

HH7-CHỦ ĐỀ 5. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong một số bài toán ở các chuyên đề trước, chúng ta đã phải vẽ thêm hình phụ thì mới giải được. Trong chuyên đề này, chúng ta hệ thống một vài kỹ thuật vẽ hình phụ để giải toán.

1. Mục đích của việc vẽ thêm hình phụ

Khi vẽ thêm đường phụ, chúng ta thường nhằm các mục đích sau đây:

- Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến chứng minh tập hợp (ở một hình mới) làm cho chúng có liên quan đến nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng thứ ba (hoặc góc thứ ba) làm cho hai đoạn thẳng (hoặc hai góc) cần chứng minh trở lên có mối quan hệ với nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng (hay góc) bằng tổng, hiệu gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng (hay góc) cho trước để đạt được chứng minh của bài tập hình học.
- Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hay góc) bằng nhau, thêm vào những đại lượng bằng nhau mà đề bài đã cho để giúp cho việc chứng minh.
- Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý nào đó.
- Biến đổi kết luận, hình vẽ làm cho bài toán trở lên dễ chứng minh hơn.

2. Các loại đường phụ thường vẽ

- Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với một độ dài tùy ý hoặc cắt một đường thẳng khác.
- Nối hai điểm cho trước hoặc cố định
- Từ một điểm cho trước dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
- Dựng đường phân giác của một góc cho trước.
- Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng một góc cho trước.

* *Chú ý:* Khi vẽ đường phụ phải có mục đích không vẽ tùy tiện.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

Chứng minh $BC = AD + BD$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Đây là bài toán khó tuy nhiên nếu bạn biết lưu tâm đến giả thiết của bài toán và phương pháp kẻ đường phụ thì bài toán trở nên đơn giản. Phân tích kết luận, chúng ta có hai hướng vẽ đường phụ cho bài toán này.

- Vì A, D, B không thẳng hàng, mà kết luận $AD + BD = BC$, do vậy chúng ta vẽ thêm hình phụ sao cho $AD + BD$ bằng một đoạn thẳng. Sau đó chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

- Phân tích kết luận, chúng ta cũng có thể nghĩ tới việc tách BC thành tổng hai đoạn thẳng mà trong đó có một đoạn thẳng bằng BD (hoặc AD) và chứng minh đoạn thẳng còn lại bằng AD (hoặc BD).

Trong hai hướng suy nghĩ trên, chúng ta lưu ý đến giả thiết là tam giác cân và biết số đo góc để tính tất cả các góc có thể.

*** Trình bày lời giải**

- **Cách vẽ 1.** Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.

$\triangle ABC$ cân tại A có $A = 100^\circ$ nên $B = C = 40^\circ$.

Ta có: $\triangle ABD = \triangle EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DE$,

$BED = BAD = 100^\circ \Rightarrow D_1 = D_2 = D_3 = 60^\circ$

Mà BD là tia phân giác của góc B nên $B_1 = B_2 = 20^\circ$

Mặt khác: $BDC = 120^\circ \Rightarrow D_4 = 60^\circ$. Từ đó ta có:

$\triangle KDC = \triangle EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow DKC = DEC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow KCB = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BK = BD + DK = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD$.

- **Cách vẽ 2.** Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$, lấy điểm N sao cho $BN = BD$.

Ta có: $\triangle ABD = \triangle MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DM$ *, $A = BMD = 100^\circ$.

Do $BMD = 100^\circ \Rightarrow DNM = 80^\circ$ (1)

Mặt khác $\triangle BDN$ cân tại B nên

$BDN = BND = 80^\circ$ 2

Từ (1) (2) ta có: $\triangle MDN$ cân tại D

nên $DM = DN$ (**)

Ta có: $NDC = NCD = 40^\circ$

$\Rightarrow \triangle DNC$ cân tại N, nên $NC = ND$ (***)

Từ (*) (**) (***) $\Rightarrow AD = NC \Rightarrow BC = BN + NC \Rightarrow BC = BD + AD$.

- **Cách vẽ 3.** Trên cạnh BC lấy điểm

F sao cho $BF = BD$, trên cạnh AB

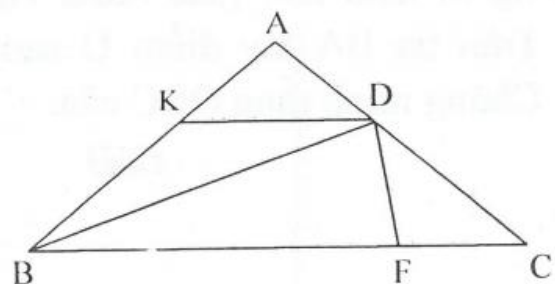
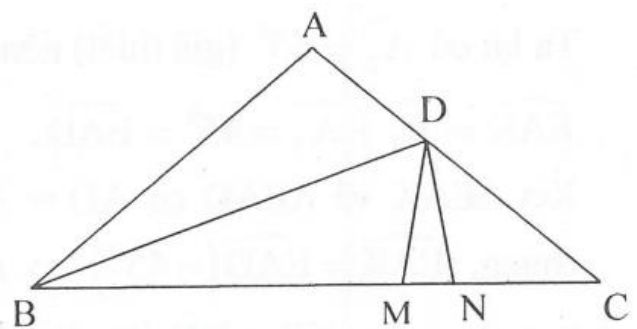
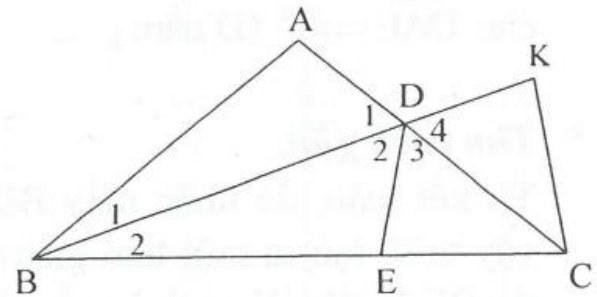
lấy điểm K sao cho $AK = AD$. Ta

sẽ chứng minh được tam giác BKD

cân tại K nên $KB = KD$, mà $KB = DC$

nên $KD = DC$ do đó $\triangle AKD = \triangle FDC$ g.c.g $\Rightarrow AD = FC$

$\Rightarrow BC = BF + FC = BD + AD$.



Vậy $BC = BD + AD$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc BC sao cho $DAE = 45^\circ$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng $BD^2 + CE^2 = DE^2$.

Giải

* **Tìm cách giải.**

Từ kết luận, để nhận thấy BD, CE, DE thỏa mãn định lý Py-ta-go. Do vậy ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE trong đó DE là độ dài cạnh huyền. Do BD, CE, DE cùng nằm trên một đường thẳng. Do vậy cần kẻ thêm đường phụ. Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE$.

* **Trình bày lời giải.**

Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Ta

có $C_2 = 90^\circ - C_1 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$CK = BD$ (theo cách dựng)

$AC = AB$ (giả thiết)

Do đó $\triangle ACK = \triangle ABD$ c.g.c ,

suy ra $AK = AD, A_4 = A_1$

Ta lại có $A_2 = 45^\circ$ (giả thiết) nên $A_1 + A_3 = 45^\circ$ suy ra:

$EAK = A_4 + A_3 = 45^\circ = EAD$

Xét $\triangle EAK$ và $\triangle EAD$ có $AD = AK$, AE là cạnh

chung, $EAK = EAD = 45^\circ \Rightarrow \triangle EAK = \triangle EAD$

(c.g.c), suy ra $KE = DE$. Từ đây, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 15^\circ$.

Trên tia BA lấy điểm O sao cho $BO = 2AC$.

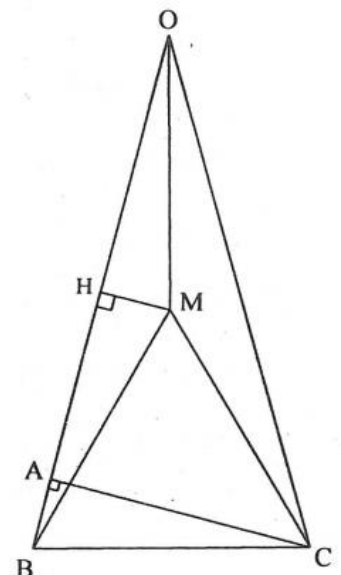
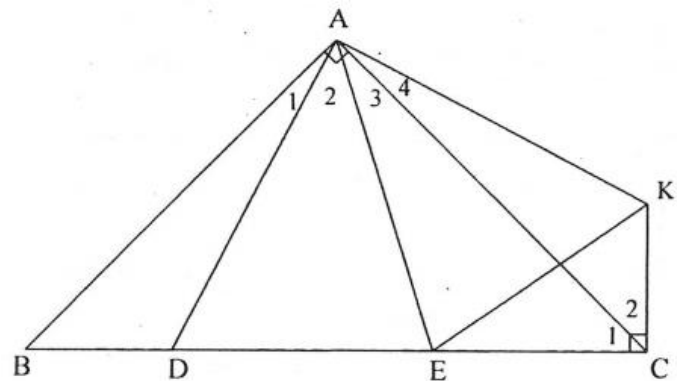
Chứng minh rằng OBC cân.

Giải

* **Tìm cách giải.** Trong bài toán trên, vì phát hiện thấy

$C = 15^\circ$ suy ra $B = 75^\circ$, mà $75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ là số đo của mỗi góc trong tam giác đều.

Điều này gợi ý cho chúng ta vẽ tam giác đều BCM như hình vẽ. Nhờ các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam



giác đều là 60° , chúng ta chứng minh được

$$\triangle HMB = \triangle ABC \text{ c.g.c} ; \triangle MOB = \triangle MOC \text{ c.g.c} \text{ dẫn tới}$$

$\triangle OBC$ cân tại O. Do đó nên nghĩ tới việc vận dụng về thêm tam giác đều vào giải toán.

*** Trình bày lời giải**

Ta có: $\triangle ABC$; $A = 90^\circ$; $C = 15^\circ$ gt $\Rightarrow B = 75^\circ$.

Vẽ tam giác đều BCM.

(M và A cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta có: $OBM = ABC - MBC = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$

Gọi H là trung điểm của OB $\Rightarrow HO = HB = \frac{1}{2}OB$

Mặt khác $BO = 2AC$ (gt) nên $AC = \frac{1}{2}OB$ từ đó ta có $AC = BH$

Xét $\triangle HMB$ và $\triangle ABC$ có: $BH = AC$ (cmt) $HBM = ACB = 15^\circ$;

$MB = BC$ (cạnh $\triangle$ đều BMC)

Do đó $\triangle HMB = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow H = A = 90^\circ \Rightarrow MH \perp OB$

$\triangle MBH$ và $\triangle MOH$ có $MHB = MHO = 90^\circ$, $BH = HO$, MH chung

$\Rightarrow \triangle MBH = \triangle MOH \Rightarrow OBM = BOM \Rightarrow OBM = BOM = 15^\circ$.

$\Rightarrow BMO = 180^\circ - 2.15^\circ = 150^\circ$

Từ đó $MB = MC$, $CMO = BMO = 150^\circ$, OM là cạnh chung

Do đó $\triangle MOB = \triangle MOC$ c - g - c $\Rightarrow OB = OC$.

Vậy $\triangle OBC$ cân tại O. (điều phải chứng minh)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = 2CD$.

Chứng minh rằng $EDB = 90^\circ$.

Giải

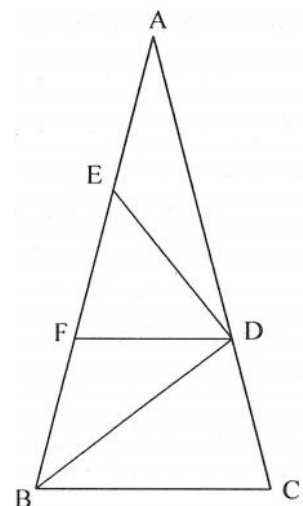
* **Tìm cách giải.** Từ giả thiết $BE = 2CD$, gợi ý cho chúng ta vẽ trung điểm F của BE. Muốn chứng minh $EDB = 90^\circ$ mà $FB = FE$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh $BF = FD = FE$.

*** Trình bày lời giải**

- **Cách 1.** Gọi F là trung điểm của BE thì $FB = CD$

(cùng bằng $\frac{1}{2}BE$). Mà $AB = AC$ (tam giác ABC cân

tại A) nên $AF = AD$. Suy ra tam giác AFD cân tại A.



Từ đó $\angle AFD = \angle ABC$ (cùng bằng $\frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$).

Suy ra $DF \parallel BC$ (hai góc đồng vị bằng nhau),

nên $\angle FBD = \angle FDB$ (cùng bằng $\angle DBC$). Điều này dẫn đến tam giác FBD cân tại F , hay

$$FD = FB = \frac{1}{2}BE.$$

Tam giác BDE có F là trung điểm cạnh BE và $DF = \frac{1}{2}BE$ nên tam giác BDE vuông tại D hay

$\angle EDB = 90^\circ$ (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.** Từ D kẻ $DF \parallel BC$ $F \in AB$. Suy ra $\angle FDB = \angle CBD$ (so le trong)

$$\Rightarrow \angle FDB = \angle FBD \Rightarrow \triangle FBD \text{ cân tại } F \Rightarrow BF = FD$$

Mặt khác, $\triangle AFD$ và $\triangle ABC$ cân tại A , suy ra $AF = AD$, $AB = AC$

$$\Rightarrow BF = CD.$$

Từ đó suy ra $BF = FD = FE \Rightarrow$ tam giác BDE vuông tại D hay $\angle EDB = 90^\circ$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC ($AB < AC$),

kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi

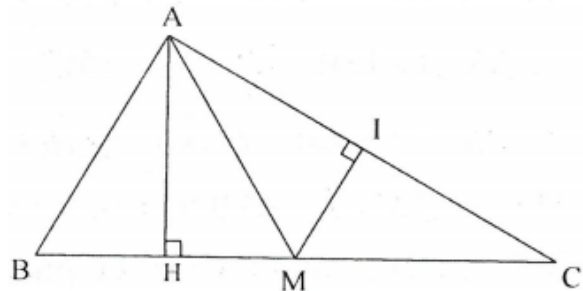
M là trung điểm của BC . Biết rằng

AH và AM chia góc A thành 3 góc

bằng nhau. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC vuông.

b) Tam giác ABM là tam giác đều.



Giải

* **Tìm cách giải.** Muốn chứng minh tam giác ABC vuông tại A ta cần kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh đường thẳng đó song song với AB , từ đó suy ra $AB \perp AC$ và suy ra $\angle A = 90^\circ$.

* **Trình bày lời giải.**

a) Về MI vuông góc với AC .

$\triangle AHM$ và $\triangle AIM$ có $\angle AHM = \angle AIM = 90^\circ$, AM là cạnh chung, $\angle HAM = \angle IAM$

$$\Rightarrow \triangle MAI = \triangle MAH \text{ (c.h-g.n)} \Rightarrow MI = MH$$

$\triangle AHM$ và $\triangle AHB$ có $\angle AHM = \angle AHB = 90^\circ$, AH là cạnh chung,

$$\angle HAM = \angle HAB \Rightarrow \triangle AHM = \triangle AHB \text{ g.c.g} \Rightarrow BH = MH$$

$$\Rightarrow BH = MH = \frac{1}{2}BM \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \angle C = 30^\circ; \angle HAC = 60^\circ$$

Vậy $BAC = 60^\circ : 2 = 30^\circ \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $C = 30^\circ \Rightarrow B = 60^\circ$; $AM = BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ tam giác ABM cân có một góc bằng $60^\circ \Rightarrow$ tam giác ABM đều.

* **Nhận xét:** Trong bài toán trên nếu chỉ có các yếu tố bài ra thì tưởng chừng như rất khó giải, tuy nhiên, chỉ bằng một đường vẽ thêm ($MI \perp AC$) thì bài toán lại trở nên rất dễ dàng, qua đó càng thấy rõ vai trò của việc vẽ thêm yếu tố phụ trong giải toán hình học.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC với $BAC = 40^\circ$ và $ABC = 60^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $DCB = 70^\circ$ và $EBC = 40^\circ$; F là giao điểm của DC và EB. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.

Giải

Trên AC lấy điểm N sao cho $ABN = 40^\circ$.

Ta có $ABN = BAN = 40^\circ$ nên $\triangle ABN$ cân tại N, suy ra $BNC = 80^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Do đó

$BNC = BCN = 80^\circ$ suy ra $\triangle BCN$ cân tại B $\Rightarrow BN = BC$ (1)

$\triangle BFC$ có $FBC = 40^\circ, FCB = 70^\circ$ nên

$BFC = 70^\circ$

Vậy $\triangle BFC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BN = BF$ (3). Kéo dài BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$
 $\Rightarrow \triangle ABM$ đều.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle MBF$ có $AB = MB$, $BN = BF$ (do (3)), $ABN = FBM = 40^\circ$, do đó $\triangle ABN = \triangle MBF$ (c.g.c). Mà $\triangle ABN$ cân tại N, suy ra $\triangle MBF$ cân tại F. Từ $AB = AM$ (do $\triangle ABM$ đều), $FB = FM \Rightarrow \triangle ABF = \triangle AMF$ c.c.c, suy ra $BAF = MAF$.

Mặt khác, $\triangle ABM$ đều nên AF vuông góc với BC.

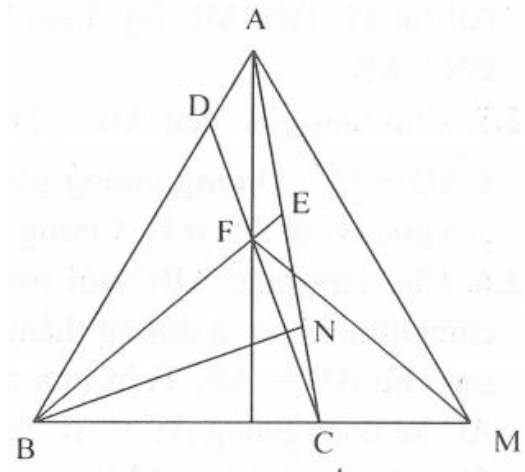
* **Nhận xét:**

- Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.

- Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán.

C. Bài tập vận dụng

1. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$), trên cạnh AB lấy điểm D, trên phần kéo dài của cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh $DF = FE$



2. Cho $\triangle ABC$ có $B = 45^\circ; A = 15^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy D sao cho $CD = 2.CB$. Tính ADB
3. Ở trong góc nhọn xOy vẽ Oz sao cho $xOz = \frac{1}{2}yOz$. Qua điểm A thuộc Oy vẽ AH vuông góc Ox cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy D sao cho $BD = OA$. Chứng minh tam giác AOD cân.
4. Cho $\triangle ABC$ có $ABC = 50^\circ; BAC = 70^\circ$. Tia phân giác góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho $MBN = 40^\circ$. Chứng minh rằng: $BN = MC$
5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm D sao cho $CAD = 15^\circ$. Đường vuông góc với BC tại C cắt AD ở E. Tia phân giác của góc B cắt AD ở K. Chứng minh rằng $AK = ED$.
6. Cho tam giác ABC với trung điểm M của BC. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho $AB = AE$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF = AC và AF vuông góc với AC. Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.
7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng $AD = 2ED$.
8. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng 120° và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.
9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $ABC = 54^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $CE = AB$.
10. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB < AC$. Vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $BIH = ACB$

HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Cách 1. Từ D kẻ $DH \parallel AC$ $H \in BC$ suy ra $DHB = ACB$, mà

$$ABC = ACB \Rightarrow DHB = ABC \Rightarrow \triangle DHB \text{ cân tại D} \Rightarrow DH = DB$$

$$\Rightarrow DH = CE$$

$$\triangle DHF \text{ và } \triangle ECF \text{ có } DHF = ECF, DH = CE, HDF = CEF$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHE = \triangle ECF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE$$

- Cách 2. Từ E kẻ $EK \parallel AB$ $K \in BC$

$$\Rightarrow ABC = CKE, \text{ mà } ABC = ACB$$

$$\Rightarrow ACB = CKE \Rightarrow ECK = CKE$$

$$\Rightarrow \triangle ECK \text{ cân tại E} \Rightarrow CE = KE \Rightarrow BD = KE$$

$$\triangle BDF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } DBF = EKF, BD = KE,$$

$$BDF = KEF$$

$$\text{Suy ra } \triangle BDF = \triangle KEF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE$$

- Cách 3. Hạ $DH \perp BC$, $EK \perp BC$ $H, K \in BC$

$$\triangle BDH \text{ và } \triangle CEK \text{ có } BHD = CKE = 90^\circ,$$

$$BD = CE, DBH = KCE$$

$$\text{Suy ra } \triangle DBH = \triangle ECK \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow DH = EK.$$

$$\triangle DHF \text{ và } \triangle KEF \text{ có } DHF = EKF = 90^\circ,$$

$$DH = KE, DFH = KFE$$

$$\text{Suy ra } \triangle DHF = \triangle EKF \text{ g.c.g} \Rightarrow DF = FE.$$

Tóm lại: Chứng minh $DF = EF$ dựa vào cặp tam giác bằng nhau, do đó cần tạo ra cặp tam giác bằng nhau.

2. Tìm cách giải. Dễ thấy $DCA = 60^\circ$ mà $CD = 2.BC$ nên ta nghĩ tới tam giác vuông có góc nhọn 60° .

$$\text{Ta hạ } DE \perp AC \Rightarrow CD = 2.CE \Rightarrow CE = CB.$$

$$\text{Dễ thấy } \triangle BED \text{ và } \triangle BEA \text{ cân tại E}$$

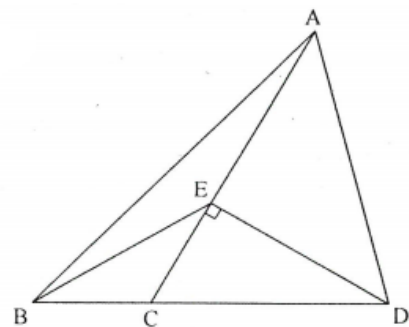
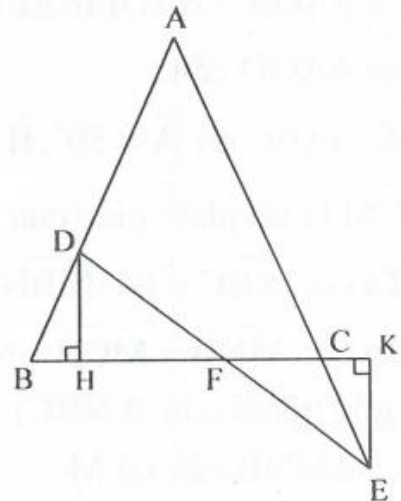
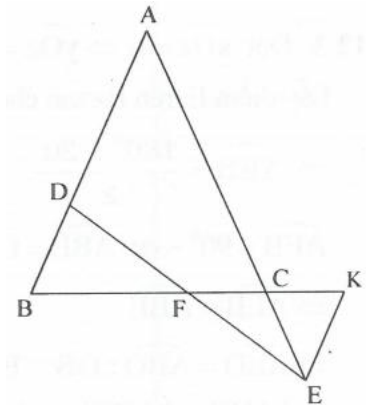
$$\Rightarrow \triangle EAD \text{ cân tại E.}$$

Từ đó tính được:

$$ADE = 45^\circ, EDB = 30^\circ \Rightarrow ADB = 75^\circ$$

$$3. \text{Đặt } xOz = \alpha \Rightarrow yOz = 2\alpha$$

Lấy điểm E trên Bz sao cho $OE = OA$ $\triangle AEO$ cân tại O



nên $\triangle AHB = \triangle CIA$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $AH = CI$. Từ đó suy ra $AK = ED$.

6. Trường hợp $BAC = 90^\circ$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh cho trường hợp $BAC < 90^\circ$.

Trường hợp $BAC > 90^\circ$, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$.

Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC và DMB có $AM = MD$;

$$\angle AMC = \angle DMB; BM = MC$$

Nên $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c), suy ra $\angle CAM = \angle BDM$ (1) và $BD = AC$.

Ta có $AE \perp AB; BG \perp AB$ nên $BG \parallel AE$ suy ra $\angle EAM = \angle BGA$ (so le trong) (2)

$$\text{Mà } \angle BGA = \angle GBD + \angle BDM \text{ và } \angle EAM = \angle EAC + \angle CAM \quad (3)$$

Nên từ (1) và (2), (3) suy ra $\angle EAC = \angle GBD$.

Ta có $AE = AB; \angle EAF = \angle ABD = 180^\circ - \angle BAC$;

$$BD = AF (=AC).$$

Do đó $\triangle EAF = \triangle ABD$ (c.g.c)

Suy ra $EF = AD$,

Mà $AD = 2 \cdot AM$ (cách vẽ) nên $EF = 2AM$.

Do $\triangle EAF = \triangle ABD$ nên $\angle AEF = \angle BAD$

Mà $\angle BAD + \angle DAE = 90^\circ$ nên $\angle AEF + \angle DAE = 90^\circ$

Suy ra $AM \perp EF$ (điều phải chứng minh).

7.

Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F.

Do $AB = AC, \angle ABE = \angle CAF$ (cùng phụ với góc AEB);

$$\angle BAE = \angle ACF = 90^\circ \text{ nên}$$

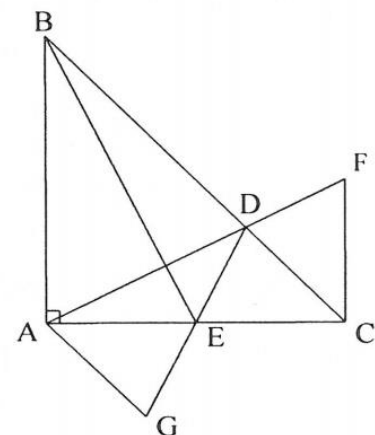
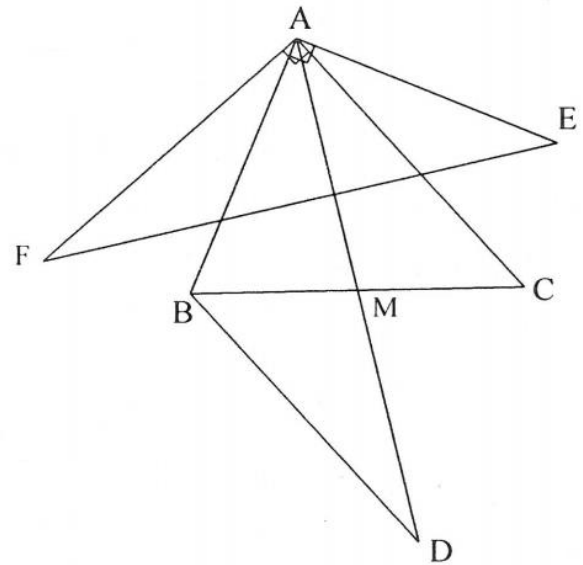
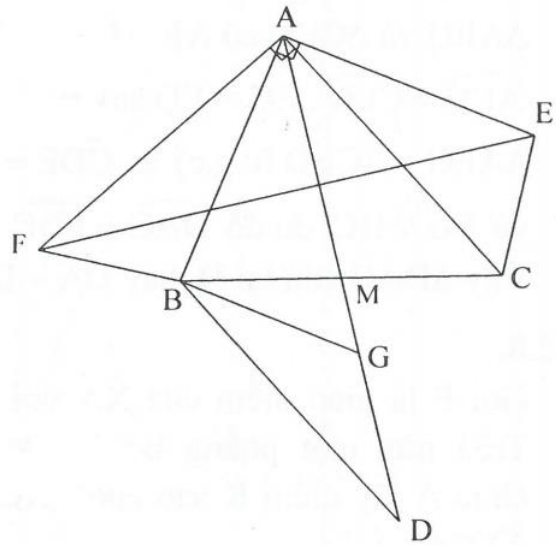
$$\triangle BAE = \triangle ACF \text{ g.c.g} \Rightarrow AE = CF$$

$$\Rightarrow CE = CF.$$

Suy ra $\triangle CED = \triangle CFD$ c.g.c

Trên tia DE lấy điểm G sao cho $EG = ED$,

$\triangle AEG$ và $\triangle CED$ có $AE = CE$,



$$AEG = CED, EG = ED \text{ suy ra}$$

$$\triangle AEG = \triangle CED \text{ c.g.c} \Rightarrow CDE = AGE$$

và $AG \parallel DC$, do đó $DAG = FDC$ (đồng vị) suy ra $DAG = DGA$.

Vậy $\triangle DAG$ cân tại D, hay $DA = DG = 2DE$ (điều phải chứng minh).

8.

Gọi E là giao điểm của XA với YZ.

Trên nửa mặt phẳng bờ XC không

chứa A lấy điểm K sao cho $\triangle XCK = \triangle XBA$.

Ta có $XK = XA$ và $KXC = AXB$ suy ra

$$AXK = BXC = 120^\circ$$

Do đó $XAK = 30^\circ$. Mặt khác, ta có $CK = BA = AZ$

(vì $\triangle XCK = \triangle XBA$ và $\triangle ABZ$ đều); $CA = AY$ (vì $\triangle YCA$ đều);

$$ACK = ACB + BCX + XCK = C + 30^\circ + XBA$$

$$= C + 30^\circ + 30^\circ + B = 60^\circ + 180^\circ - A$$

$$= 240^\circ - 360^\circ - YAC - ZAB - YAZ = YAZ;$$

suy ra $\triangle CAK = \triangle AYZ$ (c.g.c)

do đó $CAK = AYZ = EYA$

Ta có: $EAY + CAK = 180^\circ - YAC + XAK = 180^\circ - 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

$\triangle EAY$ có $EAY + EYA = 90^\circ$, suy ra $AEY = 90^\circ$. Vậy $XA \perp YZ$.

9.

* Trên tia đối của tia MA lấy A' sao cho $MA' = MA$.

Khi đó $\triangle MCA' = \triangle MBA$ (c.g.c),

suy ra $CA' = AB$ (1);

$$MCA' = MBA = 54^\circ$$

Do đó $ACA' = ACB + BCA' = 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ$

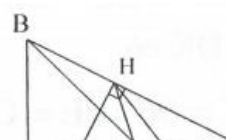
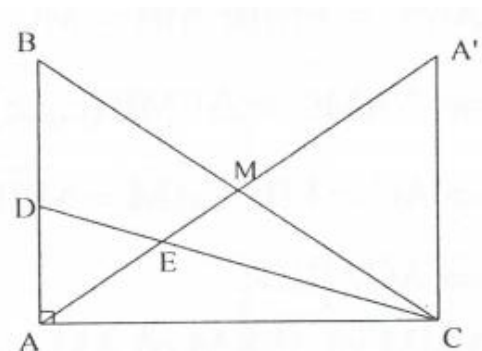
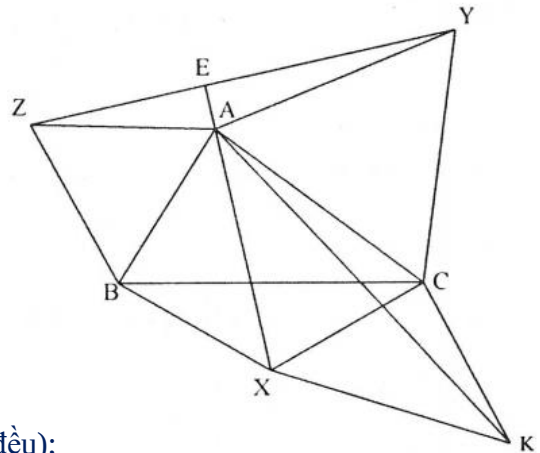
Từ $\triangle ABC = \triangle CA'A$ c.g.c $\Rightarrow AA' = BC$; $MC = MA = \frac{1}{2}BC$, $MAC = MCA = 36^\circ$.

Mặt khác, CD là phân giác ACB nên $ECA = 18^\circ$, $A'EC$ là góc ngoài của tam giác AEC nên

$$A'EC = EAC + ECA = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ = EA'C,$$

suy ra tam giác ECA' cân tại C, nên $CE = CA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CE = AB$.



10.

Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F.

Xét các tam giác vuông ABD và EBD

Có $IB = ID$ nên $AI = EI = \frac{BD}{2}$.

Ta có $\triangle ABH = \triangle DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DF$ (1).

$\triangle HED = \triangle DFH$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HE = DF$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $AH = HE$. Từ đó $\triangle IHA = \triangle IHE$ (c.c.c)

$\Rightarrow IHA = IHE = 90^\circ : 2 = 45^\circ$. Ta có $BIH + IBH = IHE = 45^\circ$

Mà $IBH = FDI$ (so le trong) $\Rightarrow BIH = ADF$. Lại có $ADF = ACB$ (đồng vị), suy ra $BIH = ACB$ (điều phải chứng minh).