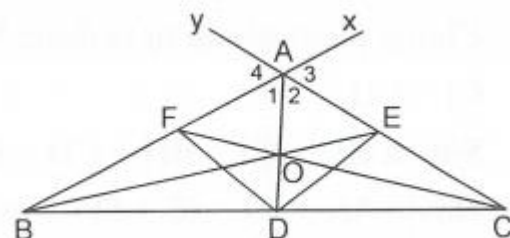
là đường phân giác trong không kề. Hai đường phân giác này cắt nhau tại  $E$ , suy ra  $DE$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $D$  của  $\triangle ABD$

Chứng minh tương tự ta được  $DF$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $D$  của  $\triangle ACD$ .

Suy ra  $DE \perp DF$  (hai đường phân giác của hai góc kề bù), do đó  $\angle EDF = 90^\circ$ .



Hình 19.7



Hình 19.8

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

### 2.3. (h.19.9)

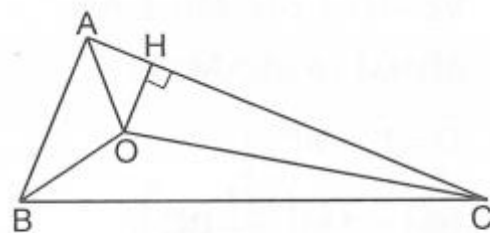
Vì  $O$  là giao điểm các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  nên  $AO$  là đường phân giác góc  $A$ , do đó

$$\angle OAB = \angle OAC = 45^\circ.$$

Vẽ  $OH \perp AC$  thì  $\triangle HAO$  vuông cân tại  $H$ , suy ra  $AH = OH$ .

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow 2OH^2 = (\sqrt{8})^2 = 8 \Rightarrow OH^2 = 4 \Rightarrow OH = 2.$$



Hình 19.9

Vậy khoảng cách từ  $O$  tới mỗi cạnh của tam giác là  $2\text{cm}$ .

### 2.4. (h.19.10)

Vẽ thêm  $OK \perp AB$ ;  $OI \perp AC$ .

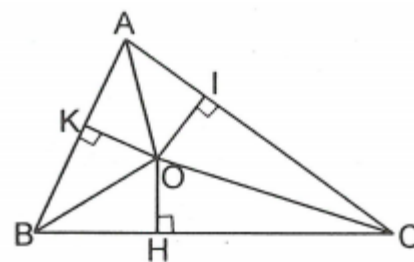
$$\triangle AOK = \triangle AOI \quad (\text{cạnh huyền, góc nhọn}) \Rightarrow AK = AI.$$

Chứng minh tương tự ta được  $BK = BH$ ;  $CI = CH$ .

Suy ra  $BK + CI = BH + CH = BC = 6\text{cm}$ .

Do đó  $AK + AI = (3 + 5) - 6 = 2\text{cm}$  mà  $AK = AI$  nên

$$AK = AI = 1\text{ cm. Vậy } BK = 3 - 1 = 2\text{cm} \Rightarrow BH = 2\text{cm} \text{ và } CH = 6 - 2 = 4\text{cm}.$$



Hình 19.10

### 2.5. (h.19.11)

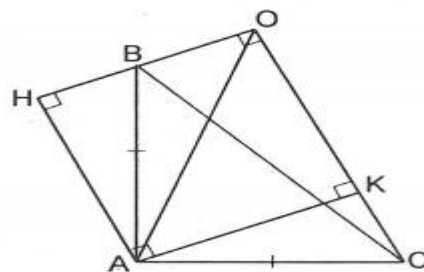
Vẽ  $AH \perp OB$ ,  $AK \perp OC$ , ta được

$\angle ABH = \angle ACK$  (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$$\triangle ABH = \triangle ACK \quad (\text{cạnh huyền, góc nhọn}).$$

Suy ra  $AH = AK$ .

Điểm  $A$  ở trong góc  $BOC$  và cách đều hai cạnh của góc này nên  $A$  nằm trên tia phân giác của góc đó. Như vậy tia  $OA$  là tia phân giác của góc  $BOC$ .



Hình 19.11

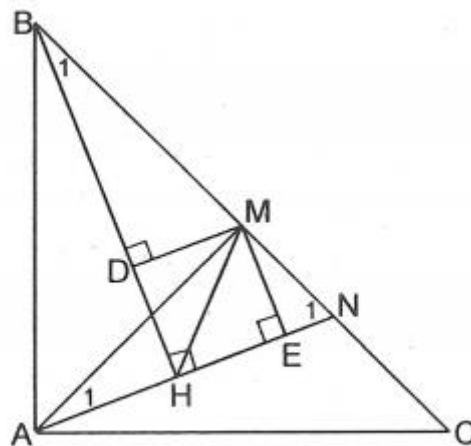
### 2.6. (h.19.12)

Vẽ  $MD \perp BH$ ,  $ME \perp AN$ .

$\triangle DBM$  và  $\triangle EAM$  có:

$$\angle D = \angle E = 90^\circ;$$

$$BM = AM \left( = \frac{1}{2} BC \right);$$



Hình 19.12

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$B_1 = A_1$  (cùng phụ với  $N_1$ ).

Do đó  $\triangle DBM = \triangle EAM$  (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra  $MD = ME$ .

Điểm  $M$  cách đều hai cạnh của góc  $BHN$  nên  $HM$  là tia phân giác của góc  $BHN$ .

Nói cách khác tia phân giác của góc  $BHN$  luôn đi qua một điểm cố định là điểm  $M$ .

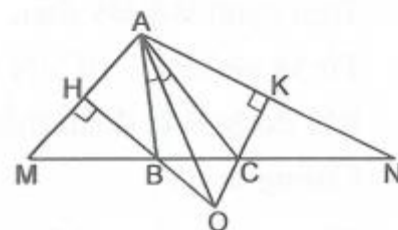
## 2.7. (h. 19.13)

$\triangle ABH = \triangle MBH$  (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra  $ABH = MBH$ .

Chứng minh tương tự ta được  $ACK = NCK$ .

Xét  $\triangle ABC$  có  $BH$  và  $CK$  là hai đường phân giác ngoài tại đỉnh  $B$  và đỉnh  $C$  cắt nhau tại  $O$  nên  $AO$  là đường phân giác của góc  $BAC$ .



Hình 19.13

## 2.8. (h.19.14)

a) Xét  $\triangle ABC$  có hai đường phân giác góc  $B$ , góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Suy ra tia  $AO$  là đường phân giác thứ ba.

Từ đó ta được  $BAO = CAO = CAD$

$= BAE = 60^\circ$ .

$\triangle BAE = \triangle BAO$  (g.c.g)  $\Rightarrow BE = BO$ .

$\triangle CAD = \triangle CAO$  (g.c.g)  $\Rightarrow CD = CO$ .

Do đó  $\triangle BDE = \triangle BDO$  (c.g.c)

$\Rightarrow DE = DO$ . (1)

$\triangle CED = \triangle CEO$  (c.g.c)  $\Rightarrow DE = OE$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $OD = OE = DE$  nên  $\triangle ODE$  đều.

b) Ta có  $BDE = BDO$  (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

$CED = CEO$  (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

Xét  $\triangle ODE$  có hai đường phân giác của góc  $D$ , góc  $E$  cắt nhau tại  $A$ , suy ra  $OA$  là đường phân giác của góc  $DOE$ .

## 2.9. (h.19.15)

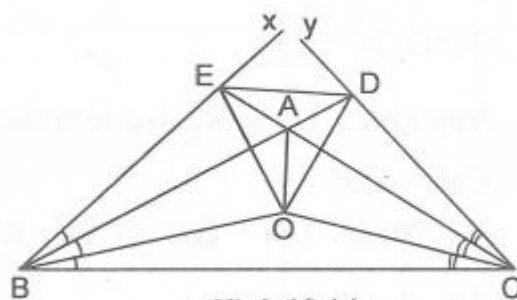
• Tìm cách giải

Giả sử đã vẽ được  $MN \parallel BC$  sao cho  $BM + CN = BC$ .

Lấy điểm  $D \in BC$  sao cho  $BD = BM$ , khi đó  $CD = CN$ .

$\triangle BMD$  cân tại  $B \Rightarrow M_1 = D_1$  mà  $M_2 = D_1$  (cặp góc so le trong) nên  $M_1 = M_2$

Chứng minh tương tự ta được  $N_1 = N_2$ .



Hình 19.14

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Xét  $\triangle AMN$  có  $D$  là giao điểm của hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $M$  và  $N$ , suy ra  $AD$  là đường phân giác của góc  $A$ .

• Cách vẽ  $MN$

- Vẽ đường phân giác  $AD$  của  $\triangle ABC$

- Trên cạnh  $BA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = BD$ ;

- Từ  $M$  vẽ  $MN \parallel BC$  ( $N \in AC$ ).

Khi đó  $MN$  là đoạn thẳng cần vẽ.

• Chứng minh

Theo cách vẽ ta có  $MN \parallel BC$ , do đó  $M_2 = D_1$  (so le trong) mà  $M_1 = D_1$  (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên  $M_2 = M_1$

Xét  $\triangle AMN$  có  $D$  là giao điểm của đường phân giác góc  $A$  và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $M$  nên  $ND$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $N$ , do đó  $N_1 = N_2$ .

Mặt khác,  $D_2 = N_2$  (so le trong) nên  $N_1 = D_2$ , suy ra  $\triangle CND$  cân, dẫn tới  $CN = CD$ .

Vậy  $BM + CN = BD + CD = BC$ .

## 2.10. (h.19.16)

Trên tia đối của tia  $AB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = AM$ .

Xét  $\triangle ABM$  có  $AD \perp AC$  mà  $AD$  là đường phân giác trong của góc  $A$  nên  $AC$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $A$ .

Từ đó suy ra  $\triangle ANC = \triangle AMC$  (c.g.c)

$\Rightarrow \angle ANC = \angle AMC$ .

Ta có  $\angle BAD = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$ , do đó  $\angle BAM = 30^\circ$ .

Xét  $\triangle ABM$  có góc  $\angle AMC$  là góc ngoài nên

$\angle AMC = \angle BAM + \angle B = 70^\circ$  suy ra  $\angle N = 70^\circ$ .

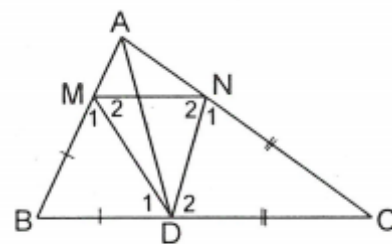
Xét  $\triangle BCN$  có  $\angle BCN = 180^\circ - (\angle B + \angle N) = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 70^\circ$ .

Vậy  $\angle BCN = \angle N (= 70^\circ)$ , suy ra  $\triangle BCN$  cân tại  $B$ .

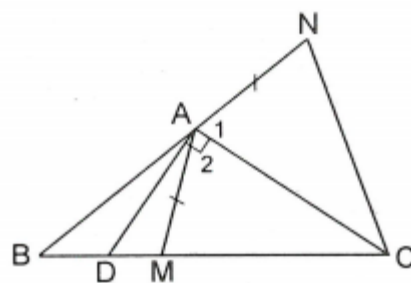
Do đó  $BN = BC$ , dẫn tới  $AB + AN = BC$  hay  $AB + AM = BC$ .

## 2.11. (h.19.17)

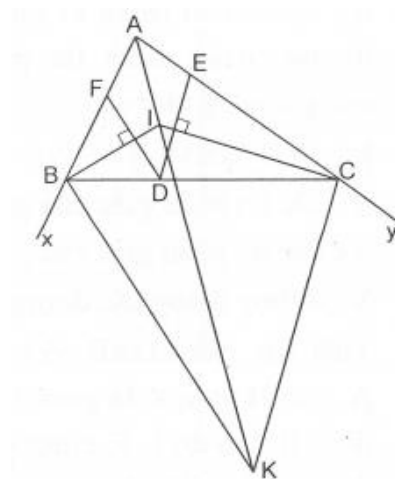
$\triangle BDF$  và  $\triangle CDE$  là những tam giác cân. Mặt khác,  $BI \perp DF$ ,  $CI \perp DE$  nên ta có  $BI$  và  $CI$  lần lượt là các đường phân giác của góc  $B$  và góc  $C$ . Suy ra  $I$  nằm trên đường phân giác của góc  $A$ . (1)



Hình 19.15



Hình 19.16



Hình 19.17

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

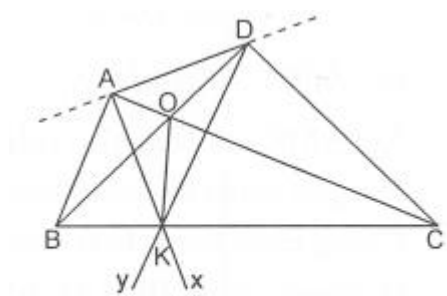
Ta có  $BK \parallel DF$  mà  $BI \perp DF$  nên  $BI \perp BK$ , do đó  $BK$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $B$  của  $\triangle ABC$

Chứng minh tương tự ta được  $CK$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $C$  của  $\triangle ABC$ .

Do đó  $K$  nằm trên đường phân giác của góc  $A$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm  $A, I, K$  thẳng hàng

## 2.12. (h.19.18)



Hình 19.18

Xét  $\triangle ADK$  có  $AC$  là đường phân giác của góc trong tại đỉnh  $A$ .

Mặt khác,  $AB \perp AC$  nên  $AB$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $A$ .

Xét  $\triangle ADK$  có  $B$  là giao điểm của một đường phân giác góc trong và đường phân giác góc ngoài không kề nên tia  $KB$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $K$ .

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

Xét  $\triangle ADK$  có  $O$  là giao điểm của hai đường phân giác nên  $KO$  là đường phân giác của góc  $K$ .

Suy ra  $KO \perp KB$  (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù). (1)

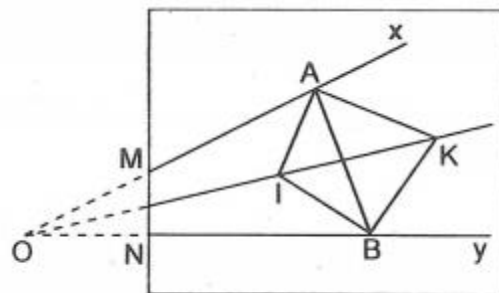
Chứng minh tương tự ta được  $KO \perp KC$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm  $B, K, C$  thẳng hàng.

## 2.13. (H.19.19)

Giả sử góc  $xOy$  có đỉnh  $O$  nằm ngoài tờ giấy, còn lại một phần của hai cạnh nằm trong tờ giấy. Ta vẽ đường thẳng chứa tia phân giác của góc  $xOy$  như sau:

- Lấy  $A \in Mx$  và  $B \in Ny$ ;
- Vẽ các tia phân giác của góc  $MAB$  và  $NBA$ , chúng cắt nhau tại  $I$ ;
- Vẽ các tia phân giác của góc  $BAX$  và  $ABY$ , chúng cắt nhau tại  $K$ ;



Hình 19.19

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

- Vẽ đường thẳng  $IK$ , đường thẳng này chứa tia phân giác của góc  $xOy$ . Thật vậy, xét  $\triangle OAB$  có  $I$  là giao điểm của các đường phân giác của góc  $A$ , góc  $B$ . còn  $K$  là giao điểm của các đường phân giác ngoài tại đỉnh  $A$ , đỉnh  $B$ . Do đó  $I, K$  cùng nằm trên đường phân giác của góc  $xOy$ , tức là đường thẳng  $IK$  chứa tia phân giác của góc  $xOy$ .

#### 2.14. (h.19.20)

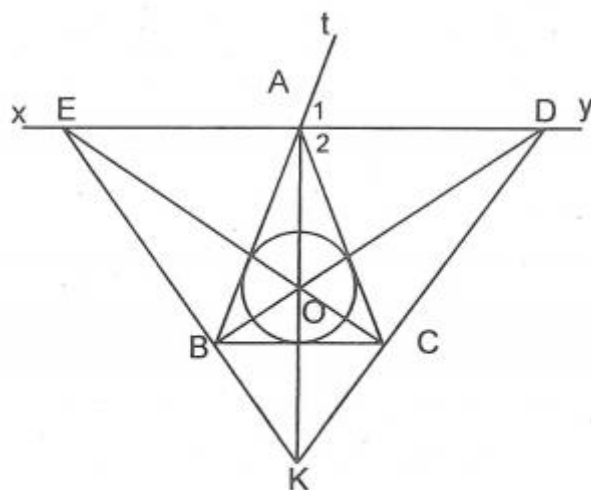
Điểm  $O$  là giao điểm hai đường phân giác của góc  $B$  và góc  $C$  nên  $AO$  là đường phân giác của góc  $A$ . Vẽ tia  $At$  là tia đối của tia  $AB$ .

Vì  $xy \parallel BC$  nên  $A_1 = ABC$  (cặp góc đồng vị);

$A_2 = ACB$  (cặp góc so le trong)

mà  $ABC = ACB$  nên  $A_1 = A_2$ .

Xét  $\triangle ABC$  có  $D$  là giao điểm của đường phân giác góc  $B$  và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $A$  nên  $CD$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $C$ . Chứng minh tương tự ta được  $BE$  là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh  $B$ . Ba đường thẳng  $BE, CD, AO$  là hai đường phân giác góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề nên chúng cùng đi qua một điểm.

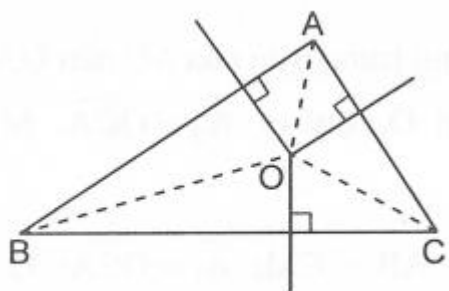


Hình 19.20

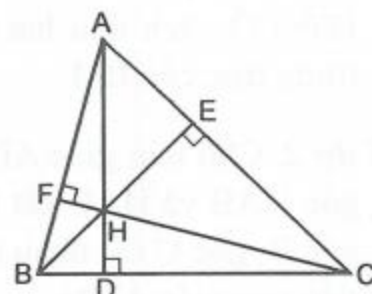
### Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

#### A. Kiến thức cần nhớ

1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.
2. Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.
3. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác (gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác) (h.20.1).



Hình 20.1



Hình 20.2

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

4. Trong một tam giác, đoạn vuông góc vẽ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

5. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm (h.20.2). Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.

6. *Bổ sung tính chất của tam giác cân*

- Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy, đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $AB < AC$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $CM = AB$ . Vẽ đường trung trực của  $AC$ , cắt đường phân giác của góc  $A$  tại điểm  $O$ . Chứng minh rằng  $O$  nằm trên đường trung trực của  $BM$ .

**Giải (h.20.3)**

**\* Tìm cách giải.**

Muốn chứng minh điểm  $O$  nằm trên đường trung trực của  $BM$  ta cần chứng minh điểm  $O$  cách đều hai đầu của đoạn thẳng  $BM$ , nghĩa là phải chứng minh  $OB = OM$ . Muốn vậy phải chứng minh  $\triangle ABO = \triangle CMO$ .

Dễ thấy hai tam giác này có hai cặp cạnh bằng nhau nên chỉ cần chứng minh cặp góc xen giữa bằng nhau là đủ

**\* Trình bày lời giải**

Điểm  $O$  nằm trên đường trung trực của  $AC$  nên  $OA = OC$ .

Do đó  $\triangle OAC$  cân tại  $O$ , suy ra  $A_2 = OCA$ .

Mặt khác  $A_2 = A_1$  nên  $A_1 = OCA$ .

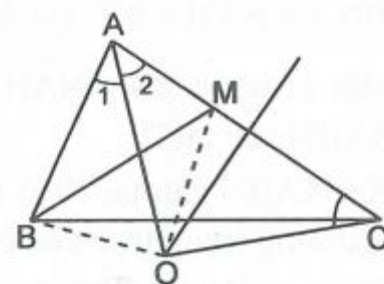
$\triangle ABO$  và  $\triangle CMO$  có:  $AB = CM$ ;  $A_1 = OCA$ ;  $OA = OC$  nên  $\triangle ABO = \triangle CMO$  (c.g.c). Suy ra  $OB = OM$ .

Điểm  $O$  cách đều hai đầu của đoạn thẳng  $BM$  nên  $O$  nằm trên đường trung trực của  $BM$ .

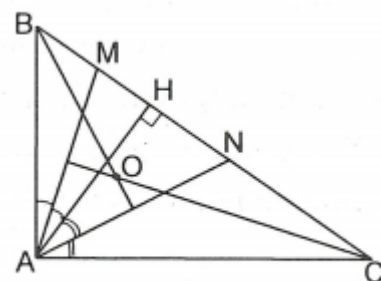
**Ví dụ 2:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tia phân giác của góc  $HAB$  và  $HAC$  cắt  $BC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Chứng minh rằng  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$ .

**Giải (h.20.4)**

**\* Tìm cách giải.**



Hình 20.3



Hình 20.4

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Muốn chứng minh  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$ , ta phải chứng minh  $O$  là giao điểm các đường trung trực của các cạnh  $AM$  và  $AN$ .

Xét  $\triangle ABN$  có  $BO$  là đường phân giác góc  $B$  nên để chứng minh  $BO$  là đường trung trực của  $AN$  thì chỉ cần chứng minh  $\triangle ABN$  là tam giác cân tại  $B$ .

**\* Trình bày lời giải.**

Ta có  $BAN + CAN = 90^\circ$  (vì  $BAC = 90^\circ$ ). (1)

$BNA + NAH = 90^\circ$  (vì  $H = 90^\circ$ ). (2)

Mặt khác,  $CAN = NAH$  nên từ (1) và (2) suy ra  $BAN = BNA$  do đó  $\triangle ABN$  cân tại  $B$ .

Xét  $\triangle ABN$  cân tại  $B$  có  $BO$  là đường phân giác của góc  $B$  nên  $BO$  cũng là đường trung trực của cạnh  $AN$ .

Chứng minh tương tự ta được  $CO$  là đường trung trực của cạnh  $AM$ .

Xét  $\triangle AMN$  có  $O$  là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh  $AN$  và  $AM$  nên  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$

**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $BM$ . Qua  $M$  vẽ một đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $D$ . Vẽ điểm  $E$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $DE$ . Chứng minh rằng  $AE \perp BM$ .

**Giải (h.20.5)**

**\* Tìm cách giải.**

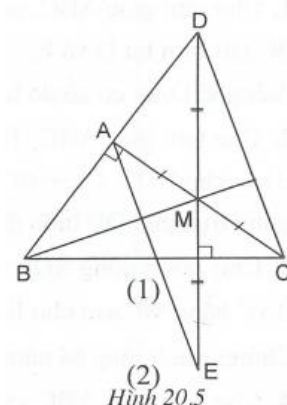
Xét  $\triangle DBC$ , dễ thấy  $M$  là trực tâm, suy ra  $BM \perp CD$ . Do đó muốn chứng minh  $BM \perp AE$  ta chỉ cần chứng minh  $CD \parallel AE$ .

**\* Trình bày lời giải.**

Xét  $\triangle DBC$  có  $CA$  và  $DM$  là hai đường cao cắt nhau tại  $M$  nên  $M$  là trực tâm. Suy ra  $BM$  là đường cao thứ ba, do đó  $BM \perp CD$ . Ta có  $\triangle MEA = \triangle MDC$  (c.g.c).

Suy ra  $MEA = MDC$ . Do đó  $AE \parallel CD$ .

Từ (1) và (2) ta được  $AE \perp BM$ .

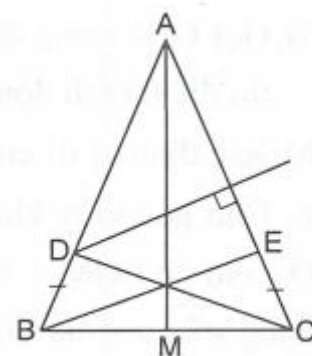


**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $A = 45^\circ$ . Vẽ đường trung tuyến  $AM$ . Đường trung trực của cạnh  $AC$  cắt  $AB$  tại  $D$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = BD$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AM$ ,  $BE$ ,  $CD$  đồng quy.

**Giải (h.20.6)**

**\* Tìm cách giải.**

Vẽ hình chính xác ta dự đoán ba đường thẳng  $AM$ ,  $BE$ ,  $CD$  là ba đường cao của tam giác  $ABC$  nên chúng đồng quy. Do đó ta cần chứng minh  $AM \perp BC$ ,  $CD \perp AB$  và  $BE \perp AC$ .



Hình 20.6

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**\* Trình bày lời giải.**

Điểm  $D$  nằm trên đường trung trực của  $AC$  nên  $DA = DC$ .

Do đó  $\triangle DAC$  cân suy ra  $ACD = CAD = 45^\circ$ .

Xét  $\triangle DAC$  có  $ADC = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$ . Vậy  $CD \perp AB$ .

Ta lại có  $\triangle BCD = \triangle CEB$  (c.g.c)  $\Rightarrow E = D = 90^\circ$ . Do đó  $BE \perp AC$ .

Mặt khác,  $AM$  là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác cân nên  $AM \perp BC$ .

Xét  $\triangle ABC$  có  $AM$ ,  $BE$  và  $CD$  là ba đường cao nên chúng đồng quy.

**C. Bài tập vận dụng**

**• Tính chất đường trung trực**

**3.1.** Cho tam giác  $ABC$ , góc  $A$  tù. Các đường trung trực của  $AB$  và  $AC$  cắt  $BC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ .

Biết góc  $DAE$  có số đo bằng  $30^\circ$ , tính số đo của góc  $BAC$ .

**3.2.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên các tia  $BA$  và  $CA$  lần lượt lấy các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD + CE = BC$ . Chứng minh rằng khi  $D$  và  $E$  di động thì đường trung trực của  $DE$  luôn đi qua một điểm cố định ở trong tam giác  $ABC$ .

**3.3.** Cho góc vuông  $xOy$  và một điểm  $A$  cố định ở trong góc đó. Vẽ góc  $BAC$  bằng  $90^\circ$  sao cho  $B \in Ox$ ,  $C \in Oy$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $M$  nằm trên một đường thẳng cố định.

**3.4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  bất kì. Vẽ các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AB$  là đường trung trực của  $MD$ ,  $AC$  là đường trung trực của  $ME$ .

Xác định vị trí của điểm  $M$  để cho đoạn thẳng  $DE$  có độ dài ngắn nhất.

**3.5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$ , trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $MHN = 90^\circ$ .

a) Gọi  $O$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh rằng khi  $M$  và  $N$  di động thì điểm  $O$  di động trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định vị trí của  $M$  và  $N$  để  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.

**3.6.** Cho góc  $xOy$  khác góc bẹt. Lấy điểm  $M$  trên tia  $Ox$ , điểm  $N$  trên tia  $Oy$  sao cho  $OM + ON = a$  không đổi. Chứng minh rằng khi  $M$  và  $N$  di động trên các tia  $Ox, Oy$  thì đường trung trực của  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định.

**3.7.** Cho tam giác  $ABC$  sao cho  $B < 90^\circ$  và  $C > \frac{1}{2}B$ . . Hãy tìm điểm  $M$  trên cạnh  $AB$ , điểm  $N$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = MN = NC$ .

**• Chứng minh đồng quy thẳng hàng**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**3.8.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $AB < AC$ . Trên các tia  $BA$  và  $CA$  lần lượt lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = CN$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = AB$ . Chứng minh rằng các đường trung trực của  $AD$ ,  $BC$  và  $MN$  cùng đi qua một điểm.

**3.9.** Cho các tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tam giác  $DBC$  vuông tại  $D$  trong đó  $A$  và  $D$  cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Vẽ  $AE \perp DN$ ;  $DF \perp AN$ .

Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AE$ ,  $DF$ ,  $MN$  cùng đi qua một điểm.

**3.10.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , đường cao  $AD$ . Trên tia  $DA$  lấy điểm  $H$  sao cho  $DH = DB$ . Trên tia  $DC$  lấy điểm  $K$  sao cho  $DK = DA$ .

Chứng minh rằng  $KH \perp AB$ .

**3.11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $H$ , trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AHD + ACD = 180^\circ$ . Đường thẳng  $DH$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $O$ .

Chứng minh rằng hai đường thẳng  $OB$  và  $CH$  vuông góc với nhau.

**3.12.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ ,  $A = 60^\circ$ . Hai đường cao  $BE$ ,  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Đường trung trực của  $HB$  cắt  $AB$  tại  $M$ , đường trung trực của  $HC$  cắt  $AC$  tại  $N$ . Chứng minh rằng ba điểm  $M$ ,  $H$ ,  $N$  thẳng hàng.

**3.13.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $H$  là trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng  $BOC + 2BHC = 360^\circ$ .

#### • Tam giác cân

**3.14.** Cho tam giác  $ABC$ , đường phân giác  $AD$ . Một đường thẳng song song với  $AD$  cắt các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ .

Chứng minh rằng đường trung trực của  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định.

**3.15.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $BM$  và đường phân giác  $CD$  cắt nhau tại ba điểm phân biệt  $E$ ,  $F$ ,  $G$ .

Hỏi tam giác  $EFG$  có thể là tam giác đều không?

#### Hướng dẫn giải

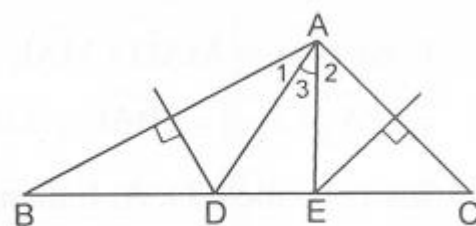
##### 3.1. (h.20.7)

Điểm  $D$  nằm trên đường trung trực của  $AB$  nên  $DA = DB$ .

Suy ra  $\triangle DAB$  cân, do đó  $A_1 = B$ .

Chứng minh tương tự, ta được  $A_2 = C$ .

Ta có  $A_1 + A_2 = B + C = 180^\circ - BAC$ .



Hình 20.7

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Mặt khác,  $A_3 = BAC - (A_1 + A_2)$  nên  $30^\circ = BAC - (180^\circ - BAC)$ .

Suy ra  $2BAC - 180^\circ = 30^\circ \Rightarrow BAC = 105^\circ$ .

### 3.2. (h.20.8)

Vẽ tia phân giác của góc  $B$ , góc  $C$ , chúng cắt nhau tại điểm  $O$  ở trong tam giác  $ABC$ . Đó là một điểm cố định.

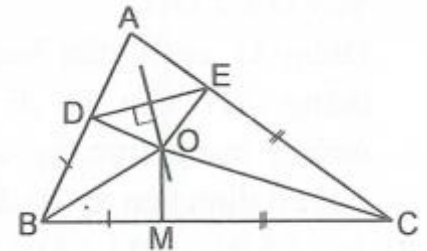
Trên cạnh  $BC$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $BM = BD$ , khi đó  $CM = CE$ .

$$\triangle BOD = \triangle BOM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OD = OM. \quad (1)$$

$$\triangle COE = \triangle COM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OE = OM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $OD = OE$ .

Điểm  $O$  cách đều hai đầu đoạn thẳng  $DE$  nên  $O$  nằm trên đường trung trực của  $DE$ . Nói cách khác, đường trung trực của  $DE$  luôn đi qua một điểm cố định là điểm  $O$ .

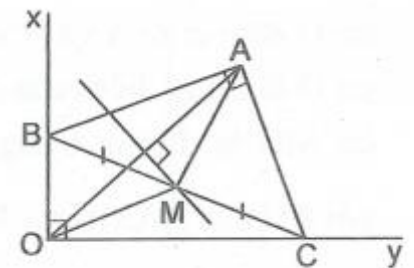


Hình 20.8

### 3.3. (h.20.9)

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , tam giác  $OBC$  vuông ở  $O$  có  $AM, OM$  là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên  $MA = MO = \frac{1}{2}BC$ .

Điểm  $M$  cách đều hai đầu đoạn thẳng  $OA$  cố định nên  $M$  nằm trên đường trung trực của  $OA$ . Do đó  $M$  nằm trên một đường thẳng cố định.



Hình 20.9

### 3.4. (h.20.10)

Vì  $AB, AC$  là đường trung trực của  $MD, ME$  nên  $AD = AM$  và  $AE = AM$ .

$\triangle AMD$  và  $\triangle AME$  cân tại  $A$ , suy ra

$$A_1 = A_2, A_3 = A_4.$$

$$\text{Do đó } MAD = 2A_2; MAE = 2A_3$$

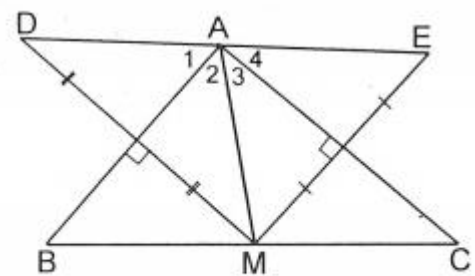
$$\text{Ta có } DAE = MAD + MAE$$

$$= 2(A_2 + A_3) = 2BAC = 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra ba điểm  $D, A, E$  thẳng hàng và  $DE = AD + AE = 2AM$ .

$DE$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow AM$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow AM \perp BC$ .

Vậy khi  $M$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$  thì  $DE$  ngắn nhất hay khi  $AM$  là đường cao xuất phát từ đỉnh  $A$  của  $\triangle ABC$  thì  $DE$  ngắn nhất.



Hình 20.10

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

### 3.5. (h.20.11)

a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có

$$OA = \frac{1}{2}MN; OH = \frac{1}{2}MN.$$

Vậy  $OA = OH$ .

Điểm  $O$  cách đều hai đầu đoạn thẳng  $AH$  nên  $O$  di động trên đường trung trực  $xy$  của  $AH$ . Vì  $AH$  cố định nên  $xy$  cố định.

b) Ta có  $MN = OM + ON = OA + OH$

$\geq AH$  (bất đẳng thức tam giác mở rộng) Dấu " $=$ " xảy ra

$\Leftrightarrow O$  nằm giữa  $A$  và  $H$  và  $OA = OH \Leftrightarrow O$  là trung điểm của  $AH$

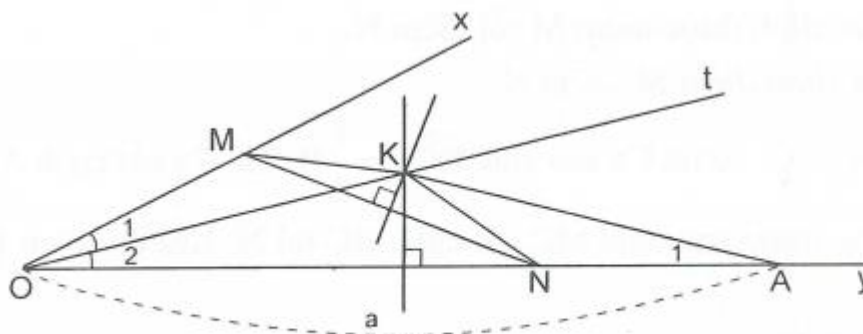
$MO$  là đường trung tuyến ứng

với  $AH$  của  $\triangle AMH$  và  $MO = \frac{1}{2}AH$ .

$\Leftrightarrow HM \perp AB; HN \perp AC$ .

Vậy  $MN$  có độ dài nhỏ nhất là bằng  $AH$  khi  $M$  và  $N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$  (hình 20.12).

### 3.6. (h.20.13)



Hình 20.13

Trên tia  $Oy$  lấy điểm  $A$  sao cho  $OA = a$ . Vì  $OM + ON = a$  nên  $OM = NA$ . Vẽ đường phân giác  $Ot$  của góc  $xOy$  và vẽ đường trung trực của  $OA$  chúng cắt nhau tại  $K$ . Ta phải chứng minh  $K$  là một điểm cố định và đường trung trực của  $MN$  đi qua  $K$ .

Ta có  $OA$  trên tia  $Oy$  mà  $OA = a$  không đổi nên  $A$  là một điểm cố định, do đó đường trung trực của  $OA$  cũng cố định. Tia  $Ot$  là tia phân giác của góc  $xOy$  nên  $Ot$  cũng cố định. Điểm  $K$  là giao điểm của hai đường thẳng cố định nên  $K$  cố định.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Điểm  $K$  nằm trên đường trung trực của  $OA$  nên  $KO = KA$ , do đó  $\triangle KOA$  cân  $\Rightarrow A_1 = O_2$ . Mặt khác,

$$O_1 = O_2 \text{ nên } A_1 = O_1$$

$\triangle KMO$  và  $\triangle KNA$  có:  $OM = NA$ ;  $O_1 = A_1$  và  $KO = KA$ . Do đó  $\triangle KMO = \triangle KNA$

$$\Rightarrow KM = KN.$$

Vậy  $K$  nằm trên đường trung trực của  $MN$ , nói cách khác, đường trung trực của  $MN$  đi qua điểm cố định là điểm  $K$ .

### 3.7. (h.20.14)

#### • Tìm cách giải

Giả sử đã xác định được điểm  $M \in AB$ , điểm  $N \in BC$  sao cho

$$BM = MN = NC.$$

Ta có  $\triangle MBN$  cân tại  $M$  nên  $B = N_1$ .

$\triangle MNC$  cân tại  $N$  nên  $M_1 = C_1$ .

Xét  $\triangle MNC$  có  $N_1$  là góc ngoài nên  $N_1 = C_1 + M_1 = 2C_1$ .

$$\text{Suy ra } C_1 = \frac{1}{2}N_1 = \frac{1}{2}B.$$

Do đó xác định được điểm  $M$  rồi điểm  $N$ .

#### • Cách xác định điểm $M$ , điểm $N$

- Ở trong góc  $C$ , vẽ tia  $Cx$  sao cho  $BCx = \frac{1}{2}B$ . Tia  $Cx$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ .

- Vẽ đường trung trực của  $MC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $N$ . Khi đó ta có  $BM = MN = NC$ .

#### • Chứng minh

Điểm  $N$  nằm trên đường trung trực của  $MC$  nên  $NM = NC$ . (1)

$$\triangle MNC \text{ cân tại } N \Rightarrow M_1 = C_1. \text{ Do đó } N_1 = 2C_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}B = B.$$

Suy ra  $\triangle MBN$  là tam giác cân  $\Rightarrow MB = MN$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $MB = MN = NC$ .

### 3.8. (h.20.15)

Vẽ các đường trung trực của  $AD$  và  $BC$ , chúng cắt nhau tại  $O$ .

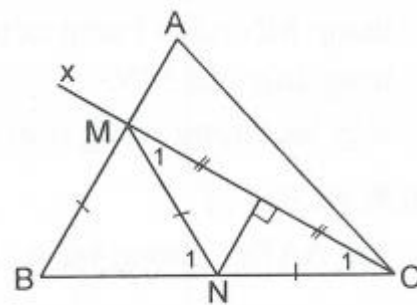
Điểm  $O$  nằm trên đường trung trực của  $AD$  nên  $OA = OD$ .

Điểm  $O$  nằm trên đường trung trực của  $BC$  nên  $OB = OC$ .

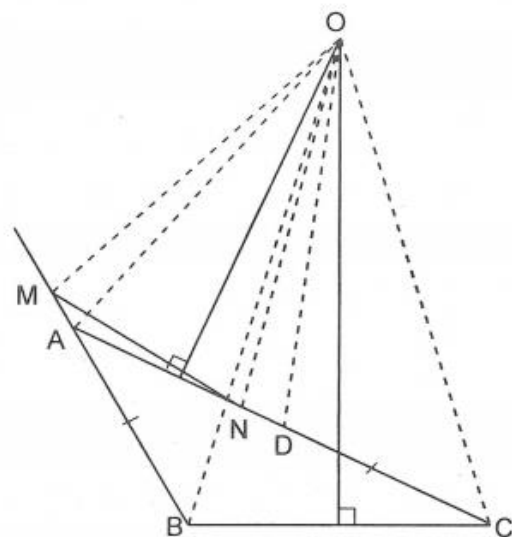
Ta có  $\triangle OBA = \triangle OCD$  (c.c.c).

Suy ra  $\angle OBA = \angle OCD$ .

Do đó  $\triangle OBM = \triangle OCN$  (c.g.c)



Hình 20.14



Hình 20.15

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\Rightarrow OM = ON$ . Điểm  $O$  cách đều hai đầu đoạn thẳng  $MN$  nên  $O$  nằm trên đường trung trực của  $MN$ .

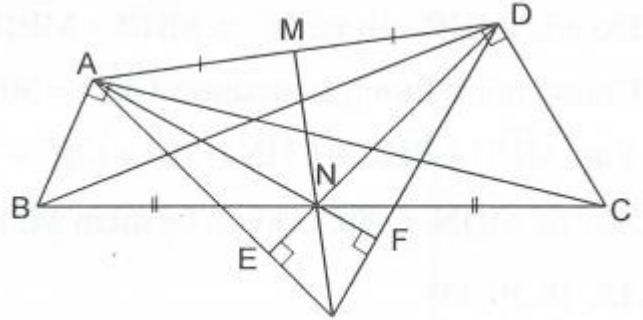
Vậy ba đường trung trực của  $AD$ ,  $BC$  và  $MN$  cùng đi qua điểm  $O$ .

### 3.9. (h.20.16)

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\triangle DBC$  vuông tại  $D$  có  $AN$  và  $DN$  là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $BC$  nên  $AN = DN = \frac{1}{2}BC$ .

Suy ra  $\triangle NAD$  cân tại  $N$ , do đó đường trung tuyến  $NM$  cũng là đường cao.

Ba đường thẳng  $AE$ ,  $DF$ ,  $MN$  là ba đường cao của  $\triangle NAD$  nên chúng cùng đi qua một điểm.



Hình 20.16

### 3.10. (h.20.17)

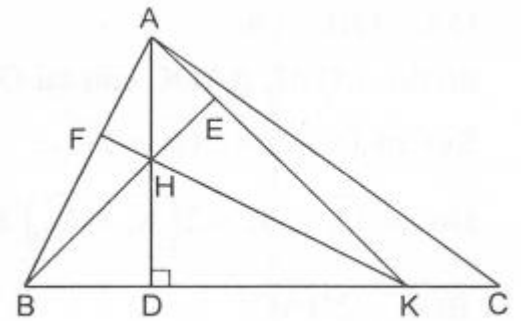
Gọi  $E$  là giao điểm của  $BH$  và  $AK$ .  $\triangle DBH$  vuông cân tại  $D$  nên  $DBH = 45^\circ$ .  $\triangle DKA$  vuông cân tại  $D$  nên  $DAK = 45^\circ$ .

Xét  $\triangle EBK$  có  $DBE + BKE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

suy ra  $BEK = 90^\circ$ , do đó  $BE \perp AK$ .

Xét  $\triangle ABK$  có  $AD$  và  $BE$  là hai đường cao cắt nhau tại  $H$

Suy ra  $HK$  là đường cao thứ ba, do đó  $KH \perp AB$



Hình 20.17

### 3.11. (h.20.18)

Ta có  $AHD + ACD = 180^\circ$  (giả thiết) (1)

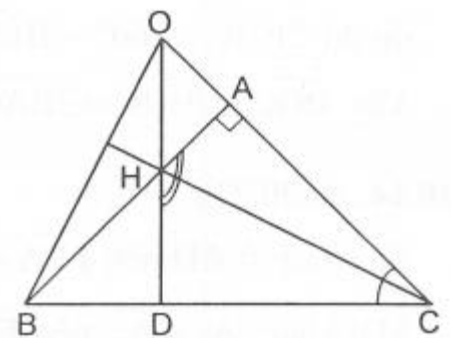
và  $AHD + BHD = 180^\circ$  (kề bù). (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $ACD = BHD$ .

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $ABC + ACB = 90^\circ$ .

Do đó  $ABC + BHD = 90^\circ$ . Suy ra  $BDH = 90^\circ$ . Vậy  $HD \perp BC$ .

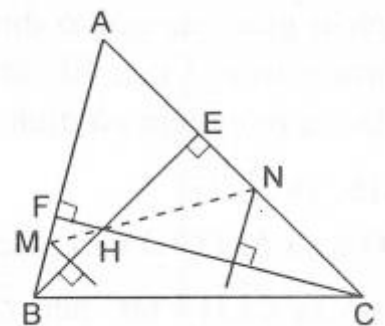
Xét  $\triangle OBC$  có  $OD$  và  $BA$  là hai đường cao cắt nhau tại  $H$ , suy ra  $CH$  là đường cao thứ ba. Do đó  $CH \perp OB$ .



Hình 20.18

### 3.12. (h.20.19)

Hai góc  $BAC$  và  $BHC$  là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên chúng bù nhau:



Hình 20.19

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$A + BHC = 180^\circ \Rightarrow BHC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Điểm  $M$  nằm trên đường trung trực của  $HB$  nên  $MH = MB$ .

$$\text{Do đó } \triangle MHB \text{ cân tại } M \Rightarrow MHB = MBH = 30^\circ.$$

Chứng minh tương tự ta được  $CHN = 30^\circ$ .

$$\text{Vậy } MHB + BHC + CHN = 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra  $MHN = 180^\circ$ , do đó ba điểm  $M, H, N$  thẳng hàng.

### 3.13. (h.20.20)

Vì  $\triangle ABC$  nhọn nên  $O$  và  $H$  nằm trong tam giác.

Điểm  $O$  cách đều ba đỉnh của  $\triangle ABC$  nên

$$OA = OB = OC,$$

do đó  $\triangle AOB, \triangle AOC$  cân tại  $O$ .

$$\text{Suy ra } O_1 = 2A_1; O_2 = 2A_2.$$

$$\text{Do đó } O_1 + O_2 = 2(A_1 + A_2) \text{ hay } BOC = 2BAC.$$

Điểm  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$  nên  $BH \perp AC, CH \perp AB$ .

Hai góc  $BAC$  và  $BHC$  là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên

$$BHC + BAC = 180^\circ \Rightarrow BHC = 180^\circ - BAC, \text{ do đó } 2BHC = 360^\circ - 2BAC.$$

$$\text{Vậy } BOC + 2BHC = 2BAC + (360^\circ - 2BAC) = 360^\circ$$

### 3.14. (h.20.21)

Ta có  $EF \parallel AD$  nên  $FEA = A_1; F = A_2$ .

Mặt khác,  $A_1 = A_2$  nên  $FEA = F$ .

Suy ra  $\triangle AEF$  cân tại  $A$ .

Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh nên đường trung trực  $d$  của  $EF$  đi qua đỉnh  $A$ . Đó là một điểm cố định.

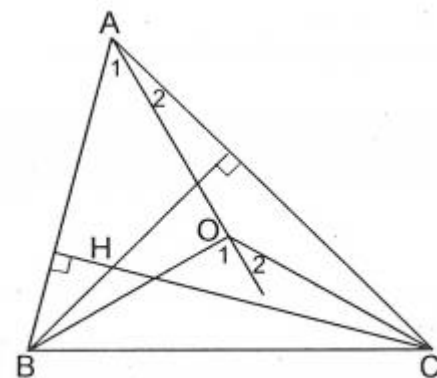
### 3.15. (h.20.22)

Giả sử  $\triangle EFG$  là tam giác đều, suy ra  $CEH = 60^\circ$  nên  $C_1 = 30^\circ, C_2 = 30^\circ$ .

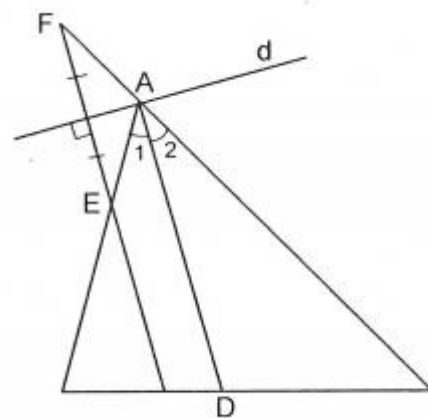
Ta còn có  $CGM = EGF = 60^\circ$ .

$$\text{Do đó } CMG = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ. \text{ Suy ra } BM \perp AC.$$

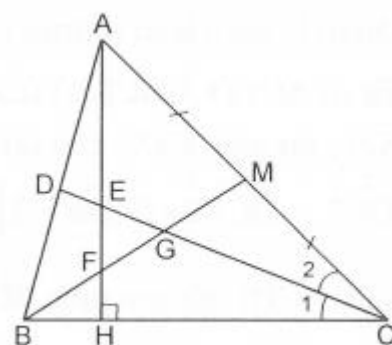
Xét  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến  $BM$  đồng thời là đường cao nên  $\triangle ABC$  cân.



Hình 20.20



Hình 20.21



Hình 20.22

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Mặt khác,  $ACB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$  nên  $\triangle ABC$  là tam giác đều.

Do đó ba đường  $AH$ ,  $BM$ ,  $CD$  phải đồng quy, tức là ba điểm  $E$ ,  $F$ ,  $G$  trùng nhau, trái giả thiết. Vậy  $\triangle EFG$  không thể là tam giác đều.

## Chuyên đề 4. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

### A. Kiến thức cần nhớ

Ba điểm cùng thuộc một đường thẳng gọi là ba điểm thẳng hàng. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta có thể sử dụng một số phương pháp sau đây:

#### 1. Phương pháp 1.

Nếu  $ABD + DBC = 180^\circ$  thì ba

điểm A; B; C thẳng hàng.

#### 2. Phương pháp 2.

Nếu  $AB \parallel a$  và  $AC \parallel a$  thì ba

điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này

là: tiên đề Ô-Clit)

#### 3. Phương pháp 3.

Nếu  $AB \perp a$ ;  $AC \perp a$  thì ba

điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này

là: **Có một và chỉ một đường**

**thẳng  $a'$  đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước)**

Hoặc A; B; C cùng thuộc một đường trung trực của một đoạn thẳng.

#### 4. Phương pháp 4.

Nếu tia OA và tia OB là hai tia phân giác của

góc xOy thì ba điểm O; A; B thẳng hàng.

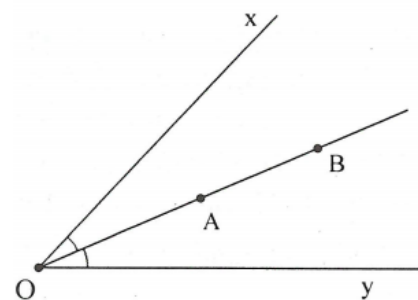
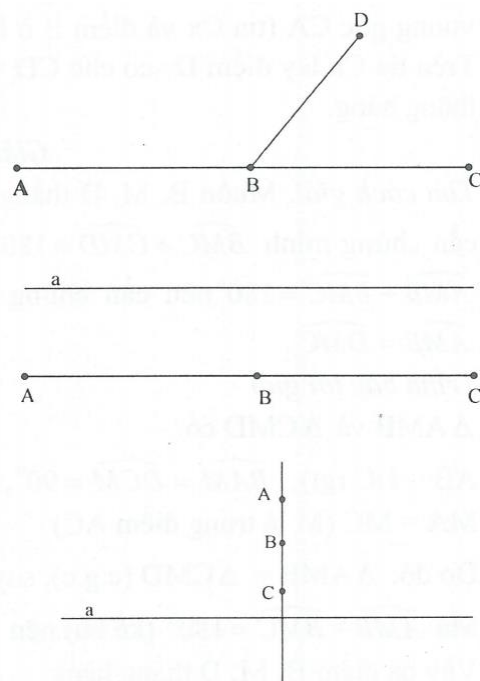
(Cơ sở của phương pháp này là:

**Mỗi góc khác góc bẹt có một và chỉ một tia phân giác).**

**\* Hoặc:** Hai tia OA và OB cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa

tia Ox,  $\angle xOA = \angle xOB$  thì ba điểm O, A, B thẳng hàng.

5. Nếu K là trung điểm BD, K' là giao điểm của BD và AC. Nếu K' là trung điểm BD thì  $K' \equiv K$  và A, K, C thẳng hàng.



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

(Cơ sở của phương pháp này là: Mỗi đoạn thẳng chỉ có một trung điểm).

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm AC. Kẻ tia Cx vuông góc CA (tia Cx và điểm B ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Trên tia Cx lấy điểm D sao cho  $CD = AB$ . Chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

**Giải**

\* **Tìm cách giải.** Muốn B, M, D thẳng hàng

cần chứng minh  $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$ . Do

$\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$  nên cần chứng minh

$\angle AMB = \angle DMC$

\* **Trình bày lời giải**

$\triangle AMB$  và  $\triangle CMD$  có:

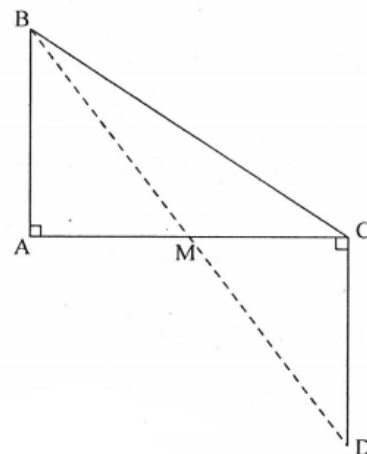
$AB = DC$  (gt),  $\angle BAM = \angle DCM = 90^\circ$ ,

$MA = MC$  (M là trung điểm AC)

Do đó:  $\triangle AMB = \triangle CMD$  (c.g.c), suy ra:  $\angle AMB = \angle DMC$

Mà  $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$  (kề bù) nên  $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$

Vậy ba điểm B; M; D thẳng hàng.



**Ví dụ 2.** Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm AM, trên tia AD lấy điểm N sao cho D là trung điểm AN. Chứng minh ba điểm M, C, N thẳng hàng.

**Giải**

\* **Tìm cách giải.** Chứng minh:  $CM \parallel BD$  và  $CN \parallel BD$  từ đó suy ra M, C, N thẳng hàng.

\* **Trình bày lời giải**

$\triangle AOD$  và  $\triangle COB$  có  $OA = OC$

(vì O là trung điểm AC)

$\angle AOD = \angle COB$  (hai góc đối đỉnh)

$OD = OB$

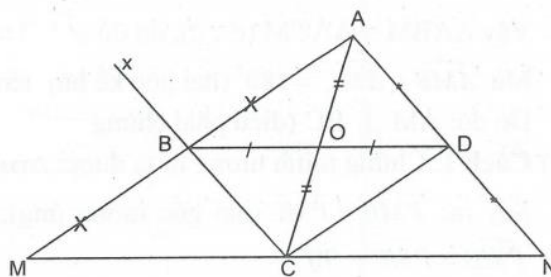
(vì O là trung điểm BD)

Do đó  $\triangle AOD = \triangle COB$  (c.g.c)

Suy ra:  $\angle DAO = \angle OCB$ . Mà hai góc ở vị trí so le trong,

do đó:  $AD \parallel BC$ , nên  $\angle DAB = \angle CBM$  (ở vị trí đồng vị)

$\triangle DAB$  và  $\triangle CBM$  có:  $AD = BC$  (do  $\triangle AOD = \triangle COB$ ),  $\angle DAB = \angle CBM$ ,  $AB = BM$  (B là trung điểm AM). Vậy  $\triangle DAB = \triangle CBM$  (c.g.c). Suy ra  $\angle ABD = \angle BMC$ . Do đó  $BD \parallel CM$ . (1)



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

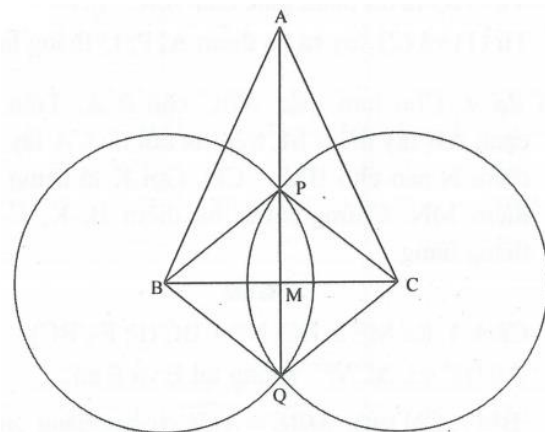
Lập luận tương tự ta được  $BD \parallel CN$ . (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ô-Clit suy ra ba điểm M, C, N thẳng hàng.

**Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC có  $AB = AC$ . Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh  $AM \perp BC$ .

b) Vẽ hai đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.



### Giải

\* *Tìm cách giải.* Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng, chúng ta có thể:

- Chứng minh AM, PM, QM cùng vuông góc BC
- Hoặc AP, AQ là tia phân giác của góc BAC.

\* *Trình bày lời giải*

a)  $\triangle ABM$  và  $\triangle ACM$  có:  $AB = AC$  (giả thiết), AM chung, MB = MC (M là trung điểm BC)

Vậy  $\triangle ABM = \triangle ACM$  (c.c.c), do đó  $\angle AMB = \angle AMC$  (hai góc tương ứng).

Mà  $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$  (hai góc kề bù) nên  $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$

Do đó:  $AM \perp BC$  (điều phải chứng minh).

b) **Cách 1.** Chứng minh tương tự ta được:  $\angle BPM = \angle CPM$  (c.c.c).

Suy ra:  $\angle PMB = \angle PMC$  (hai góc tương ứng), mà  $\angle PMB + \angle PMC = 180^\circ$  nên  $\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ$

Do đó:  $PM \perp BC$ .

Lập luận tương tự  $QM \perp BC$ .

Từ điểm M trên BC có  $AM \perp BC$ ,  $PM \perp BC$ ,  $QM \perp BC$  nên ba điểm A, P, Q thẳng hàng (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.**  $\triangle BPA$  và  $\triangle CPA$  có  $AB = AC$ , AP là cạnh chung, BP = CP (cùng bán kính)

$\Rightarrow \triangle BPA = \triangle CPA$  (c.c.c)  $\Rightarrow \angle BAP = \angle CAP$ . Vậy AP là tia phân giác của  $\angle BAC$ . (1)

$\triangle ABQ$  và  $\triangle ACQ$  có  $AB = AC$ , AQ là cạnh chung, BQ = CQ (cùng bán kính)  $\Rightarrow \triangle ABQ = \triangle ACQ$

(c.c.c)  $\Rightarrow \angle BAQ = \angle CAQ$ .

Vậy AQ là tia phân giác của  $\angle BAC$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A; P; Q thẳng hàng.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối tia CA lấy điểm N sao cho  $BM = CN$ . Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng.

**Giải**

- **Cách 1.** Kẻ  $ME \perp BC; NF \perp BC$   $E; F \in BC$

$\triangle BME$  và  $\triangle CNF$  vuông tại E và F có:

$BM = CN$  (gt),  $\angle MBE = \angle NCF$  (cùng bằng  $\angle ACB$ )

Do đó:  $\triangle BME = \triangle CNF$  (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra:  $ME = NF$ .

Gọi  $K'$  là giao điểm của BC và MN.

$\triangle MEK'$  và  $\triangle NFK'$  vuông ở E và F có:  $ME = NF$  (cmt),  $\angle EMK' = \angle FNK'$  (so le trong của  $ME \parallel FN$ ). Vậy  $\triangle MEK' = \triangle NFK'$  (g-c-g).

Do đó:  $MK' = NK'$ .

Vậy  $K'$  là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên  $K = K'$

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- **Cách 2.** Kẻ  $ME \parallel AC$  ( $E \in BC$ )

$\Rightarrow \angle ACB = \angle MEB$  (hai góc đồng vị)

Mà  $\angle ACB = \angle ABC$  nên  $\angle MBE = \angle MEB$

Vậy  $\triangle MBE$  cân ở M.

Do đó:  $MB = ME$ , kết hợp với giả thiết  $MB = NC$  ta được  $ME = CN$ .

Gọi  $K'$  là giao điểm của BC và MN.

$\triangle MEK'$  và  $\triangle NCK'$  có:  $\angle K'ME = \angle K'NC$

(so le trong của  $ME \parallel AC$ )

$ME = CN$  (chứng minh trên),  $\angle MEK' = \angle NCK'$  (so le trong của  $ME \parallel AC$ ).

Do đó:  $\triangle MEK' = \triangle NCK'$  (g.c.g)  $\Rightarrow MK' = NK'$

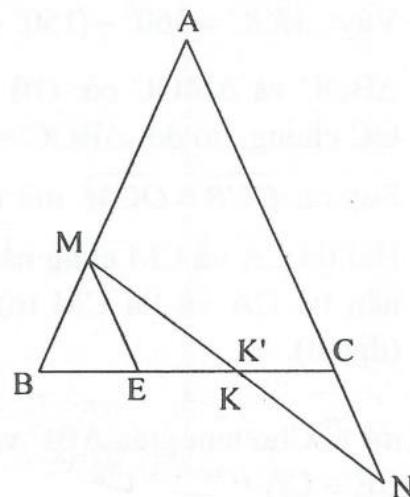
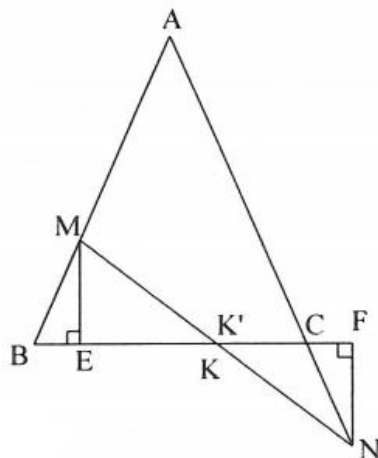
Vậy  $K'$  là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên  $K \equiv K'$ .

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- **Lưu ý.** Cả hai cách giải trên, có nhiều bạn chứng minh  $\triangle MEK = \triangle NCK$  vô tình thừa nhận B, K, C thẳng hàng, việc chứng minh nghe có lý lắm nhưng không biết là chưa chính xác.

**Ví dụ 5.** Cho tam giác ABC cân ở A,  $\angle BAC = 108^\circ$ . Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho  $\angle CBO = 12^\circ$ . Về tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.

**Giải**



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

\* *Tìm cách giải.* Chứng minh  $OCA = OCM$  từ đó suy ra tia CA và tia CM trùng nhau.

\* *Trình bày lời giải*

Tam giác ABC cân ở A nên

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

(tính chất của tam giác cân).

Mà CO là tia phân giác của  $\angle ACB$ ,

nên  $\angle ACO = \angle BCO = 18^\circ$ . Do đó  $\angle BOC = 150^\circ$

$\triangle BOM$  đều nên  $\angle BOM = 60^\circ$ .

Vậy:  $\angle MOC = 360^\circ - 150^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

$\triangle BOC$  và  $\triangle MOC$  có:  $OB = OM$  (vì  $\triangle BOM$  đều);

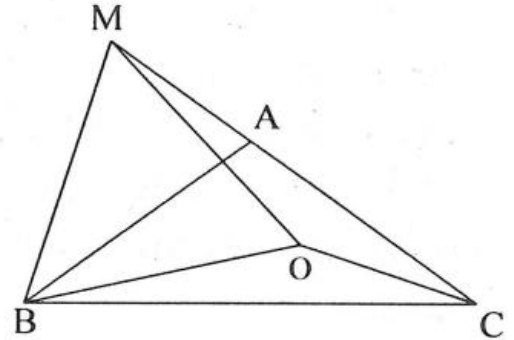
$\angle BOC = \angle MOC = 150^\circ$ ;

OC chung, do đó:  $\triangle BOC = \triangle MOC$  (c.g.c)

Suy ra:  $\angle OCB = \angle OCM$  mà  $\angle OCB = \angle OCA$  (gt) nên  $\angle OCA = \angle OCM$

Hai tia CA và CM cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ CO và  $\angle OCA = \angle OCM$

nên tia CA và tia CM trùng nhau. Vậy ba điểm C, A, M thẳng hàng. (đpcm).



**Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A và  $\angle B = 60^\circ$ . Vẽ tia  $Cx \perp BC$  và lấy  $CE = CA$  (CE và CA cùng phía với BC). Trên tia đối tia BC và lấy F sao cho  $BF = BA$ . Chứng minh rằng:

a)  $\triangle ACE$  đều;

b) E, A, F thẳng hàng.

**Giải**

\* *Tìm cách giải.* Nhận thấy tam giác

ABC vuông tại A và  $\angle B = 60^\circ$  nên

$$\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle ACE = 60^\circ$$

$\triangle CAE$  đều.

Do đó muốn chứng tỏ B, A, F

thẳng hàng thì chúng ta chỉ cần

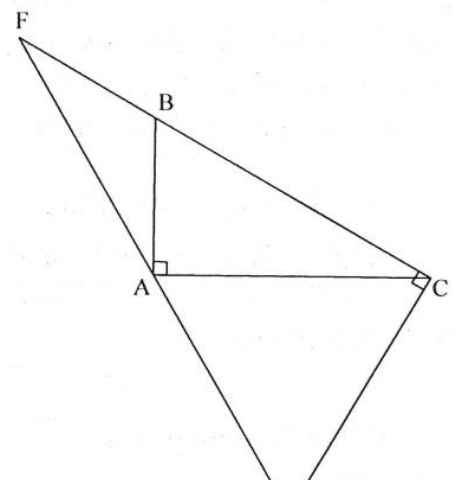
chứng tỏ  $\angle BAF = 30^\circ$ .

\* *Trình bày lời giải.*

a) ABC vuông tại A và  $\angle B = 60^\circ$  nên  $\angle ACB = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle ACE = 60^\circ$  mà  $CA = CE$  nên  $\triangle CAE$  đều.

b) Ta có:  $BA = BF$  (gt)  $\Rightarrow \triangle BFA$  cân  $\Rightarrow \angle ABC = 2\angle BAF$ .



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Suy ra:  $BAF = 30^\circ$ .

Vậy:  $FAB + BAC + CAE = 30^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Ta suy ra ba điểm F; A; E thẳng hàng.

### C. Bài Tập vận dụng

**4.1.** Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho  $ME = MA$ .

a) Chứng minh rằng  $AC = EB$  và  $AC \parallel BE$ .

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho  $AI = EK$ .

Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

**4.2.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, có góc  $A < 90^\circ$ . Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a)  $\triangle BCE = \triangle CBD$ ;

b)  $\triangle BEK = \triangle CDK$ ;

c) AK là phân giác góc BAC.

d) Ba điểm A, K, I thẳng hàng (với I là trung điểm BC).

**4.3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ . Kẻ tia phân giác AD của  $BAC$  (D thuộc BC). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho  $AE = AB$ , trên tia AB lấy điểm F sao cho  $AF = AC$ . Chứng minh rằng:

a)  $\triangle BDF = \triangle EDC$ ;

b) F, D E thẳng hàng;

c)  $AD \perp FC$

**4. 4.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tam giác BCM cân tại M có góc ở đáy là  $15^\circ$ . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ tam giác đều ABN. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

**4.5.** Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A là  $\triangle ADB; \triangle ACE$  có  $AB = AD, AC = AE$ . Kẻ AH vuông góc BC; DM vuông góc AH và EN vuông góc AH. Chứng minh rằng:

a)  $DM = AH$ .

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng.

**4.6.** Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt hai điểm B và C sao cho  $OB = OC$ . Vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm A và D nằm trong góc xOy. Chứng minh ba điểm O, A, D thẳng hàng.

**4.7.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh A, D, M thẳng hàng.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**4.8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $BC = 2AB$ . Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho  $ABD = \frac{1}{3}ABC$ . Lấy

E là một điểm trên cạnh AB sao cho  $ACE = \frac{1}{3}ACB$ . BD và CE cắt nhau tại F; I và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng ba điểm H, D, G thẳng hàng.

**4.9.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H;  $ACB = 30^\circ$ . Dựng tam giác ACD đều (D và B nằm khác phía đối với AC). Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, K, D thẳng hàng.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**4.1.**

a)  $\triangle AMC$  và  $\triangle EMB$  có  $MA = ME$ ,

$$AMC = EMB; MB = MC$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AC = EB; CAM = MEB$$

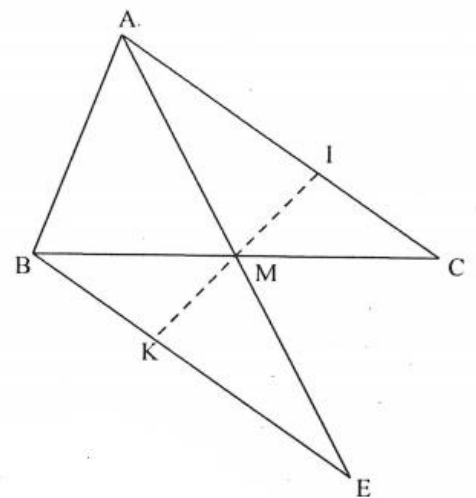
$$\Rightarrow AC \parallel BD.$$

b)  $\triangle AIM$  và  $\triangle EKM$  có  $AM = EM$ ;

$$CAM = MEB; AI = EK \Rightarrow \triangle AIM = \triangle EKM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AMI = EMK \text{ mà } AMI + IME = 180^\circ \Rightarrow EMK + IME = 180^\circ$$

$$\Rightarrow I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$



**4.2.**

a)  $\triangle BCE$  và  $\triangle CBD$  có  $BEC = CDB = 90^\circ; EBC = DCB$ ; BC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BCE = \triangle CBD \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

b)  $\triangle BCE = \triangle CBD \Rightarrow BE = CD$ .

$\triangle BKE$  và  $\triangle CDK$  có

$$BEK = CDK = 90^\circ; BE = CD; BKE = CKD$$

$$\Rightarrow \triangle BKE = \triangle CKD \text{ (góc nhọn, cạnh góc vuông)}$$

c)  $\triangle BKE = \triangle CKD \Rightarrow KE = KD$ .

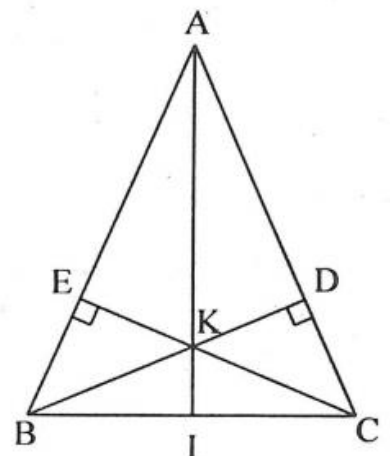
$$\triangle AEK \text{ và } \triangle ADK \text{ có } AEK = ADK = 90^\circ;$$

$$AI \text{ chung; } KE = KD \Rightarrow \triangle AEK = \triangle ADK \Rightarrow EAK = DAK$$

Hay AK là tia phân giác  $BAC$  (1).

d)  $\triangle ABI$  và  $\triangle ACI$  có  $AB = AC$ ; AI là cạnh chung;  $BI = CI$

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.c.c)}$$



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$\Rightarrow BAI = CAI$  hay AI là tia phân giác của  $BAC$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, K, I thẳng hàng.

#### 4.3.

a)  $\triangle ABD$  và  $\triangle AED$  có  $AB = AE$ ;  $BAD = EAD$ ; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AED$  (c.g.c)  $\Rightarrow BD = ED$ ;  $\angle ABD = \angle AED$ .

Mặt khác  $\angle ABD + \angle DBF = 180^\circ$ ;  $\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$  nên  $\angle DBF = \angle DEC$ .

Ta có  $AF = AC$ ;  $AB = AE \Rightarrow BF = EC$ .

$\triangle BDF$  và  $\triangle EDC$  có  $BF = EC$ ;

$\angle DBF = \angle DEC$ ;  $BD = DE$

$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle EDC$  (c.g.c)

b)  $\triangle BDF = \triangle EDC$

$\Rightarrow \angle BDF = \angle EDC$  mà

$\angle BDF + \angle FDC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle EDC + \angle FDC = 180^\circ$

$\Rightarrow F, D, E$  thẳng hàng.

c) Gọi H là giao điểm của AD và CF

$\triangle AHF$  và  $\triangle AHC$  có  $AF = AC$ ;  $\angle FAH = \angle CAH$ ; AH chung

$\triangle AHF = \triangle AHC$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle AHF = \angle AHC$  mà  $\angle AHF + \angle AHC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AHF = \angle AHC = 90^\circ$

Vậy  $AH \perp FC$  hay  $AD \perp FC$ .

#### 4.4.

Gợi ý: Tính góc  $\angle ABN = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ABM = \angle ABC + \angle CBM = 60^\circ$  mà BN;

BM thuộc cùng một nửa mặt phẳng

bên AB nên tia BM trùng với tia BN.

Vậy B, M, N thẳng hàng.

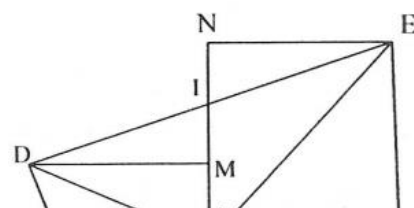
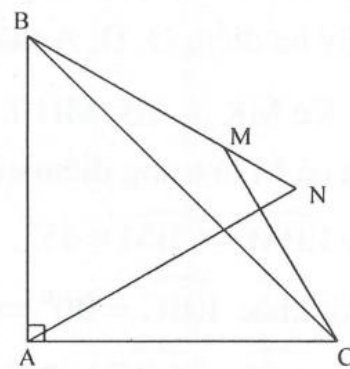
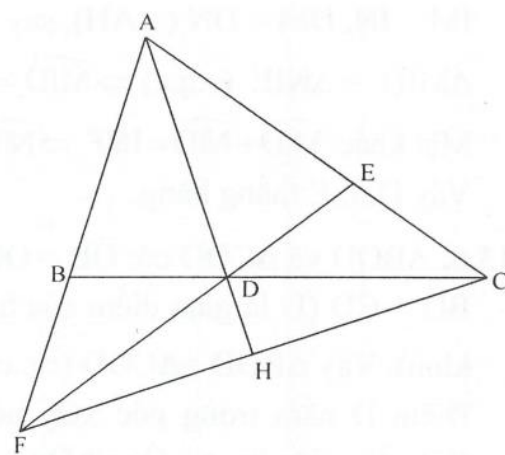
#### 4.5.

a) Ta có  $\triangle DMA$  vuông tại M nên  $\angle MDA + \angle MAD = 90^\circ$  mà  $\angle BAH + \angle MAD = 90^\circ$  (vì  $\angle BAD = 90^\circ$ )

$\Rightarrow \angle MDA = \angle BAH$

Xét  $\triangle DMA$  và  $\triangle AHB$  có  $\angle DMA = \angle AHB = 90^\circ$ ;

$\angle MDA = \angle BAH$ ;  $AD = AB$  nên  $\triangle DMA = \triangle AHB$







GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

## Chuyên đề 5. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM (ĐỒNG QUY)

### A. Kiến thức cần nhớ

Trong các chuyên đề trước ta gặp một số bài toán về chứng minh ba đường thẳng  $a, b, c$  đồng quy.

Phương pháp giải các bài toán này là vận dụng định lý về các đường đồng quy của tam giác:

- Ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy;
- Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy;
- Ba đường trung trực của một tam giác đồng quy;
- Ba đường cao của một tam giác đồng quy.

Nếu ba đường thẳng  $a, b, c$  đã cho không phải là các đường chủ yếu của tam giác thì để chứng minh  $a, b, c$  đồng quy, ta có thể gọi giao điểm của  $a$  và  $b$  là  $O$  rồi chứng minh đường thẳng  $c$  đi qua  $O$  hay chứng minh  $O$  nằm trên đường thẳng  $c$ .

Một số trường hợp có thể đưa bài toán chứng minh ba đường đồng quy về chứng minh ba điểm thẳng hàng.

### B. Một số ví dụ

**Ví dụ 1:** Cho tam giác  $ABC$ , góc  $A$  tù. Vẽ các đường thẳng  $m$  và  $n$  lần lượt là đường trung trực của  $AB$  và  $AC$ , cắt  $BC$  theo thứ tự tại  $E$  và  $F$ . Vẽ tia phân giác  $Ax$  của góc  $EAF$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $m, n$  và  $Ax$  đồng quy

**Giải (h.21.1)**

**\* Tìm cách giải.**

Gọi  $O$  là giao điểm của  $m$  và  $n$ . Ta phải chứng minh tia  $Ax$  đi qua  $O$ . Muốn vậy phải chứng minh  $OAE = OAF$ .

**\* Trình bày lời giải.**

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường thẳng  $m$  và  $n$ .

Ta có:  $OB = OC = OA$ .

$\triangle AOE = \triangle BOE$  (c.c.c). Suy ra  $A_1 = B_1$ .

$\triangle AOF = \triangle COF$  (c.c.c). Suy ra  $A_2 = C_2$ .

Mặt khác,  $B_1 = C_2$  (vì  $\triangle BOC$  cân tại  $O$ ) nên  $A_1 = A_2$

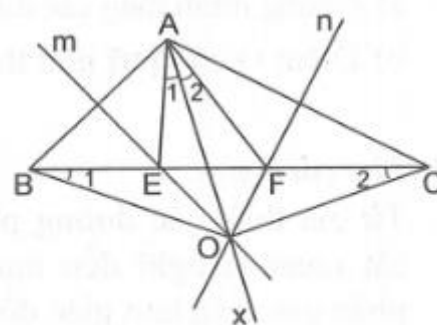
Do đó tia  $AO$  là tia phân giác của góc  $EAF$ .

Suy ra ba đường thẳng  $m, n$  và  $Ax$  đồng quy tại  $O$ .

**Ví dụ 2:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AM, BE$  và  $CD$  đồng quy

**Giải (h.21.2)**

**\* Tìm cách giải.**



Hình 21.1

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Gọi  $O$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ . Ta phải chứng minh  $AM$  đi qua  $O$  tức là phải chứng minh ba điểm  $A, O, M$  thẳng hàng.

**\* Trình bày lời giải.**

Ta có  $AB = AC$ ,  $AD = AE$ , suy ra  $BD = CE$ .

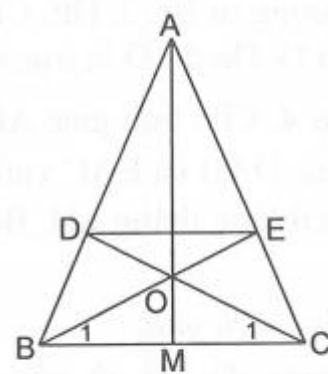
$$\triangle EBC = \triangle DCB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow B_1 = C_1.$$

Gọi  $O$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ .

Vì  $\triangle OBC$  cân tại  $O$  nên  $OB = OC$ . (1)

Mặt khác,  $AB = AC$  (giả thiết) (2) và  $MB = MC$  (giả thiết) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm  $A, O, M$  thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường trung trực của  $BC$ ). Do đó ba đường thẳng  $AM, BE, CD$  đồng quy.



Hình 21.2

**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Các đường phân giác các góc ngoài của tam giác cắt nhau tại  $D, E, F$  ( $D$  nằm trong góc  $A, E$  nằm trong góc  $B, F$  nằm trong góc  $C$ ).

a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AD, BE, CF$  đồng quy tại một điểm  $O$ .

b) Điểm  $O$  có vị trí như thế nào đối với tam giác  $DEF$ ?

**Giải (h.21.3)**

**\* Tìm cách giải.**

Từ giả thiết các đường phân giác ngoài cắt nhau ta nghĩ đến định lý ba đường phân giác của tam giác đồng quy. Vì vậy để chứng minh  $AD, BE, CF$  đồng quy ta chỉ cần chứng minh  $AD, BE, CF$  là ba đường phân giác của tam giác  $ABC$ .

**\* Trình bày lời giải.**

a) Xét tam giác  $ABC$ , các đường phân giác ngoài tại đỉnh  $B$  và đỉnh  $C$  cắt nhau tại  $D$ . Suy ra  $AD$  là đường phân giác trong tại đỉnh  $A$ .

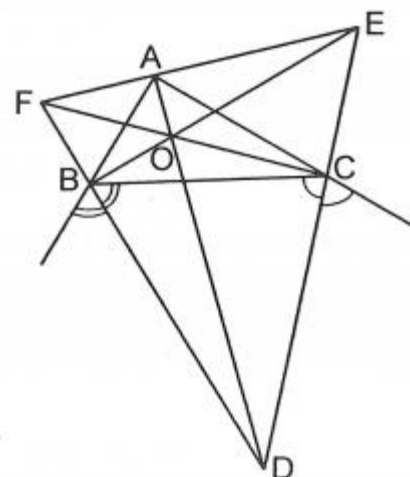
Chứng minh tương tự ta được  $BE, CF$  lần lượt là các đường phân giác trong tại đỉnh  $B, C$  của tam giác  $ABC$ .

Do đó ba đường thẳng  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $O$ .

b) Ba điểm  $F, B, D$  thẳng hàng; ba điểm  $E, C, D$  thẳng hàng; ba điểm  $F, A, E$  thẳng hàng.

Xét  $\triangle DEF$  có  $AD \perp EF$  (hai đường phân giác của hai góc kề bù).

Tương tự  $BE \perp DF, CF \perp DE$  nên  $AD, BE, CF$  là ba đường cao gặp nhau tại  $O$ . Do đó  $O$  là trực tâm của tam giác  $DEF$ .



Hình 21.3

**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A = 135^\circ$ . Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác  $DAB$  và  $EAC$  vuông cân tại  $D$  và  $E$ . Vẽ  $AH \perp BC$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AH, BD, CE$  đồng quy.

**Giải (h.21.4)**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**\* Tìm cách giải.**

Trong đề bài có yếu tố góc vuông, có yếu tố đường cao nên ta có thể dùng định lý ba đường cao của tam giác đồng quy.

**\* Trình bày lời giải.**

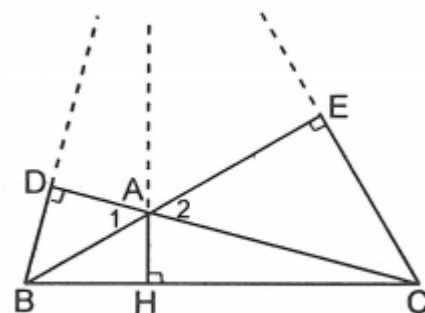
Tam giác  $DAB$  vuông cân tại  $D \Rightarrow A_1 = 45^\circ$ .

Tam giác  $EAC$  vuông cân tại  $E \Rightarrow A_2 = 45^\circ$ .

Ta có  $BAD + BAC = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$ , suy ra ba điểm  $D, A, C$  thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được ba điểm  $B, A, E$  thẳng hàng.

Xét  $\triangle ABC$  có  $AH, BD, CE$  là ba đường cao nên chúng đồng quy.

**\* Lưu ý:** Trục tâm của tam giác tù nằm ngoài tam giác.

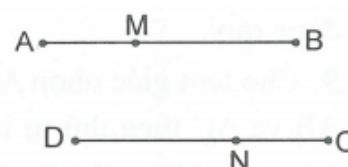


Hình 21.4

**C. Bài tập vận dụng**

**• Đưa chứng minh đồng quy về chứng minh thẳng hàng**

**5.1.** Trong hình 21.5 có:  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ ,  $AM = CN$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AC$ ,  $BD$  và  $MN$  đồng quy.



Hình 21.5

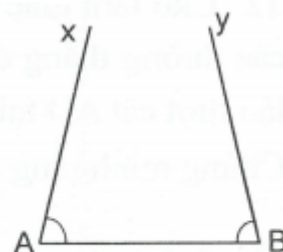
**5.2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $B = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là một điểm ở trong tam giác sao cho  $MBC = 40^\circ$ ,  $MCB = 20^\circ$ . Vẽ điểm  $D$  và  $E$  sao cho đường thẳng  $BC$  là đường trung trực của  $MD$  và đường thẳng  $AC$  là đường trung trực của  $ME$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $BM$ ,  $AC$  và  $DE$  đồng quy.

**5.3.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  và điểm  $M$  nằm trong tam giác sao cho  $AMB = AMC = 120^\circ$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $BC$  không chứa  $A$  vẽ các tia  $Bx$  và  $Cy$  sao cho  $CBx = B Cy = 60^\circ$ .

Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AM$ ,  $Bx$ ,  $Cy$  đồng quy.

**5.4.** Hình 21.6 có  $BAx = ABy < 90^\circ$ . Gọi  $d$  là đường trung trực của  $AB$ .

Chứng minh rằng các đường thẳng  $Ax$ ,  $By$  và  $d$  đồng quy.



Hình 21.6

**5.5.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $O$  ở trong tam giác.

**5.6.** Gọi  $F$  và  $G$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $AOB$  và  $AOC$ .

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AO$ ,  $BF$ ,  $CG$  đồng quy.

• **Ba đường phân giác đồng quy**

5.7. Trong hình 21.7, hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  không song song. Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AB$ ,  $CD$ ,  $MN$  đồng quy.

5.8. Cho tam giác  $ABC$ ,  $A = 120^\circ$ . Vẽ các đường phân giác  $AD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $O$ . Từ  $B$  vẽ đường thẳng  $xy \perp BO$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $xy$ ,  $DE$  và  $AC$  đồng quy.

5.9. Cho tam giác nhọn  $ABC$ , đường cao  $AD$ . Vẽ các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự là các đường trung trực của  $DM$  và  $DN$ . Gọi giao điểm của  $MN$  với  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự là  $F$  và  $E$ .

Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  đồng quy.

• **Ba đường cao đồng quy**

5.10. Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $O$  và  $K$  lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác  $ABH$  và tam giác  $ACH$ . Vẽ  $AD \perp OK$ .

Chứng minh rằng các đường thẳng  $AD$ ,  $BO$ ,  $CK$  đồng quy.

5.11. Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AD$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  không chứa  $C$  vẽ đoạn thẳng  $BF \perp BA$  và  $BF = BA$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  không chứa  $B$  vẽ đoạn thẳng  $CE$  sao cho  $CE \perp CA$  và  $CE = CA$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  đồng quy.

5.12. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $AD$ . Từ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vẽ các đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  vuông góc với  $AD$ . Các đường thẳng  $d_2$  và  $d_3$  lần lượt cắt  $AD$  tại  $E$  và  $F$ .

Chứng minh rằng các đường thẳng  $d_1$ ,  $BF$ ,  $CE$  đồng quy.

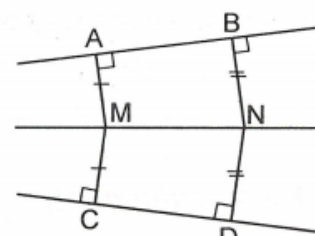
• **(Ba đường trung trực đồng quy, ba đường trung tuyến đồng quy)**

5.13. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Vẽ các đường phân giác của góc  $BAH$  và góc  $CAH$  cắt  $BC$  tại  $E$  và  $F$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $EF$ . Qua  $M$  vẽ đường thẳng  $d \parallel AH$ . Chứng minh rằng các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  và đường thẳng  $d$  đồng quy.

5.14. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 4\text{cm}$ ;  $AC = 6\text{cm}$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CAD = ACD$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$ , trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $F$  sao cho  $BE = 5\text{cm}$  và  $CF = \sqrt{40}\text{cm}$ .

Chứng minh rằng ba đường thẳng  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  đồng quy.

5.15. Cho tam giác nhọn  $ABC$ , đường cao  $AH$ , đường phân giác  $BD$  và đường trung tuyến  $CM$ . Cho biết tam giác  $HDM$  là tam giác đều, chứng minh rằng ba đường thẳng  $AH$ ,  $BD$ ,  $CM$  đồng quy.



Hình 21.7

**Hướng dẫn giải****5.1. (h.21.8)**

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ , ta phải chứng minh  $MN$  đi qua  $O$ , tức là phải chứng minh ba điểm  $M, O, N$  thẳng hàng.

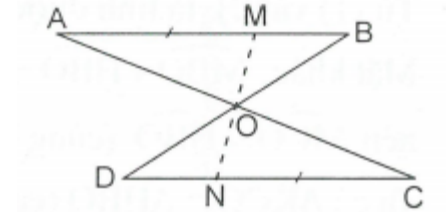
Ta có  $\triangle AOB = \triangle COD$  (g.c.g)  $\Rightarrow OA = OC$  và  $\angle A = \angle C$ .

$\triangle MOA = \triangle NOC$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle MOA = \angle NOC$ .

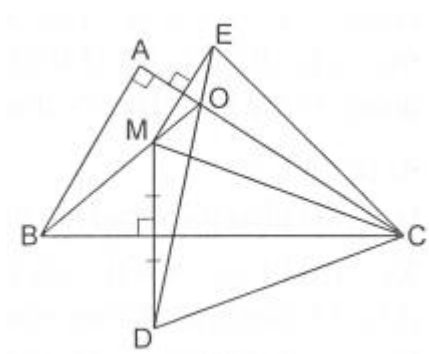
Ta có  $\angle MOA + \angle MOC = 180^\circ$  (kề bù)

$\Rightarrow \angle NOC + \angle MOC = 180^\circ \Rightarrow \angle MON$  là góc bẹt.

Do đó ba điểm  $M, O, N$  thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng  $AC, BD$  và  $MN$  đồng quy.



Hình 21.8

**5.2. (h.21.9)**

Hình 21.9

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường thẳng  $BM$  và  $AC$ .

Ta phải chứng minh  $DE$  đi qua  $O$ .

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $B = 60^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$

Ta có  $\angle BOC = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$ .

Do đó  $\angle CMO = 180^\circ - (110^\circ + 10^\circ) = 60^\circ$ .

Điểm  $C$  nằm trên đường trung trực của  $MD$  và  $ME$  nên  $CD = CM = CE$ .

Ta có  $\triangle CEO = \triangle CMO$  (c.c.c)  $\Rightarrow \angle CEO = \angle CMO = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $CDE$  cân tại  $C$  có

$$\angle DCE = \angle DCM + \angle ECM = 2(\angle BCM + \angle ACM) = 2\angle ACB = 60^\circ.$$

Vậy  $\triangle CDE$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle CED = 60^\circ$ .

Vậy  $\angle CED = \angle CEO (= 60^\circ)$ , hai tia  $ED$  và  $EO$  trùng nhau dẫn tới ba điểm  $D, O, E$  thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng  $BM, AC$  và  $DE$  đồng quy.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

### 5.3. (h.21.10)

Gọi  $O$  là giao điểm của các tia  $Bx$  và  $Cy$ .

Ta phải chứng minh đường thẳng  $AM$  đi qua  $O$ . Vẽ  
 $OH \perp MB$ ;  $OK \perp MC$ .

Tam giác  $BOC$  là tam giác đều nên  $\angle BOC = 60^\circ$ . (1)

Ta có tổng  $\angle AMB + \angle AMC + \angle BMC = 360^\circ$

$$\Rightarrow \angle BMC = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tính được  $\angle MBO + \angle MCO = 180^\circ$ .

Mặt khác,  $\angle MBO + \angle HBO = 180^\circ$  nên  $\angle MCO = \angle HBO$  (cùng bù với  $\angle MBO$ ).

Ta có  $\triangle KCO = \triangle HBO$  (cạnh huyền, góc nhọn)

$$\Rightarrow OK = OH.$$

$$\triangle MOK = \triangle MOH \quad (\text{cạnh huyền, cạnh góc vuông})$$

$$\Rightarrow \angle KMO = \angle HMO = 120^\circ : 2 = 60^\circ.$$

$$\text{Do đó } \angle AMC + \angle KMO = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra ba điểm  $A, M, O$  thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng  $AM, Bx, Cy$  đồng quy.

### 5.4. (h.21.11)

Gọi  $O$  là giao điểm của hai tia  $Ax$  và  $By$ .

Xét  $\triangle AOB$  có  $\angle A = \angle B$  nên  $OA = OB$ , suy ra điểm  $O$  nằm trên đường trung trực  $d$  của  $AB$ . Vậy các đường thẳng  $Ax, By$  và  $d$  đồng quy.

### 5.5. (h.21.12)

Gọi  $M$  là trung điểm của  $OA$ .

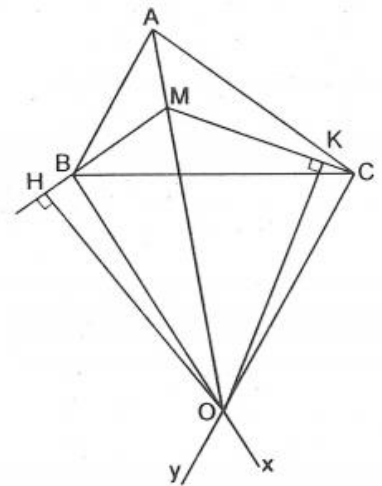
Xét  $\triangle AOB$  có  $F$  là trọng tâm nên đường thẳng  $BF$  đi qua trung điểm  $M$  của  $AO$ .

Xét  $\triangle AOC$  có  $G$  là trọng tâm nên đường thẳng  $CG$  đi qua trung điểm  $M$  của  $AO$ .

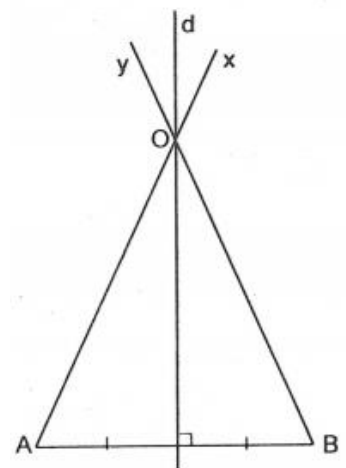
Do đó ba đường thẳng  $AO, BF, CG$  đồng quy tại trung điểm  $M$  của  $AO$ .

### 5.6. (h.21.7)

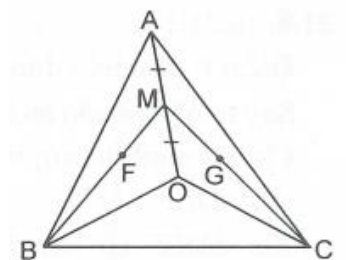
Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  không song song nên chúng cắt nhau tạo thành một góc. Hai điểm  $M$  và  $N$  nằm trong góc đó, cùng cách đều hai đường thẳng này nên chúng nằm trên tia phân giác của góc này. Suy ra ba đường thẳng  $AB, CD$  và  $MN$  đồng quy tại đỉnh của góc.



Hình 21.10



Hình 21.11



Hình 21.12

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

### 5.7. (h.21.13)

Xét tam giác  $ABC$  có hai đường phân giác  $AD$ ,  $CE$  cắt nhau tại  $O$  nên  $BO$  là đường phân giác của góc  $ABC$ .

Đường thẳng  $xy$  đi qua  $B$  và vuông góc với  $BO$  nên  $xy$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $B$  của góc  $ABD$ . Gọi  $Ax$  là tia đối của tia  $AD$ .

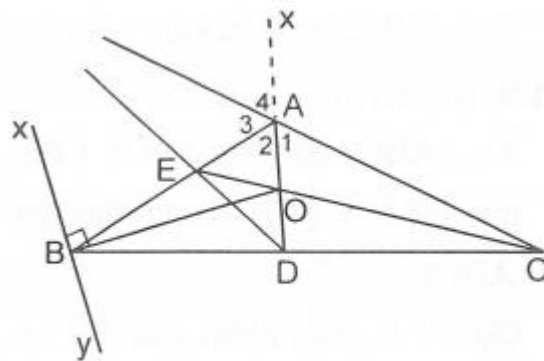
Vì  $BAC = 120^\circ$  nên dễ thấy

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 60^\circ.$$

Xét  $\triangle ADC$  có  $AE$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh

$A$ ,  $CE$  là đường phân giác trong tại đỉnh  $C$  nên  $DE$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $D$ .

Xét  $\triangle ABD$  có đường thẳng  $AC$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $A$ , đường thẳng  $xy$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $B$ , đường thẳng  $DE$  là đường phân giác trong tại đỉnh  $D$ . Do đó ba đường thẳng  $xy$ ,  $DE$  và  $AC$  đồng quy.



Hình 21.13

### 5.8. (h.21.14)

Điểm  $F$  nằm trên đường trung trực của  $DM$  nên  $FD = FM$ .

Suy ra  $\triangle FDM$  cân tại  $F$  do đó  $FB$  là đường phân giác tại đỉnh  $F$  của  $\triangle DEF$ . Chứng minh tương tự ta được  $EC$  là đường phân giác ngoài tại đỉnh  $E$  của  $\triangle DEF$ .

Xét  $\triangle DEF$  có hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại  $A$  nên  $DA$  là đường phân giác của góc  $EDF$ . (1)

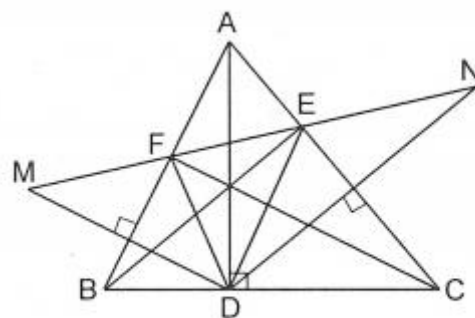
Mặt khác,  $DB \perp DA$  nên  $DB$  là đường phân giác ngoài tại  $D$ .

Điểm  $B$  là giao điểm của hai đường phân giác ngoài tại đỉnh  $F$  và  $D$  của  $\triangle DEF$  nên  $EB$  là đường phân giác của góc  $DEF$ . (2)

Chứng minh tương tự ta được  $FC$  là đường phân giác của góc  $DFE$ . (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  đồng quy.

\* Lưu ý: Nếu bỏ điều kiện nhọn của tam giác  $ABC$  thì bài toán vẫn đúng.



Hình 21.14

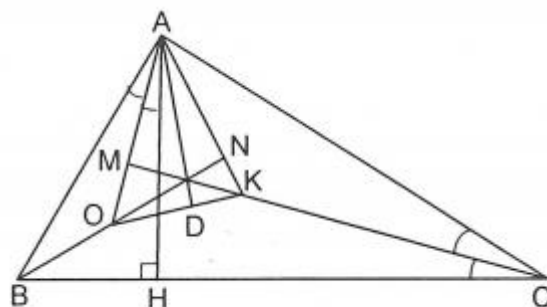
### 5.9. (h.21.15)

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH \perp BC$  nên  $BAH = ACB$

(cùng phụ với  $ABC$ ).

Gọi  $M$  là giao điểm của  $AO$  và  $CK$ , gọi  $N$  là giao điểm của  $AK$  và  $BO$ .

Vì  $O$  là giao điểm của các đường phân giác của  $\triangle ABH$



Hình 21.15

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

nên  $BAO = HAO$ .

Vì  $K$  là giao điểm của các đường phân giác của  $\triangle ACH$  nên  $ACK = BCK$

Xét  $\triangle AMC$  có  $MAC + MCA = MAC + \frac{ACB}{2} = MAC + \frac{BAH}{2} = MAC + MAB = BAC = 90^\circ$ .

Suy ra  $AMC = 90^\circ \Rightarrow CM \perp AO$ .

Chứng minh tương tự ta được  $BN \perp AK$ .

Xét  $\triangle AOK$  có  $AD$ ,  $BO$  và  $CK$  là ba đường cao nên đồng quy.

### 5.10. (h.21.16)

Trên tia đối của tia  $AD$  lấy điểm  $K$  sao cho  $AK = BC$ .

Xét  $\triangle ADC$  có góc  $KAC$  là góc ngoài nên  $KAC = D + ACB = 90^\circ + ACB$ .

Mặt khác,  $BCE = 90^\circ + ACB$  nên  $KAC = BCE$ .

Ta có  $\triangle KAC = \triangle BCE$  (c.g.c)  $\Rightarrow C_1 = E$ .

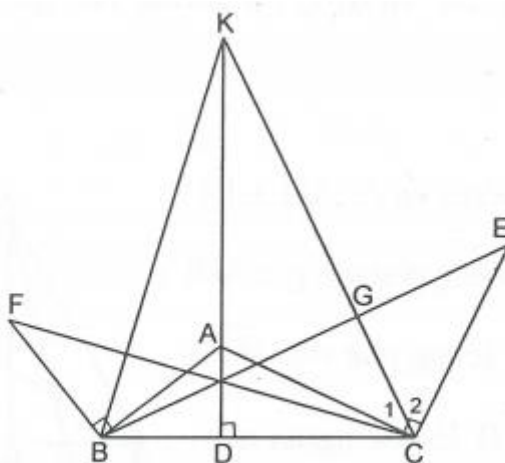
Vì  $C_1 + C_2 = 90^\circ$  nên  $E + C_2 = 90^\circ$ .

Gọi  $G$  là giao điểm của  $BE$  với  $KC$ .

Xét  $\triangle GCE$  có  $E + C_2 = 90^\circ$  nên  $G = 90^\circ \Rightarrow BE \perp KC$ .

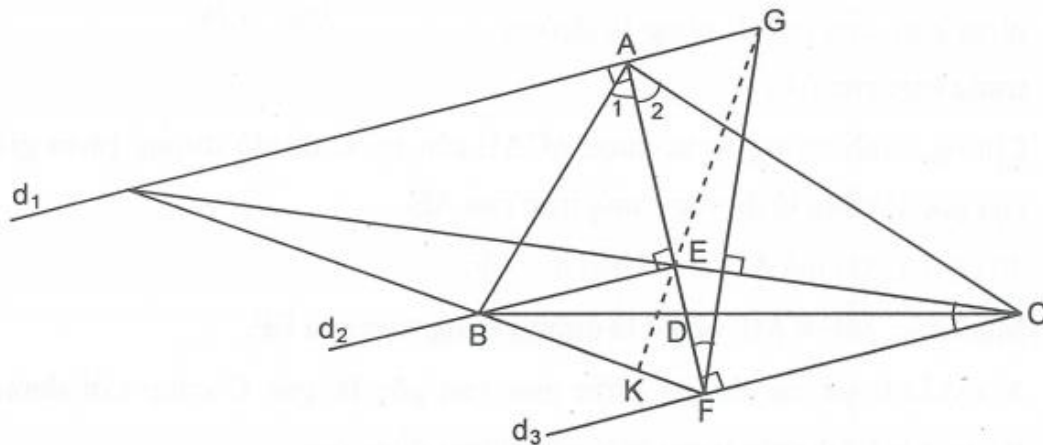
Chứng minh tương tự, ta có  $CF \perp AB$ .

Xét  $\triangle KBC$  có  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 21.16

### 5.11. (h.21.17)



Hình 21.17

Tam giác  $EAB$  vuông tại  $E$ ,  $A_1 = 45^\circ$  nên là tam giác vuông cân.

Suy ra  $EA = EB$ . Tương tự, ta có:  $FA = FC$ .

Từ  $F$  vẽ một đường thẳng vuông góc với  $CE$  cắt  $d_1$  tại  $G$ .

Gọi  $K$  là giao điểm của đường thẳng  $EG$  với  $BF$ .

Ta có  $\angle AFG = \angle FCE$  (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\triangle AFG = \triangle FCE$  (g.c.g)  $\Rightarrow AG = FE$ .

$\triangle AGE = \triangle EFB$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle AGE = \angle EFB$ .

Ta có  $\angle AGE + \angle AEG = 90^\circ \Rightarrow \angle EFB + \angle KEF = 90^\circ \Rightarrow EK \perp BF$ .

Xét  $\triangle EFG$  có  $CE$ ,  $BF$  và  $d_1$  là ba đường cao do đó ba đường thẳng này đồng quy.

### 5.12. (h.21.18)

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH \perp BC$  nên  $\angle BAH = \angle ACB$  (cùng phụ với góc  $\angle ABC$ )

Ta có  $\angle CAH = \angle ABC$  (cùng phụ với  $\angle ACB$ ).

Xét  $\triangle AFC$  có  $\angle AFB$  là góc ngoài nên

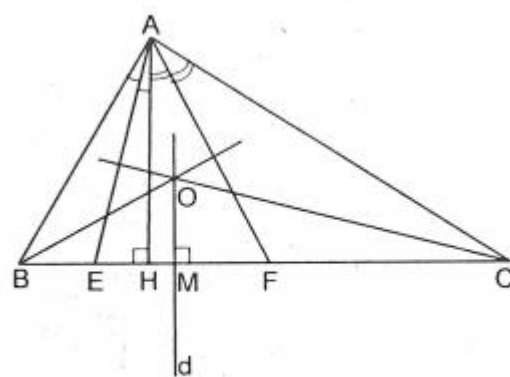
$\angle AFB = \angle FAC + \angle FCA = \angle FAH + \angle BAH = \angle FAB$ .

Suy ra  $\triangle BAF$  cân tại  $B$  do đó đường phân giác của góc  $B$  cũng là đường trung trực của  $AF$ .

Chứng minh tương tự ta được  $\triangle CAE$  cân tại  $C$  do đó đường phân giác của góc  $C$  cũng là đường trung trực của  $AE$ .

Ta có  $d \parallel AH$  mà  $AH \perp EF$  nên  $d \perp EF$ .

Mặt khác,  $ME = MF$  nên  $d$  là đường trung trực của  $EF$ .

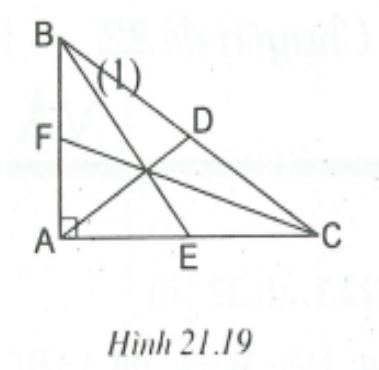


Hình 21.18

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Xét  $\triangle AEF$  có các đường phân giác của góc  $B$ , góc  $C$  cùng với đường thẳng  $d$  là ba đường trung trực nên chúng đồng quy.

**5.13. (h.21.19)**



Hình 21.19

Ta có  $\angle CAD = \angle ACD \Rightarrow \triangle DAC$  cân  $\Rightarrow DC = DA$ . (1)

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ .

Mặt khác,  $\angle BAD + \angle CAD = 90^\circ$  mà  $\angle ACB = \angle CAD$  nên  $\angle ABC = \angle BAD$ .

Do đó  $\triangle DAB$  cân  $\Rightarrow DB = DA$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $DC = DB$ . Vậy  $D$  là trung điểm của  $BC$ .

Xét  $\triangle ABE$  vuông tại  $A$  có  $AE^2 = BE^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AE = 3(cm) \Rightarrow E$  là trung điểm của  $AC$ .

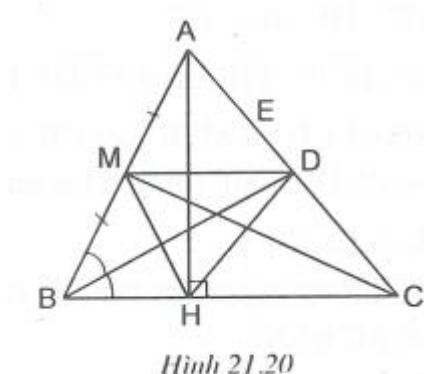
Xét  $\triangle AFC$  vuông tại  $A$  có  $AF^2 = CF^2 - AC^2 = (\sqrt{40})^2 - 6^2 = 4$

$\Rightarrow AF = 2(cm)$

$\Rightarrow F$  là trung điểm của  $AB$ .

Xét  $\triangle ABC$  có  $AD, BE, CF$  là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy.

**5.14. (h.21.20)**



Hình 21.20

Tam giác  $ABH$  vuông tại  $H$ , có  $HM$  là đường trung tuyến nên  $HM = \frac{1}{2} AB$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Suy ra  $DM = \frac{1}{2}AB$  (vì  $HM = DM$ ).

Do đó  $\triangle DAB$  vuông tại  $D$ .

Tam giác  $ABC$  có  $BD$  vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại  $B$

$\Rightarrow BA = BC$  (1) dẫn tới  $DA = DC$ .

Xét  $\triangle HAC$  và  $\triangle HAB$  vuông tại  $H$  có  $HD = \frac{1}{2}AC$ ;  $HM = \frac{1}{2}AB$  mà  $HD = HM$  nên  $AC = AB$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AB = BC = CA$  do đó  $\triangle ABC$  đều.

Trong tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $CM$  cũng là đường phân giác. Suy ra  $AH, BD, CM$  đồng quy.

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

## PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI HSG

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB > AC$ ). Tia phân giác góc  $B$  cắt  $AC$  ở  $D$ . Kẻ  $DH$  vuông góc với  $BC$ . Trên tia  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Đường thẳng vuông góc với  $AE$  tại  $E$  cắt tia  $DH$  ở  $K$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BA = BH$
- b)  $\angle DBK = 45^\circ$
- c) Cho  $AB = 4\text{cm}$ , tính chu vi tam giác  $DEK$

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC$  có đường phân giác  $AD$ . Trên đoạn thẳng  $AD$  lấy các điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = CF$ . Vẽ các điểm  $H, K, I$  sao cho  $AC, BC, AB$  theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng  $EH, FK, EI$

- a) Chứng minh rằng:  $AD$  là đường trung trực của  $IH$ .
- b) Chứng minh rằng:  $\triangle FBI = \triangle KBE$
- c) Chứng minh rằng:  $ACE = BCF$

**Bài 3:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Về phía ngoài của tam giác vẽ các tam giác vuông cân  $ABE, ACF$  vuông ở  $B$  và  $C$ . Có  $AH$  vuông góc với  $BC$ , trên tia đối của tia  $AH$  lấy điểm  $I$  sao cho  $AI = BC$ . Chứng minh:

- a)  $\triangle ABI = \triangle BEC$
- b)  $BI = CE$  và  $BI$  vuông góc với  $CE$
- c) Ba đường thẳng  $AH, CE, BF$  cắt nhau tại một điểm

**Bài 4:** Cho  $\angle xAy = 60^\circ$  có tia phân giác  $Az$ . Từ điểm  $B$  trên  $Ax$  kẻ  $BH$  vuông góc với  $Ay$  tại  $H$ , kẻ  $BK$  vuông góc với  $Az$  và  $Bt$  song song với  $Ay$ ,  $Bt$  cắt  $Az$  tại  $C$ . Từ  $C$  kẻ  $CM$  vuông góc với  $Ay$  tại  $M$ . Chứng minh:

- a)  $K$  là trung điểm của  $AC$
- b)  $\triangle KMC$  là tam giác đều
- c) Cho  $BK = 2\text{cm}$ . Tính các cạnh  $\triangle AKM$

**Bài 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle A = 120^\circ$ . Các tia phân giác  $BE, CF$  của  $\angle B$  và  $\angle C$  cắt nhau tại  $I$  ( $E, F$  lần lượt thuộc các cạnh  $AC, AB$ ). Trên cạnh  $BC$  lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$ .

- a) Tính số đo của  $\angle MIN$ .
- b) Chứng minh  $CE + BF < BC$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**Bài 6:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A = 90^\circ$ . Vẽ phân giác  $BD$  và  $CE$  ( $D \in AC, E \in AB$ ) chúng cắt nhau tại  $O$

- Tính số đo góc  $BOC$
- Trên  $BC$  lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = BA, CN = CA$ . Chứng minh  $EN$  song song với  $DM$
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $AN$ . Chứng minh tam giác  $AIM$  vuông cân.

**Bài 7:** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC < BC$ . Các tia phân giác của góc  $A$  và góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $F$  là hình chiếu của  $O$  trên  $BC$ ;  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $AC$ . Lấy điểm  $I$  trên đoạn  $FC$  sao cho  $FI = AH$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $FH$  và  $AI$

- Chứng minh tam giác  $FCH$  cân và  $AK = AI$
- Chứng minh ba điểm  $B, O, K$  thẳng hàng.

**Bài 8:** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn,  $AB < AC < BC$ . Các tia phân giác của góc  $A$  và góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $F$  là hình chiếu của  $O$  trên  $BC$ ;  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $AC$ . Lấy điểm  $I$  trên đoạn  $FC$  sao cho  $FI = AH$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $FH$  và  $AI$ .

- Chứng minh  $\triangle FCH$  cân
- Chứng minh  $AK = KI$
- Chứng minh 3 điểm  $B, O, K$  thẳng hàng.

**Bài 9:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Tia phân giác của  $BAC$  cắt đường trung trực của  $CE$  tại  $F$

- Chứng minh tam giác  $BFC$  cân
- Biết  $\angle ACB = 30^\circ$ . Chứng minh  $\triangle BFE$  đều

**Bài 10:** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AB > AC$ , ba đường cao  $BD, CE$  và  $AF$  cắt nhau tại  $H$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AB$  sao cho  $AM = AC$ . Gọi  $N$  là hình chiếu của  $M$  trên  $AC$ ;  $K$  là giao điểm của  $MN$  và  $CE$

- Chứng minh hai góc  $KAH$  và  $MCB$  bằng nhau
- Chứng minh  $AB + CE > AC + BD$

**Bài 11:** Cho tam giác vuông  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ), đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AM$ . Trên tia đối tia  $MA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $DM = MA$ . Trên tia đối tia  $CD$  lấy điểm  $I$  sao cho  $CI = CA$ , qua  $I$  vẽ đường thẳng song song với  $AC$  cắt đường thẳng  $AH$  tại  $E$ . Chứng minh  $AE = BC$ .

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**Bài 12:** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC, B = 60^\circ$ ). Hai phân giác  $AD$  và  $CE$  của  $\triangle ABC$  cắt nhau ở  $I$ , từ trung điểm  $M$  của  $BC$  kẻ đường vuông góc với đường phân giác  $AI$  tại  $H$ , cắt  $AB$  ở  $P$ , cắt  $AC$  ở  $K$ .

- Tính  $\angle AIC$
- Tính độ dài cạnh  $AK$  biết  $PK = 6\text{cm}, AH = 4\text{cm}$ .
- Chứng minh  $\triangle IDE$  cân

**Bài 13:** Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $AD$  vuông góc với  $BC$  tại  $D$ . Xác định  $I, J$  sao cho  $AB$  là trung trực của  $DI, AC$  là trung trực của  $DJ; IJ$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $L$  và  $K$ . Chứng minh rằng

- $\triangle AIJ$  cân
- $DA$  là tia phân giác của  $\angle LDK$
- $BK \perp AC; CL \perp AB$
- Trục tâm của  $\triangle ABC$  chính là giao của 3 đường phân giác  $\triangle DLK$
- Nếu  $D$  là một điểm tùy ý trên cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $IAJ$  có số đo không đổi và tìm vị trí điểm  $D$  trên cạnh  $BC$  để  $IJ$  có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 14.** Cho tam giác cân  $ABC, AB = AC$ . Trên tia đối của các tia  $BC, CB$  lấy theo thứ tự hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD = CE$ .

- Chứng minh tam giác  $ADE$  là tam giác cân
- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $AM$  là tia phân giác của  $\angle DAE$
- Từ  $B$  và  $C$  vẽ  $BH, CK$  theo thứ tự vuông góc với  $AD, AE$ . Chứng minh  $BH = CK$
- Chứng minh 3 đường thẳng  $AM, BH, CK$  gặp nhau tại 1 điểm.

**Bài 15:** Cho tam giác  $ABC$  vuông góc tại  $A$ . Phân giác trong của  $B$  cắt cạnh  $AC$  tại điểm  $D$ . Từ  $D$  kẻ  $DE$  vuông góc với  $BC$  ( $E \in BC$ ). Tia  $ED$  và tia  $BA$  cắt nhau tại  $F$ .

- So sánh  $DA$  và  $DC$
- Chứng minh  $BD \perp FC$
- Chứng minh  $AE \parallel FC$

**Bài 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Về về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:

- $BE = CD$
- $\triangle BDE$  là tam giác cân

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

c)  $\angle EIC = 60^\circ$  và  $IA$  là tia phân giác của  $\angle DIE$

**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ). Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $I$  là giao của  $CD$  và  $BE$ ,  $K$  là giao của  $AB$  và  $DC$ .

- Chứng minh rằng  $\triangle ADC = \triangle ABE$ .
- Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $CD$  và  $BE$ . Chứng minh rằng  $\triangle AMN$  đều
- Chứng minh rằng  $IA$  là phân giác của  $\angle DIE$

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = AB$ . Gọi  $I$  là giao điểm các đường trung trực của  $BC$  và  $AD$

- Chứng minh  $\triangle AIB = \triangle DIC$
- Chứng minh  $AI$  là tia phân giác của  $\angle BAC$
- Kẻ  $IE$  vuông góc với  $AB$ , chứng minh  $AE = \frac{1}{2}AD$

**Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$ , tia phân giác của  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Biết  $\angle ADB = 85^\circ$

- Tính  $B - C$
- Tính các góc của  $\triangle ABC$  nếu  $4B = 5C$

**Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn, trung tuyến  $AM$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa điểm  $C$ , vẽ đoạn thẳng  $AE$  vuông góc và bằng  $AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  chứa điểm  $B$ , vẽ đoạn thẳng  $AD$  vuông góc và bằng  $AC$ .

- Chứng minh  $BD = CE$
- Trên tia đối của tia  $MA$  lấy  $N$  sao cho  $MN = MA$ . Chứng minh  $\triangle ADE = \triangle CAN$
- Gọi  $I$  là giao điểm của  $DE$  và  $AM$ . Chứng minh  $\frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$

**Bài 21.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AM$ . Qua  $M$  kẻ các đường vuông góc với  $AB, AC$ , chúng cắt  $d$  theo thứ tự ở  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng :

- $BD \parallel CE$
- $DE = BD + CE$

### HƯỚNG DẪN

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB > AC$ ). Tia phân giác góc  $B$  cắt  $AC$  ở  $D$ . Kẻ  $DH$  vuông góc với  $BC$ . Trên tia  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Đường thẳng vuông góc với  $AE$  tại  $E$  cắt tia  $DH$  ở  $K$ . Chứng minh rằng:

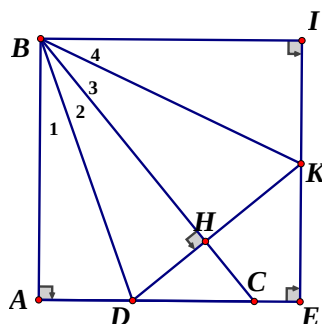
- $BA = BH$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

b)  $DBK = 45^\circ$

c) Cho  $AB = 4\text{cm}$ , tính chu vi tam giác  $DEK$

**Lời giải**



a)  $\triangle ABD = \triangle HBD$  (ch - gn)

b) Qua  $B$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $EK$ , cắt  $EK$  tại  $I$

Ta có:  $ABI = 90^\circ$

Tacó:  $ABI = 90^\circ$ ;  $AB = BH$  ( $\triangle ABD = \triangle HBD$ );  $AE = AB$  (gt);  $AE = BI$  ( $BA \parallel IE$ )  $\Rightarrow BH = BI$

$\Rightarrow \triangle HBK = \triangle IBK$  (ch - cv)  $\Rightarrow B_3 = B_4$  mà  $B_1 = B_2 \Rightarrow DBK = 45^\circ$

c)  $\triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow AD = DH$

$\triangle HBK = \triangle IBK \Rightarrow HK = KI \Rightarrow KD = DH + HK = AD + KI$

Chu vi tam giác  $DEK = DE + EK + KD = DE + KE + AD + KI$

$AE + IE = 2AB = 2.4 = 8(\text{cm})$

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC$  có đường phân giác  $AD$ . Trên đoạn thẳng  $AD$  lấy các điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $ABE = CBF$ . Vẽ các điểm  $H, K, I$  sao cho  $AC, BC, AB$  theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng  $EH, FK, EI$

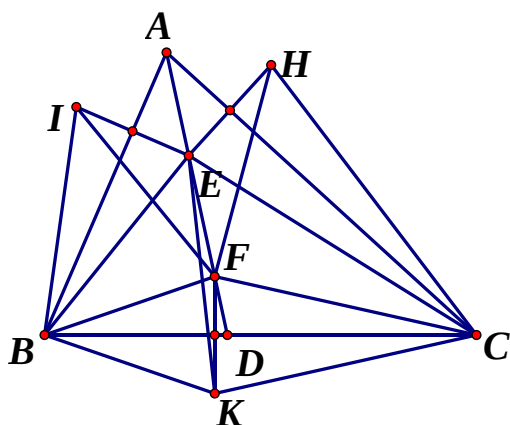
a) Chứng minh rằng:  $AD$  là đường trung trực của  $IH$ .

b) Chứng minh rằng:  $\triangle FBI = \triangle KBE$

c) Chứng minh rằng:  $ACE = BCF$

**Lời giải**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ



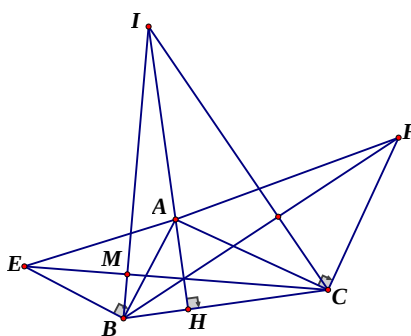
- a) Tam giác  $AIH$  cân tại  $A$  có  $AD$  là tia phân giác của  $IAH \Rightarrow AD$  là đường trung trực của  $IH$
- b) Ta có:  $BI = BE, IBF = EBK, BF = BK \Rightarrow \triangle FBI = \triangle KBE (c.g.c)$
- c) Ta có:  $CH = CE, CF = CK, EH = EK = EI \Rightarrow \triangle FHC = \triangle KEC (c.c.c)$

$$\Rightarrow HCF = ECK \Rightarrow ACE = BCF$$

**Bài 3:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Về phía ngoài của tam giác vẽ các tam giác vuông cân  $ABE, ACF$  vuông ở  $B$  và  $C$ . Có  $AH$  vuông góc với  $BC$ , trên tia đối của tia  $AH$  lấy điểm  $I$  sao cho  $AI = BC$ . Chứng minh:

- a)  $\triangle ABI = \triangle BEC$
- b)  $BI = CE$  và  $BI$  vuông góc với  $CE$
- c) Ba đường thẳng  $AH, CE, BF$  cắt nhau tại một điểm

**Lời giải:**



- a) Ta có:  $IAB = 180^\circ - BAH = 180^\circ - (90^\circ - ABC) = 90^\circ + ABC = EBC$

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle BEC (c.g.c)$$

- b)  $\triangle ABI = \triangle BEC$  (câu a) nên  $BI = EC$  (hai cạnh tương ứng)

$$ECB = BIA \text{ hay } ECB = BIH$$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Gọi giao điểm của  $CE$  với  $AB$  là  $M$ , ta có:

$$MCB + MBC = BIH + IBH = 90^\circ \Rightarrow BMC = 90^\circ$$

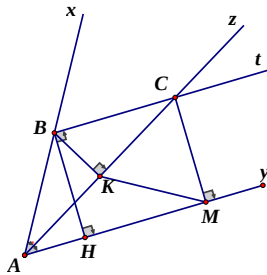
Do đó  $CE \perp BI$ . Chứng minh tương tự  $BF \perp CI$

c) Trong tam giác  $BIC$ :  $AH, CE, BF$  là ba đường cao. Vậy  $AH, CE, BF$  đồng quy tại một điểm.

**Bài 4:** Cho  $\angle xAy = 60^\circ$  có tia phân giác  $Az$ . Từ điểm  $B$  trên  $Ax$  kẻ  $BH$  vuông góc với  $Ay$  tại  $H$ , kẻ  $BK$  vuông góc với  $Az$  và  $Bt$  song song với  $Ay$ ,  $Bt$  cắt  $Az$  tại  $C$ . Từ  $C$  kẻ  $CM$  vuông góc với  $Ay$  tại  $M$ . Chứng minh:

- $K$  là trung điểm của  $AC$
- $\triangle KMC$  là tam giác đều
- Cho  $BK = 2 \text{ cm}$ . Tính các cạnh  $\triangle AKM$

**Lời giải:**



a)  $\triangle ABC$  cân tại B do  $\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$  và  $BK$  là đường cao

$\Rightarrow BK$  là đường trung tuyến  $\Rightarrow K$  là trung điểm của  $AC$

b)  $\triangle ABH = \triangle BAK$  (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AK$  (hai cạnh tương ứng) mà  $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$

Ta có:  $BH = CM$  (tính chất cặp đoạn chắn) mà  $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$  là tam giác cân (1)

Mặt khác  $MCB = 90^\circ$  và  $ACB = 30^\circ \Rightarrow MCK = 60^\circ$  (2)

$\Rightarrow \triangle MKC$  là tam giác đều

c) Vì  $\triangle ABK$  vuông tại K mà  $\angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4 \text{ cm}$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Vì  $\triangle ABK$  vuông tại K nên theo Pytago ta có:

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

Mà  $KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

$\triangle KCM$  đều  $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$

Theo phần b)  $AB = BC = 4$ ;  $AH = BK = 2$

$HM = BC$  (HBCM là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

**Bài 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 120^\circ$ . Các tia phân giác BE, CF của  $\angle ABC$  và  $\angle ACB$  cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho  $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$ .

a) Tính số đo của  $\angle MIN$ .

b) Chứng minh  $CE + BF < BC$

**Lời giải**

**a) Tính số đo của  $\angle MIN$ .**

Ta có  $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - A = 60^\circ$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 150^\circ$$

Mà  $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$

$$\Rightarrow \angle MIN = 90^\circ$$

**b) Chứng minh  $CE + BF < BC$**

-  $\angle BIC = 150^\circ \Rightarrow \angle FIB = \angle EIC = 30^\circ$

Suy ra  $\triangle BFI = \triangle BMI$  (g-c-g)  $\Rightarrow BF = BM$

-  $\triangle CNI = \triangle CEI$  (g-c-g)  $\Rightarrow CN = CE$

Do đó  $CE + BF = BM + CN < BM + MN + NC = BC$

**Vậy  $CE + BF < BC$**

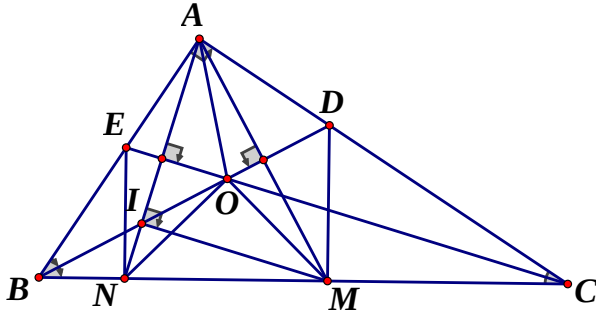
**Bài 6:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A = 90^\circ$ . Vẽ phân giác  $BD$  và  $CE$  ( $D \in AC, E \in AB$ ) chúng cắt nhau tại O

a) Tính số đo góc  $\angle BOC$

b) Trên  $BC$  lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = BA, CN = CA$ . Chứng minh  $EN$  song song với  $DM$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

c) Gọi  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $AN$ . Chứng minh tam giác  $AIM$  vuông cân.



$$a) \quad \angle BOC = \angle BAC + \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

b)  $\triangle ABM$  cân, nên phân giác  $BD$  đồng thời là đường trung trực  
 $\triangle ACN$  cân, nên phân giác  $CE$  đồng thời là đường trung trực.

Suy ra  $DA = DM, EA = EN$

Dẫn tới  $\triangle ABD = \triangle MBD, \triangle ACE = \triangle NCE$  (c.c.c)

Suy ra  $\angle DMB = \angle DAB = 90^\circ; \angle ENC = \angle EAC = 90^\circ$

Hay  $EN \perp BC, DM \perp BC$ . Do vậy  $EN \parallel DM$

c) Phân giác  $BD$  và phân giác  $CE$  cắt nhau tại  $O$  cho ta  $AO$  là phân giác của  $\angle BAC \Rightarrow \angle OAE = 45^\circ$  (1)

$$\triangle OAE = \triangle ONE \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle OAE = \angle ONM = 45^\circ$$

Theo chứng minh câu b, ta thấy,  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN \Rightarrow OM = ON$  hay  $\triangle OMN$  cân tại  $O$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle OMN$  vuông cân tại  $O$

$$\text{Để chứng minh } \angle MON = 2\angle MAI \Rightarrow 2\angle MAI = 90^\circ \Rightarrow \angle MAI = 45^\circ$$

$\triangle AIM$  có  $IA = IM$  (do  $I$  thuộc trung trực  $BD$  của  $AM$ ) nên cân tại  $I$ .

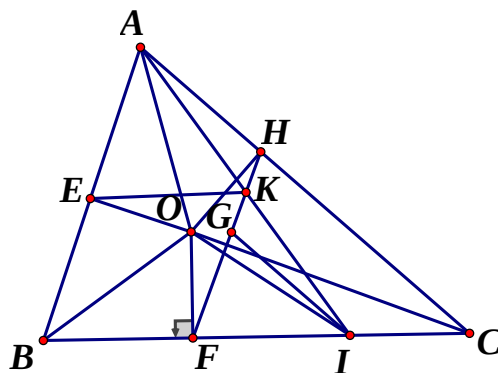
Lại có  $\angle MAI = 45^\circ$ . Vậy  $\triangle AIM$  vuông cân tại  $I$ .

**Bài 7:** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC < BC$ . Các tia phân giác của góc  $A$  và góc  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $F$  là hình chiếu của  $O$  trên  $BC$ ;  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $AC$ . Lấy điểm  $I$  trên đoạn  $FC$  sao cho  $FI = AH$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $FH$  và  $AI$

a, Chứng minh tam giác  $FCH$  cân và  $AK = AI$

b, Chứng minh ba điểm  $B, O, K$  thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Chứng minh  $\triangle CHO = \triangle CFO$  (ch – gn)

Suy ra  $CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$  cân tại C

- Vẽ  $IG \parallel AC$  ( $G \in FH$ ), chứng minh  $\triangle FIG$  cân tại I

- Suy ra  $AH = IG$  và  $IGK = AHK$

- Chứng minh  $\triangle AHK = \triangle IGK$  (g.c.g)

- Suy ra  $AK = KI$

b) Vẽ  $OE \perp AB$  tại E. tương tự câu a ta có  $\triangle AEH, \triangle BEF$  thứ tự cân tại A, B

Suy ra :  $BE = BF$  và  $AE = AH$

$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI \Rightarrow \triangle ABI$  cân tại B

Mà BO là phân giác B, và BK là đường trung tuyến của  $\triangle ABI$  nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng

**Bài 8:** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn,  $AB < AC < BC$ . Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O. Gọi F là hình chiếu của O trên BC; H là hình chiếu của O trên AC. Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho  $FI = AH$ . Gọi K là giao điểm của FH và AI.

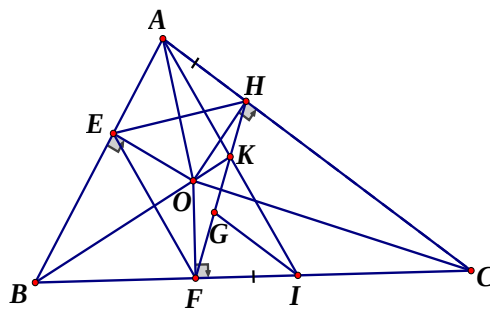
a) Chứng minh  $\triangle FCH$  cân

b) Chứng minh  $AK = KI$

c) Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

**Lời giải**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ



a) Chứng minh

Ta có  $\angle CHO = \angle CFO = 90^\circ$  (vì  $OH \perp AC, OF \perp BC$ )

Xét  $\triangle CHO$  vuông và  $\triangle CFO$  vuông có:  $OC$  chung;  $\angle HCO = \angle FCO$  ( $OC$  là phân giác  $\angle C$ )

Vậy  $\triangle CHO = \triangle CFO$  (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$  (hai cạnh tương ứng). Vậy  $\triangle FCH$  cân tại  $C$

b) Qua  $I$  vẽ  $IG \parallel AC$  ( $G \in FH$ )

Ta có  $\triangle FCH$  cân tại  $C$  (cmt)  $\Rightarrow \angle CHF = \angle CFH$  (1)

Mà  $\angle CHF = \angle FGI$  (đồng vị,  $IG \parallel AC$ ) (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \angle CFH = \angle FGI$  hay  $\angle IFG = \angle IGF$ , Vậy  $\triangle IFG$  cân tại  $I$

$\Rightarrow FI = GI$ , mặt khác:  $FI = AH$  nên  $GI = AH (= FI)$

Ta lại có:  $\angle IGK = \angle AHK$ ;  $\angle HAK = \angle GIK$  (so le trong,  $IG \parallel AC$ )

Xét  $\triangle AHK$  và  $\triangle IGK$  có:  $\angle IGK = \angle AHK$  (cmt);  $GI = AH$  (cmt);  $\angle HAK = \angle GIK$  (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$  (g.c.g)  $\Rightarrow AK = KI$  (đpcm)

c) Vẽ  $OE \perp AB$  tại  $E$ , Chứng minh được  $BO$  là tia phân giác của  $\angle ABC$  (\*)

Chứng minh được  $AB = BI$

Chứng minh được:  $\triangle ABK = \triangle IBC$  (c.c.c)  $\Rightarrow \angle ABK = \angle IBK$

Từ đó suy ra  $BK$  là tia phân giác của  $\angle ABC$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra tia  $BK, BO$  trùng nhau

Hay  $B, O, K$  là ba điểm thẳng hàng.

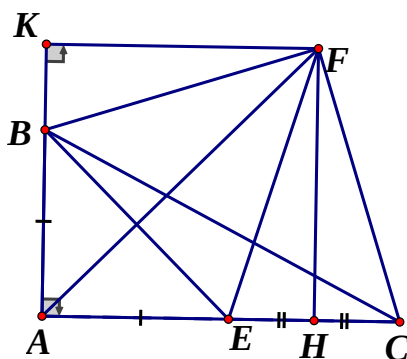
**Bài 9:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = AB$ . Tia phân giác của  $\angle BAC$  cắt đường trung trực của  $CE$  tại  $F$

a) Chứng minh tam giác  $BFC$  cân

b) Biết  $\angle ACB = 30^\circ$ . Chứng minh  $\triangle BFE$  đều

**Lời giải**

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ



a) Chỉ ra được F là giao điểm 2 trung trực của  $\triangle BEC \Rightarrow F$  thuộc trung trực BC  $\Rightarrow \triangle BFC$  cân

b) +Tính được  $\angle EBC = 15^\circ$

+Hạ  $FK \perp AB \Rightarrow \triangle FKB = \triangle FHC$  (ch - cv)  $\Rightarrow \triangle BFC$  vuông cân

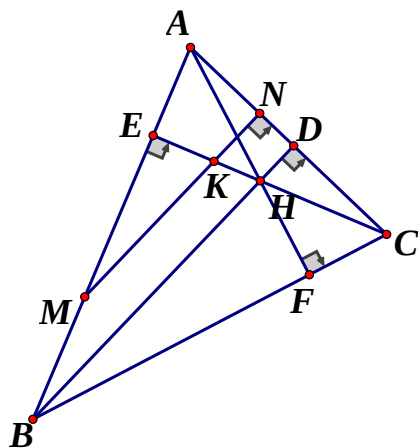
$\Rightarrow \angle FBC = 45^\circ \Rightarrow \triangle BFE$  đều

**Bài 10:** Cho tam giác nhọn ABC có  $AB > AC$ , ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho  $AM = AC$ . Gọi N là hình chiếu của M trên AC; K là giao điểm của MN và CE

a) Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau

b) Chứng minh  $AB + CE > AC + BD$

**Lời giải**



a) Nêu được  $AK \perp MC \Rightarrow \angle KAH = \angle MCB$

b) Chứng minh  $CE = MN$

Viết được  $AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

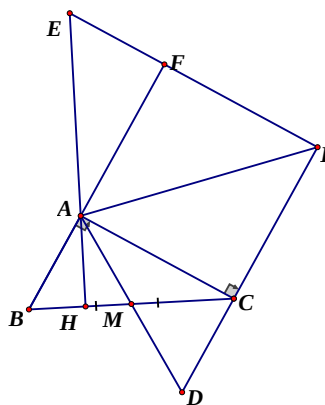
$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

Vậy  $AB + CE > AC + BD$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

**Bài 11:** Cho tam giác vuông  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ), đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AM$ . Trên tia đối tia  $MA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $DM = MA$ . Trên tia đối tia  $CD$  lấy điểm  $I$  sao cho  $CI = CA$ , qua  $I$  vẽ đường thẳng song song với  $AC$  cắt đường thẳng  $AH$  tại  $E$ . Chứng minh  $AE = BC$ .

### Lời giải



Đường thẳng  $AB$  cắt  $EI$  tại  $F$

$\triangle ABM = \triangle DCM$  vì  $AM = DM$  (gt);  $MB = MC$  (gt),  $\angle AMB = \angle DMC$  (dd)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CDM \Rightarrow AB \parallel DI \Rightarrow DI \perp AC$  và  $\angle FAI = \angle CIA$  (so le trong) (1)

$IE \parallel AC$  (gt)  $\Rightarrow \angle FIA = \angle CIA$  (so le trong) (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \triangle CAI = \triangle FIA$  (AI chung)  $\Rightarrow IC = AC = AF$  (3)

Và  $\angle EFA = 90^\circ$  (4), mặt khác  $\angle EAF = \angle BAH$  (đối đỉnh),  $\angle BAH = \angle ACB$  (cùng phụ với

$\angle ABC$ )  $\Rightarrow \angle EAF = \angle ACB$  (5)

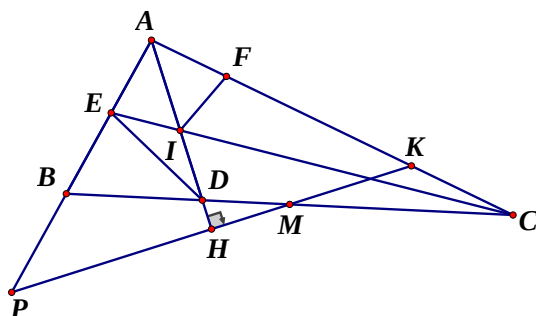
Từ (3), (4) và (5)  $\Rightarrow \triangle AFE = \triangle CAB \Rightarrow AE = BC$

**Bài 12:** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC, B = 60^\circ$ ). Hai phân giác  $AD$  và  $CE$  của  $\triangle ABC$  cắt nhau ở  $I$ , từ trung điểm  $M$  của  $BC$  kẻ đường vuông góc với đường phân giác  $AI$  tại  $H$ , cắt  $AB$  ở  $P$ , cắt  $AC$  ở  $K$ .

- Tính  $\angle AIC$
- Tính độ dài cạnh  $AK$  biết  $PK = 6\text{cm}, AH = 4\text{cm}$ .
- Chứng minh  $\triangle IDE$  cân

### Lời giải

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ



a) Ta có  $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle BCA = 120^\circ$

AD là phân giác của  $\angle BAC$  suy ra  $\angle IAC = \frac{1}{2} \angle BAC$

CE là phân giác của  $\angle ACB \Rightarrow \angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

Suy ra  $\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

Vậy  $\angle AIC = 120^\circ$

b) Xét  $\triangle AHP$  và  $\triangle AHK$  có:  $\angle PAH = \angle KAH$  (AH là phân giác của  $\angle BAC$ )

AH chung;  $\angle PHA = \angle KHA = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AHP = \triangle AHK$  (g.c.g)  $\Rightarrow PH = KH$  (hai cạnh tương ứng)

Vậy  $HK = 3\text{cm}$

Vì  $\triangle AHK$  vuông ở H, theo định lý Pytago ta có:

$AK^2 = AH^2 + HK^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ . Suy ra  $AK = 5\text{cm}$

c) Vì  $\angle AIC = 120^\circ$ , do đó:  $\angle AIE = \angle DIC = 60^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho  $AF = AE$

Xét  $\triangle EAI$  và  $\triangle FAI$  có:  $AE = AF$ ,  $\angle EAI = \angle FAI$ , AI chung

Vậy  $\triangle EAI = \triangle FAI$  (c.g.c)  $\Rightarrow IE = IF$  (hai cạnh tương ứng) (1)

$\angle AIE = \angle AIF = 60^\circ \Rightarrow \angle FIC = \angle AIC - \angle AIF = 60^\circ$

Xét  $\triangle DIC$  và  $\triangle FIC$  có:  $\angle DIC = \angle FIC = 60^\circ$ ; IC chung;  $DI = FI$

$\Rightarrow \triangle DIC = \triangle FIC$  (g.c.g)  $\Rightarrow ID = IF$  (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\triangle IDE$  cân tại I.

**Bài 13:** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, AD vuông góc với BC tại D. Xác định I, J sao cho AB là trung trực của DI, AC là trung trực của DJ; IJ cắt AB, AC lần lượt tại L và K. Chứng minh rằng

a)  $\triangle AIJ$  cân

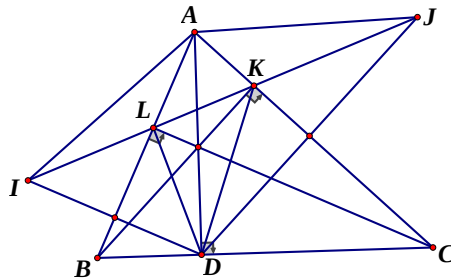
GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

b)  $DA$  là tia phân giác của  $LDK$

c)  $BK \perp AC; CL \perp AB$

d) Trục tâm của  $\triangle ABC$  chính là giao của 3 đường phân giác  $\triangle DLK$

e) Nếu  $D$  là một điểm tùy ý trên cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $IAJ$  có số đo không đổi và tìm vị trí điểm  $D$  trên cạnh  $BC$  để  $IJ$  có độ dài nhỏ nhất.



a) Do  $AB, AC$  là trung trực của  $AB \Rightarrow \left. \begin{matrix} AI = AD \\ AD = AJ \end{matrix} \right\} \Rightarrow AI = AJ \Rightarrow \triangle AIJ$  cân tại  $A$

b)  $\triangle ALI = \triangle ALD (c.c.c) \Rightarrow I_1 = D_1$

Tương tự  $\triangle AKD = \triangle AKJ (c.c.c) \Rightarrow D_2 = J_2$

Mà  $\triangle AIJ$  cân (cmt)  $\Rightarrow I_1 = J_1 \Rightarrow D_1 = D_2 \Rightarrow DA$  là tia phân giác của  $LDK$

c) CMTT câu b:  $CL, BK$  là phân giác trong của  $LKD; DLK$  của  $\triangle DLK$

$\Rightarrow BK \perp AC \Rightarrow CL \perp AB$

d) Từ câu c  $\Rightarrow$  trục tâm của  $\triangle ABC$  chính là giao của 3 đường phân giác trong  $\triangle DLK$

e) Chứng minh được  $IAJ = 2BAC$  (không đổi)

\*  $\triangle AIJ$  cân tại  $A$  có  $IAJ$  không đổi nên cạnh đáy  $IJ$  nhỏ nhất nếu cạnh bên  $AI$  nhỏ nhất

Ta có:  $AI = AD \geq AH$  ( $AH$  là đường vuông góc kẻ từ  $A$  đến  $BC$ )

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi  $D \equiv H$

Vậy khi  $D$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  xuống  $BC$  thì  $IJ$  nhỏ nhất

**Bài 14.** Cho tam giác cân  $ABC, AB = AC$ . Trên tia đối của các tia  $BC, CB$  lấy theo thứ tự hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD = CE$ .

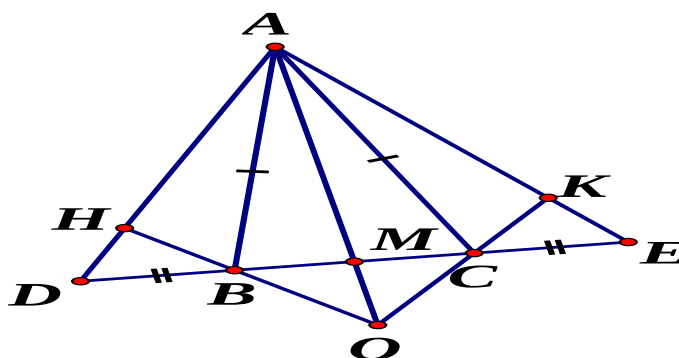
a) Chứng minh tam giác  $ADE$  là tam giác cân

b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $AM$  là tia phân giác của  $DAE$

c) Từ  $B$  và  $C$  vẽ  $BH, CK$  theo thứ tự vuông góc với  $AD, AE$ . Chứng minh  $BH = CK$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

d) Chứng minh 3 đường thẳng  $AM, BH, CK$  gặp nhau tại 1 điểm.



a)  $\triangle ABC$  cân nên  $AB = AC \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$  có:  $AB = AC(gt)$ ;  $\angle ABD = \angle ACE(cmt)$ ;  $DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$  cân tại A

b) Xét  $\triangle AMD$  và  $\triangle AME$  có:

$MD = ME(DB = CE; MB = MC)$ ;  $AM$  chung;  $AD = AE(cmt)$

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME(c.c.c) \Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$

Vậy  $AM$  là tia phân giác của  $DAE$

c) Vì  $\triangle ADE$  cân tại A (cm câu a) nên  $\angle ADE = \angle AED$

Xét  $\triangle BHD$  và  $\triangle CKE$  có:  $\angle BDH = \angle CEK(do \dots \angle ADE = \angle AED)$ ;  $DB = CE(gt)$

$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

d) Gọi giao điểm của  $BH$  và  $CK$  là O

Xét  $\triangle AHO$  và  $\triangle AKO$  có:  $OA$  cạnh chung;

$AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \triangle BHD = \triangle CKE))$

$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO(ch - cv)$

Do đó  $\angle OAH = \angle OAK$  nên  $AO$  là tia phân giác của  $KAH$  hay  $AO$  là tia phân giác của  $DAE$ , mặt

khác theo câu b)  $AM$  là tia phân giác của  $DAE$

Do đó  $AO \equiv AM$ , suy ra ba đường thẳng  $AM, BH, CK$  cắt nhau tại O.

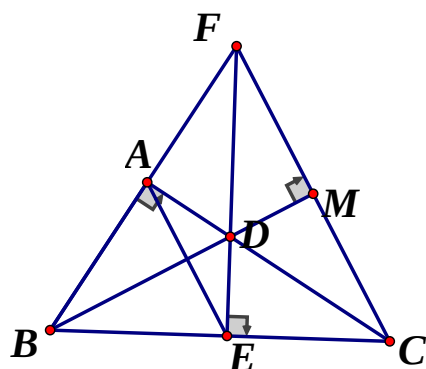
**Bài 15:** Cho tam giác  $ABC$  vuông góc tại A. Phân giác trong của B cắt cạnh  $AC$  tại điểm D. Từ D kẻ  $DE$  vuông góc với  $BC$  ( $E \in BC$ ). Tia  $ED$  và tia  $BA$  cắt nhau tại F.

a) So sánh  $DA$  và  $DC$

b) Chứng minh  $BD \perp FC$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

c) Chứng minh  $AE \parallel FC$



a) Ta có  $\triangle ABD = \triangle EDB$  vì có  $AD$  chung ;  $B_1 = B_2$  cho ta  $DA = DE$  (1)

Trong tam giác vuông  $EDC$  thì  $DE < DC$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $DA < DC$

b)  $\triangle ABD = \triangle EDB$  nên  $AB = BE$  (hai cạnh tương ứng)

Hai tam giác  $EFB$  và  $ACB$  có  $AB = BE$  và  $B$  chung, suy ra  $BF = BC$

$\Rightarrow \triangle FBC$  cân , đỉnh  $B$

Mà  $BM$  là phân giác của  $B$  nên cũng là đường cao, suy ra  $BM \perp FC$  (3) hay  $BD \perp FC$

c) Ta dễ dàng thấy  $BD \perp AE$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $AE \parallel FC$

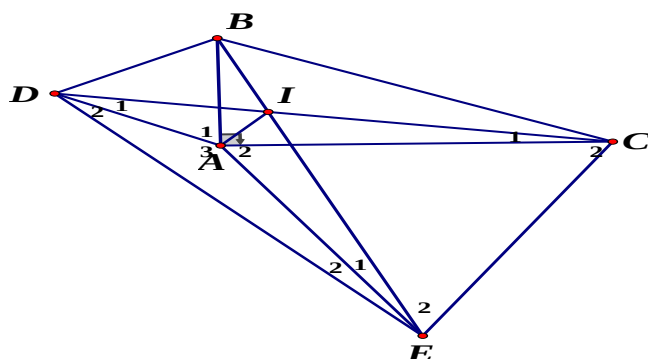
**Bài 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $BE$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:

a)  $BE = CD$

b)  $\triangle BDE$  là tam giác cân

c)  $\angle EIC = 60^\circ$  và  $IA$  là tia phân giác của  $\angle DIE$

**Lời giải:**



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} DAC = A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ BAE = A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow DAC = BAE$$

Xét  $\triangle DAC$  và  $\triangle BAE$  có:  $DA = BA(gt)$ ;  $DAC = BAE(cmt)$ ;  $AC = AE(gt)$

$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE(c.g.c) \Rightarrow BE = CD$  (hai cạnh tương ứng)

$$\text{b) Ta có: } A_3 + A_1 + BAC + A_2 = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow A_3 = 150^\circ = DAC$$

Xét  $\triangle DAE$  và  $\triangle BAE$  có:  $DA = BA(gt)$ ;  $A_3 = DAC(cmt)$ ;  $AE$  chung

$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE(c.g.c) \Rightarrow DE = BE \Rightarrow \triangle BDE$  cân tại  $E$

$$\text{c) Ta có: } \triangle DAC = \triangle BAE(\text{cm câu a}) \Rightarrow E_1 = C_1 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Lại có:  $I_1 + E_2 + ICE = 180^\circ$  (tổng 3 góc trong  $\triangle ICE$ )

$$\Leftrightarrow I_1 + (AEC - E_1) + (C_1 + C_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow I_1 + 60^\circ - E_1 + C_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow I_1 + 120^\circ = 180^\circ (E_1 = C_1)$$

$$\Leftrightarrow I_1 = 60^\circ$$

Vì  $\triangle DAE = \triangle BAE(\text{cm câu b}) \Rightarrow E_1 = E_2$  (hai góc tương ứng)  $\Rightarrow EA$  là tia phân giác của  $DEI$  (1)

$$\text{Vì } \begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow D_1 = D_2 \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow DA \text{ là tia phân}$$

giác của  $EDC$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow A$  là giao điểm của 2 tia phân giác trong  $\triangle DIE \Rightarrow IA$  là đường phân giác thứ 3 trong  $\triangle DIE \Rightarrow IA$  là tia phân giác của  $DIE$

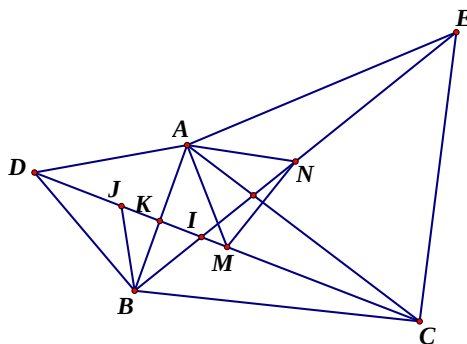
**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ). Vẽ về phía ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $I$  là giao của  $CD$  và  $BE$ ,  $K$  là giao của  $AB$  và  $DC$ .

d) Chứng minh rằng  $\triangle ADC = \triangle ABE$ .

e) Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $CD$  và  $BE$ . Chứng minh rằng  $\triangle AMN$  đều

f) Chứng minh rằng  $IA$  là phân giác của  $DIE$

## Lời giải



a) Ta có:  $AD = AB$ ;  $\angle DAC = \angle BDE$  và  $AC = AE$

Suy ra  $\triangle ADC = \triangle ABE$  (c.g.c)

b) Từ  $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$  mà  $\angle BKC = \angle AKD$  (đối đỉnh)

Khi đó xét  $\triangle BIK$  và  $\triangle DAK \Rightarrow \angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$  (dpcm)

Từ  $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow CM = EN$  và  $ACM = AEN$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$  (c.g.c)  $\Rightarrow AM = AN, \angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$ . Do đó  $\triangle AMN$  đều.

c) Trên tia  $ID$  lấy điểm  $J$  sao cho  $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$  đều.

$\Rightarrow BJ = BI$  và  $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$

Suy ra  $\angle IBA = \angle JBD$ , kết hợp  $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle AIB = \angle DJB = 120^\circ$  mà  $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$

Từ đó suy ra  $IA$  là phân giác của  $\angle DIE$ .

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = AB$ . Gọi  $I$  là giao điểm các đường trung trực của  $BC$  và  $AD$

d) Chứng minh  $\triangle AIB = \triangle DIC$

e) Chứng minh  $AI$  là tia phân giác của  $\angle BAC$

f) Kẻ  $IE$  vuông góc với  $AB$ , chứng minh  $AE = \frac{1}{2}AD$

## Lời giải



GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

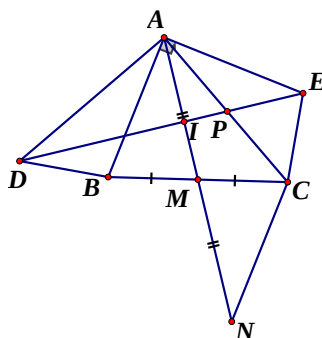
**Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn, trung tuyến  $AM$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa điểm  $C$ , vẽ đoạn thẳng  $AE$  vuông góc và bằng  $AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  chứa điểm  $B$ , vẽ đoạn thẳng  $AD$  vuông góc và bằng  $AC$ .

a, Chứng minh  $BD = CE$

b, Trên tia đối của tia  $MA$  lấy  $N$  sao cho  $MN = MA$ . Chứng minh  $\triangle ADE = \triangle CAN$

c, Gọi  $I$  là giao điểm của  $DE$  và  $AM$ . Chứng minh  $\frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1$

**Lời giải**



a) Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$  có:  $AD = AC(gt)$ ;  $AE = AB(gt)$ ;  $\angle BAD = \angle CAE$  (cùng phụ  $\angle BAC$ )

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC(c.g.c) \Rightarrow BD = CE$  (hai cạnh tương ứng)

b) Xét  $\triangle ABM$  và  $\triangle NCM$  có:

$AM = MN(gt)$ ;  $BM = CM(gt)$ ;  $\angle AMB = \angle NCM(dd)$

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM(c.g.c) \Rightarrow AB = CN$  (hai cạnh tương ứng)

$\angle ABM = \angle NCM$  (hai góc tương ứng)

Ta có:  $\angle ACN = \angle ACB + \angle BCN = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC$

Lại có:  $\angle DAE = \angle DAC + \angle BAE - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC \Rightarrow \angle DAE = \angle ACN$

Xét  $\triangle ADE$  và  $\triangle ACN$  có:  $AE = CN$  (cùng bằng  $AB$ );  $AD = AC(gt)$ ;  $\angle DAE = \angle ACN(cmt) \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ACN(c.g.c)$

c) Vì  $\triangle ADE = \triangle ACN(cmt) \Rightarrow \angle NAC = \angle ADE$  (hai góc tương ứng)

Gọi  $P$  là giao điểm của  $DE$  và  $AC$

Xét  $\triangle ADP$  vuông tại  $A \Rightarrow \angle ADE + \angle APD = 90^\circ \Rightarrow \angle NAC + \angle APD = 90^\circ \Rightarrow AI \perp DE$

Xét  $\triangle ADI$  vuông tại  $I$ . theo định lý Pytago ta có:

$$AD^2 = DI^2 + AI^2 \Rightarrow AI^2 = AD^2 - DI^2$$

GIÁO VIÊN: LÊ THỊ NGÀ

Xét  $\triangle AIE$  vuông tại I. theo định lý Pytago ta có:

$$AE^2 = AI^2 + IE^2 \Rightarrow AI^2 = AE^2 - IE^2$$

$$\Rightarrow AD^2 - DI^2 = AE^2 - IE^2 \Rightarrow AD^2 + IE^2 = DI^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow \frac{AD^2 + IE^2}{DI^2 + AE^2} = 1(\text{đpcm}).$$

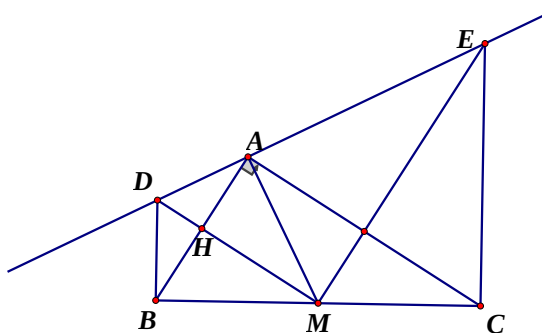
**Bài 21.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại A, đường trung tuyến  $AM$ . Qua A kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AM$ . Qua  $M$  kẻ các đường vuông góc với  $AB, AC$ , chúng cắt  $d$  theo thứ tự ở  $D$  và E.

Chứng minh rằng :

b)  $BD \parallel CE$

b)  $DE = BD + CE$

**Lời giải**



a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông:  $MA = MB$

Gọi H là giao điểm của  $MD$  và  $AB$

Tam giác cân  $AMB$  có  $MH$  đường cao ứng với đáy nên là đường trung trực, suy ra  $DA = DB$ .

Chứng minh được  $\triangle MBD = \triangle MAD (c.c.c) \Rightarrow \angle MBD = \angle MAD = 90^\circ$ , do đó:  $DB \perp BC$

Tương tự ta có:  $EC \perp BC$

Vậy  $BD \parallel CE$  (cùng vuông góc với  $BC$ ), (đpcm)

b) Theo câu a,  $DB = DA$ . Tương tự:  $EC = EA$

Suy ra  $DE = DA + AE = BD + CE$